УДК 517.9

В. С. РАБИНОВИЧ

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Фредгольмовость интегрально-разностных операторов на R^n, т. е. операторов вида

$$(Au)(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\,u(x - h_j) + b_j(x)\,(k_j * u)(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{1}$$

где a_j, b_j — непрерывные функции на $\boldsymbol{R}^n$, имеющие радиальные пределы на бесконечности, $k_j \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$, $h_j \in \boldsymbol{R}^n$, изучалась в работе [1]. В ней было показано, что фредгольмовость оператора A в L_2 равносильна выполнению следующих условий:

1) разностная часть оператора A

$$\sum_{j=1}^{N} a_j(x)\,u(x-h_j),\quad x\in \boldsymbol{R}^n \tag{2}$$

есть обратимый в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$,

2) функция

$$\sigma_A(\omega,\xi)=\sum_{j=1}^{N}\tilde{a}_j(\omega)\,e^{-i(\xi,h_j)}+\tilde{b}_j(\omega)\,\hat{k}_j(\xi) \tag{3}$$

не вырождена на $S_\omega^{n-1}\times \boldsymbol{R}_\xi^n$. В формуле (3)

$$\tilde{a}(\omega)=\lim_{t\to\infty} a(t\omega),\quad \omega\in S^{n-1},\quad \hat{k}_j(\xi)=\int k_j(x)\,e^{-i(y,\xi)}\,dx$$

— преобразование Фурье $k_j(x)$.

В работе аналогичные результаты получены для операторов вида

$$A=A_1P_+ + A_2P_-;\ A=A_1P_{++}+A_2P_{-+}+A_3P_{--}+A_4P_{+-}. \tag{4}$$

Здесь A_j — операторы вида (1); $P_\pm L_2(\boldsymbol{R}^n)\to L_2(\boldsymbol{R}_\pm^n)$, $P_{++}:L_2(\boldsymbol{R}^2)\to$ $\to L_2(\boldsymbol{R}_{\pm\pm})$ — проекторы; $\boldsymbol{R}_\pm^n=\{x=(x',x_n):x_n\gtrless 0\}$ — полупространства; $\boldsymbol{R}_{\pm\pm}=\{x=(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2,\ \ x_1\lessgtr 0,\ \ x_2\gtrless\}$ — четверти плоскости.

Операторы вида (4) включаются в C^*-алгебру, порожденную операторами вида (1) и проекторами на всевозможные полупространства.

Метод изучения фредгольмовости — локализация по паре таких идеалов, пересечение которых есть идеал компактных операторов, что идейно близко к методу работы [2].

Одномерные операторы вида (4) рассматривались в работе [3]. При условии, что разностная часть оператора есть оператор умножения на функцию, многомерные операторы вида (4) изучались в работе [4]. Результаты настоящей работы согласуются с результатами этих работ.

1. О некоторых алгебрах п. д. о. с ограниченными символами. Через $C_b(\boldsymbol{R}^n)\,(C_0(\boldsymbol{R}_n))$ обозначим алгебру непрерывных, ограниченных на $\boldsymbol{R}^n$ (стремящихся к нулю на бесконечности) функций, а через $C_b^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ — класс бесконечно дифференцируемых функций на $\boldsymbol{R}^n$, ограниченных вместе со всеми своими производными.

Функции $a(x,\xi)\in C_b^\infty(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_\xi^n)$ сопоставим п. д. о. $(Au)(x)\equiv$ $\equiv a(x,D)\,u=(2\pi)^{-n}\int a(x,\xi)\,\hat{a}(\xi)\,e^{i(x,\xi)}\,d\xi,\ u\in C_0^\infty$. Класс п. д. о. с символами класса $C_b^\infty(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)$ обозначим через LC_b^∞. Отметим, что $C_b^\infty\equiv S_{0,0}^0$ в стандартных обозначениях Л. Хермандера [5] и, следовательно, справедливы следующие предложения [6].

Предложение 1.1. *Оператор* $A \in LC_b^\infty$ *ограничен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *и*

$$\| Au \|_{L_2} \leqslant C \Big(\sum_{|\alpha|,\ |\beta| < k} \sup_{x,\xi} | \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) | \| u \|_{L_2} \tag{1.1}$$

с константами C, k, *не зависящими от* a.

Предложение 1.2. *Операторы класса* LC_b^∞ *образуют алгебру с инволюцией, т. е. операция суммы, произведения, перехода к сопряженному оператору не выводит за пределы класса* LC_b^∞.

Предложение 1.3. *Пусть* $\chi(x) \in C_b^\infty$, $\chi_R(x) = \chi\left(\frac{x}{R}\right)$, $A \in LC_b^\infty$ *тогда коммутатор*

$$[A, \chi_R]\, u(x) = A\chi_R u(x) - \chi_R A u(x)$$

таков, что

$$\lim_{R\to\infty} \| [A, \chi_R] \| = 0.$$

Доказательство. Используя формулу для символа произведения п. д. о., запишем символ $b(x, \xi)$ коммутатора в виде

$$b(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 d\Theta \iint \partial_{\xi_j} a(x, \xi + \Theta\eta) \times$$
$$\times (-i\partial_{x_j}) \chi_R(x + y)\, e^{-i(y,\eta)}\, dy\, d\eta.$$

Двойной интеграл в формуле (1.2) следует понимать как осциллирующий. Применяя технику оценок осцилляторных интегралов [5] и формулу 1.1, получаем следующую оценку нормы коммутатора:

$$\| [A, \chi_R] \| \leqslant C \sum_{\substack{1 \leqslant |\alpha| \leqslant k+1 \\ 1 \leqslant |\beta| \leqslant k+2}} \sup | \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) / \times \sum_{1 \leqslant |\beta| \leqslant k+1} \sup_x | \partial_x^\beta \chi_R(x) |. \tag{1.3}$$

Ввиду того, что $| \partial_x^\beta \chi_R(x) | \leqslant C_\beta R^{-|\beta|}$, из оценки (1.3) следует утверждение предложения 1.3.

Предложение 1.4. *Пусть* $\varphi \in C_b^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ *и*

$$| \partial_x^\beta \varphi | \leqslant C_\beta (1 + |x|)^{-|\beta|}\ \forall \beta \tag{1.4}$$

$\Psi(x) \in C_b^\infty$, $\Psi(x) = 0$, $|x| \leqslant 1$. *Положим* $\Psi_R(x) = \Psi(x/R)$ *и пусть* $A \in LC_b^\infty$, *тогда*

$$\lim_{R\to\infty} \| [A, \chi_R] \| = 0. \tag{1.5}$$

Доказательство. В оценке (1.3) положим вместо $\chi_R \varphi \Psi_R$ и для оценок производных воспользуемся формулой Лейбница, с помощью которой получим оценку $| \partial_x^\beta (\varphi \Psi_R) | \leqslant C_\beta R^{-|\beta|}$.

Определение 1.1. *Через* $C_{0,b}^\infty(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n)$ *обозначим класс таких функций из* $C_b^\infty(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n)$, *что* $\lim_{x\to\infty} \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) = 0$ *равно-*

мерно по ξ, $\forall\beta\neq 0\forall\alpha$ *(1.6), а через* $C^{\infty}_{b,0}(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)$ — *класс таких функций из* $C^{\infty}_b|\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)$, *что* $\lim\limits_{\xi\to\infty}\partial^{\beta}_x\partial^{\alpha}_{\xi}a(x,\xi)=0$ *равномерно по* x, $\forall\alpha\neq 0$, $\forall\beta$ (1.7). *Положим*

$$C^{\infty}_{0,0}(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)=C^{\infty}_{0,b}(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)\cap C_{b,0}(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n).$$

Используя формулы композиции п. д. о., нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 1.5. 1) *Операторы класса* $LC^{\infty}_{0,b}$, $LC^{\infty}_{b,0}$ *образуют двухсторонний идеал в алгебре* LC^{∞}_b.

2) *Если* $Q_1\in LC^{\infty}_{0,b}$, $Q_2\in LC^{\infty}_{b,0}$, то Q_1Q_2, $Q_2Q_1\in LC^{\infty}_{0,0}\subset\boldsymbol{K}(L_2)$*.

2. *Операторы с разрывными символами.* 1. Через $\overset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^n$ будем обозначать компактификацию $\boldsymbol{R}^n$ «сферой» бесконечно удаленных точек, а через $\boldsymbol{R}^n_B$ — компактификацию Бора $\boldsymbol{R}^n$, т. е. пространство максимальных идеалов алгебры равномерных почти периодических функций на $\boldsymbol{R}^n$.

Пусть $\Theta\in S^{n-1}$, $R^n_{\theta}=\{x\in\boldsymbol{R}^n:(x,\Theta)>0\}$, $P_{\theta}:L_2(\boldsymbol{R}^n)\to L_2(\boldsymbol{R}^n_{\theta})$ — ортогональный проектор.

Определение 2.1. *Обозначим через* NC^* — *алгебру ограниченных в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *операторов, полученную замыканием в* $\boldsymbol{L}(L_2)$ *множества операторов вида*

$$A=\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M}A_{ij},\tag{2.1}$$

где A_{ij} *либо проектор* P_{θ}, *либо п. д. о. с символом вида*

$$a(x,\xi)=a_1(x,\xi)+a_2(x,\xi);\tag{2.2}$$

$a_1(x,\xi)\in C^{\infty}_b(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)\cap C(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n_B)$, $a_2(x,\xi)\in C^{\infty}_b(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)\cap C(\boldsymbol{R}^n\times\overset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^n)$.

Через A_1 обозначим подалгебру A, порожденную операторами вида (2.1), где A_{ij} есть либо п. д. о. с символом из $C^{\infty}_b(\boldsymbol{R}^n\times\times\boldsymbol{R}^n)\cap C(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n_B)$, либо проектор P_{θ}. Подалгебру, порожденную п. д. о. с символами вида (2.2), обозначим через $\overset{\circ}{A}$, а подалгебру $\overset{\circ}{A}$, порожденнную п. д. о. с символами класса $C^{\infty}_b(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)\cap C(\tilde{\boldsymbol{R}}^n\times\times\boldsymbol{R}^n_{\beta})$, — через $\overset{\circ}{A}_1$.

Определение 2.2. *Через* $I_{0,.}$ $(I_{0,.})$ *обозначим* C^*-*алгебру, порожденную операторами вида* (2.1), *где* A_{ij} *либо принадлежит* LC^{∞}_b, *либо проектор* P_{θ}, *причем* $\forall i\exists j$ *такое, что* $A_{ij}\in LC^{\infty}_{0,b}(LC^{\infty}_{b,0})$.

Предложение 2.1. $I_{0,.}\cap I_{0,.}\supset\boldsymbol{K}(L_2)$.

Доказательство. Достаточно показать, что оператор

$$B=A_1P_{\theta_1}A_2P_{\theta_2}\ \ldots\ P_{\theta_m}A_m$$

---

* Если H — гильбертово пространство, то $\mathbf{L}(H)$ — C^* — алгебра всех ограниченных операторов, действующих в H; $K(H)$ — двусторонний идеал компактных операторов.

компактен, если $A_1 \in LC_{0,b}$, $A_m \in LC_{b,0}$, $A_j \in LC_b^\infty$, $j \neq 1, m$. Так как $A_1 \in LC_{0,b}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $R_0 > 0$ и $a(x, D) \in LC_{0,b}^\infty$ с символом $a(x, \xi) = 0$ при $|x| > R_0$ такие, что

$$\| A_1 - a(x, p) \| < \varepsilon.$$

Пусть $\chi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $\chi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и равна нулю при $|x| \geqslant 2$, $\chi_R(x) = \chi\left(\frac{x}{R}\right)$, тогда $a(x, D) = \chi_R(x) a(x, D)$ при $R > R_0$.

С точностью до операторов, норма которых стремится к нулю при $R \to \infty$, прокоммутируем оператор умножения χ_R с операторами A_j, P_{θ_j}, что можно сделать ввиду предложения 1.3. Рассмотрим теперь оператор $\chi_R A_m$. Он принадлежит $LC_{0,0}$ в силу предложения 1.5 и, следовательно, компактен. Предложение доказано.

Пусть $A \in \boldsymbol{L}(L_2)$, положим

$$||| A |||_{\cdot, 0} = \inf_T \| A + T \|,$$

где inf берется по всем операторам из C^*-алгебры $I_{\cdot, 0}$. Аналогично определяется $||| A |||_{0, \cdot}$.

Предложение 2.2. *Пусть* $A \in \boldsymbol{A}_1$, *тогда*

$$||| A |||_{\cdot, 0} = \| A \|.$$

Это предложение достаточно доказать только для операторов вида (2.1). Разобьем доказательство на пункты.

А) Пусть e_h — унитарный оператор умножения на функцию $e^{i(x, h)}$, $A = a(x, D) \in LC_{b,0}^\infty$. Покажем, что оператор-функция $e_{-h} A l_h$ при $h \to \infty$ сильно стремится к нулю. Действительно, пусть $u(x) \in S(\boldsymbol{R}^n)$ и такова, что $\hat{u}(\xi) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})^n$, $\chi(\xi) \in C_0^\infty(R^n)$ и $\chi(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{u}(\xi)$, тогда

$$\begin{aligned} \| e_{-h} a(x, D) e_h u \| &= \| a(x, D + h) \chi(D) u \| \leqslant \\ &\leqslant C \left(\sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant k} \sup | \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi + h) \chi(\xi) | \right) \| u \|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Так как $a(x, \xi) \in C_{b,0}^\infty$, $\chi(\xi) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})^n$, то при $h \to \infty$ правая часть в неравенстве (2.3) стремится к нулю.

Б) Предположим, что $a(x, \xi) \in C_b^\infty(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n) \cap C(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}_b^n)$. Из предложения 1.1 следует оценка

$$\begin{aligned} \| e_{-h} a(x, D) e_h - a(x, D) \| \leqslant C \sum_{|\beta|, |\alpha| \leqslant k} \sup \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (a(x, \xi + h) - \\ - a(x, \xi)) |. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Так как $\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)$ — почти периодические функции по ξ $\forall\alpha\forall\beta$, то $\forall\varepsilon > 0$ $\forall R > 0$ можно найти такой общий ε-почти период h для $a(x, \xi)$ и ее производных до порядка k, что: $|h| > R$ и правая часть в (2.4) будет меньше, чем ε.

В) Докажем теперь неравенство $|||A|||_{\cdot,0} \geqslant \|A\|$, противоположное неравенство очевидно.

Пусть $A \in \boldsymbol{A}_1$, $T \in I_{\cdot,0}$. Из пункта *А* следует, что и для любой функции $u \in L_2$, $\|u\| = 1$ существует такое $R > 0$, что при $|h| > R$

$$\|A + T\| = \|e_h(A + T)e_{-h}\| \geqslant \|e_h A e_{-h} u\| - \varepsilon.$$

Из пункта *Б* следует, что существует такой вектор h ($|h| > R$), что

$$\|e_h A e_{-h} u\| \geqslant \|Au\| - \varepsilon$$

для любой функции $u \in L_2$.

Выберем такую функцию $u \in L_2$, чтобы $\|u\| = 1$ и $\|Au\| \geqslant \|A\| - \varepsilon$ В результате получим, что $\forall T \in I_{\cdot,0}$ и $\forall \varepsilon > 0$

$$\|A + T\| \geqslant \|A\| - 3\varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство $|||A|||_{\cdot,0} \geqslant \|A\|$.

2. Пусть $A \subset \boldsymbol{A}$ и имеет вид (2.1), тогда положим

$$\pi(A) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} \tilde{\pi}(A_i), \tag{2.5}$$

где $\tilde{\pi}(P_\theta) = P_\theta$, и для оператора вида (2.2) $\pi(a(x, D)) = a$, (x, D).

Из предложения 2.2 и предложений 1.2, 1.5 следует

Предложение 2.3. *Отображение* π продолжается до эпиморфизма C^*-алгебры $\boldsymbol{A}$ на C^*-алгебру $\boldsymbol{A}_1$. *Ядром этого эпиморфизма является* $\boldsymbol{A} \cap I_{\cdot,0}$, *сужение* π *на* $\boldsymbol{A}_1$ *есть единичный оператор.*

Замечание 2.1. Так как $\boldsymbol{K}(L_2) \subset I_{\cdot,0}$, то алгебра не содержит компактных операторов.

Замечание 2.2. Если оператор $A \in \boldsymbol{A}_1$ фредгольмов, то он обратим. 3°. Пусть $A = a(x, D) \in LC_b^\infty$ и имеет символ вида (2.2), положим

$$\tilde{a}(\omega, \xi) = \lim_{t \to \infty} a(t\omega, \xi), \quad \omega \in S^{n-1}. \tag{2.6}$$

Таким образом, п. д. о. с символом вида (2.2) сопоставляется непрерывно зависящее от $\omega \in S^{n-1}$ семейство инвариантных относительно сдвига операторов $\tilde{a}(\omega, D)$ с символами из алгебры $C(\boldsymbol{R}_B^n) \dot{+} C_0(\boldsymbol{R}^n)$.

Если P_θ — проектор на полупространство $\boldsymbol{R}_\theta^n$, то положим

$$\sigma_{P_\theta}(\omega) = \begin{cases} I, & \omega \in S^{n-1} \cap \boldsymbol{R}_\theta^n; \\ 0, & \omega \in S^{n-1} \cap \boldsymbol{R}_{(-\theta)}^n; \\ P_\theta, & \omega \in S^{n-1} \cap \boldsymbol{R}_\theta^n \cap \boldsymbol{R}_{(-\theta)}^n \end{cases} \tag{2.7}$$

Пусть теперь оператор A имеет вид (2.1), где A_{ij} — либо проекторы P_θ, либо п. д. о. с символами $a(x, \xi) \in C_b^\infty(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n)$ вида (2.2). Положим

$$\sigma_A(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} \sigma_{A_{ij}}(\omega), \tag{2.8}$$

где для проектора $\sigma_{A_{ij}}(\omega)$ определено формулой (2.7), а для п. д. о.

$$\sigma_{A_{ij}}(\omega) = \tilde{a}_{ij}(\omega, D). \tag{2.9}$$

Предложение 2.3. *Для операторов, описанных выше, верно равенство*

$$|||A|||_{0,\cdot} = \sup_{\omega \in S^{n-1}} \|\sigma_A(\omega)\|. \tag{2.10}$$

Доказательство предложения 2.3. использует те же идеи, что использованы и при доказательстве предложения 2.2, только вместо оператора e_h необходимо использовать оператор сдвига

$$\tau_h((\tau_h u)(x) = u(x-h)).$$

Через $\boldsymbol{R}$ обозначим C^*-алгебру операторов, порожденную проекторами P_θ и инвариантными относительно сдвига операторами, символы которых принадлежат алгебре $C(\boldsymbol{R}_B^n) \dot{+} C_0(\boldsymbol{R}^n)$, $\overset{\circ}{R}$ — подалгебра R инвариантных относительно сдвига операторов.

Очевидно, что если $A \in \overset{\circ}{\boldsymbol{A}}$, то $\sigma_A(\omega) \in \overset{\circ}{R}$ и

$$\|\sigma_A(\omega)\| = \sup_\xi \|\hat{\sigma}_A(\omega, \xi)\|,$$

где $\hat{\sigma}_A(\omega, \xi)$ есть символ инвариантного относительно сдвига оператора $\sigma_A(\omega)$.

Важную роль играет следующее предложение, вытекающее из предложения 2.3.

Предложение 2.4. *Отображение σ есть эпиморфизм $\boldsymbol{C}^*$-алгебр* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}(S^{n-1}, R)$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.1. *Оператор $A \in \boldsymbol{A}$ фредгольмов в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, тогда и только тогда, когда*

1) *его разностная часть $\pi(A)$ есть обратимый оператор в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$;*

2) $\forall \omega \in S^{n-1}$ *оператор $\sigma_A(\omega)$ обратим в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$.*

Доказательство. Необходимость условия *1*. Если A фредгольмов, то его регуляризатор $R \in \boldsymbol{A}$ и

$$RA = I + T_1, \quad AR = I + T_2, \quad T_j \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{L}_2). \tag{2.11}$$

Ввиду того, что $I_{\cdot,0} \supset K(L_2)$ и отображение π-морфизм, получаем

$$\pi(R)\pi(A) = I, \quad \pi(A)\pi(R) = I,$$

т. е. оператор $\pi(A)$ обратим.

Аналогичным образом доказывается обратимость оператора $\sigma_A(\omega)\ \forall\omega \in S^{n-1}$.

Достаточность. Если выполнено условие *1*, то существует такой оператор $B \in \boldsymbol{A}_1$, что

$$B\pi(A) = \pi(A)B = I. \tag{2.12}$$

В силу предложения 2.3 существует такой оператор $R' \in \boldsymbol{A}$, $B = \pi(R')$ и

$$R'A = I + T_1', \quad AR' = I + T_2', \tag{2.13}$$

где $T_j' \in J_{\cdot,0}$.

Точно так же из условия *2* и предложения 2.4 следует, что существует такой оператор $R'' \in \boldsymbol{A}$, что

$$R''A = I + T_1'', \quad AR'' = I + T_2''. \tag{2.14}$$

Положим $R = R' + R'' - R'AR''$, тогда

$$RA - I = (I - R'A)(R''A - I) - T_1'T_1'',$$
$$AR - I = (I - AR')(AR'' - I) = -T_2'T_2''.$$

Операторы $T_1'T_1''$, $T_2'T_2''$ в силу предложения 2.1 компактны, следовательно, R — регуляризатор оператора A и A — фредгольмов оператор в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$. Нетрудно видеть, что построенный регуляризатор лежит в алгебре $\boldsymbol{A}$.

3. *О фредгольмовости интегрально-разностных операторов в полупространстве и четверти плоскости.* 1°. Применим общую теорему 2.1 к исследованию фредгольмовости оператора A вида

$$A = A_+P_+ + A_-P_-, \tag{3.1}$$

где $A_\pm \in \boldsymbol{A}$

Теорема 3.1. *Оператор A вида (3.1) фредгольмов в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ тогда и только тогда, когда*

1) *его разностная часть оператор $\pi(A)$ обратим в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$;*

2) $\inf\limits_{\xi} |\hat\sigma_{A_\pm}(\omega, \xi)| > 0$, $\forall\omega \in S^{n-1} \cap R^n_\pm$.

Замечание 3.1. Если в (3.1) операторы $A_\pm$ имеют вид (1), то

$$(\pi(A)u)(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j^+(x)u + (x - h_j^+) + a_j^-(x)u - (x - h_j^-), x \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$u + x = \begin{cases} u(x), & x_n > 0 \\ 0, & x_n \leqslant 0 \end{cases}, \quad u - (x) = \begin{cases} u(x), & x_n < 0, \\ 0, & x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Функции $\hat\sigma_{A_\pm}(\omega, \xi)$ имеют вид (3).

Замечание 3.2. В размерности $n = 1$ теорема 3.1 доказана И. Ц. Гохбертом и И. А. Фельдманом [3, с. 217—253].

Прежде, чем доказывать теорему 3.1, рассмотрим операторы вида (3.1) при условии, что $A_\pm$ инвариантные относительно сдвига операторы из алгебры R°. Применяя преобразование Фурье по $x' \in R^{n-1}$, сведем нашу задачу к одномерной, зависящей от параметра $\xi' \in R^{n-1}$. Воспользовавшись результатами монографии [3], получаем, что в этом случае оператор (3.1) обратим тогда и только тогда, когда

$$1) \inf |\hat{\sigma}_{A_\pm}(\xi)| > 0 \tag{3.3}$$

(а следовательно, $\inf\limits_{\xi} |\sigma_{\pi(A_\pm)}(\xi)| > 0$);

$$2) \lim_{T\to\infty} [\arg \hat{\sigma}_{A_t}(\xi', \xi_n)\, \hat{\sigma}^{-1}_{\pi(A)}(\xi'\ \xi_n)]^{T}_{\xi_n=-T} = 0; \tag{3.4}$$

$$3) \left[\arg \frac{\hat{\sigma}_{A_+}(\xi', \xi_n)\, \hat{\sigma}^{-1}_{\pi(A_+)}(\xi', \xi_n)}{\hat{\sigma}_{A_-}(\xi', \xi_n)\, \hat{\sigma}^{-1}_{\pi(A_-)}(\xi', \xi_n)}\right]_{\xi_n=-\infty} = 0. \tag{3.5}$$

Отметим, что при $n > 1$ фундаментальная группа $\boldsymbol{R}^n \cup \infty$ тривиальна и, следовательно, условие (3,5) выполняется автоматически.

Так как равносильность условий *1* теорем 2.1 и 3.1 очевидна, то остановимся на доказательстве равносильности условий 2 этих теорем.

Заметим, что

$$\sigma_A(\omega) = \sigma_{A_\pm}(\omega), \quad \omega \in R^{+}_{\pm} \cap S^{n-1} \tag{3.6}$$

и

$$\sigma_A(\omega) = \sigma_{A_+}(\omega) P_+ + \sigma_{A_-}(\omega) P_-, \quad \omega \in \boldsymbol{R}^{n-1}_{x'} \cap S^{n-1}, \tag{3.7}$$

где $\sigma_{A_\pm}(\omega) \in \overset{\circ}{R}$.

Обратимость оператора (3.6) равносильна условию *2* для $\omega \in \boldsymbol{R}^n_\pm \cap S^{n-1}$. Обратимость оператора (3.7) равносильна условию *2* для $\omega \in \boldsymbol{R}^{n-1}_{x'} \cap S^{n-1}$, $n > 1$ ввиду того, что условие (3.4) выполняется автоматически, если выполнено условие *1* теоремы 3.1.

В качестве следствия сформулируем эффективные необходимые условия обратимости разностного оператора вида (3.1).

Следствие 3.1. *Пусть в операторе (3.1) коэффициенты $A_\pm \in \boldsymbol{A}_1$, тогда, если A обратим, то*

$$1) \inf_{\xi} |\sigma_{A_\pm}(\omega, \xi)| > 0, \quad \omega \in S^{n-1} \cap \overline{R}^n_\pm;$$

$$2) \lim_{T\to\infty} \left[\arg \frac{\hat{\sigma}_{A_+}(\omega, \xi', \xi_n)}{\hat{\sigma}_{A_-}(\omega, \xi', \xi_n)}\right]^{T}_{\xi_n=-T} = 0.$$

2°. Рассмотрим оператор

$$A = A_{++}P_{++} + A_{-+}P_{-+} + A_{--}P_{--} + A_{+-}P_{+-}, \tag{3.8}$$

где $A_{\pm\pm} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{A}}$.

Теорема 3.2. *Оператор (3.8) фредгольмов в* $L_2(\boldsymbol{R}^2)$ *тогда и только тогда, когда*

1) *оператор* $\pi(A)$ *обратим в* $L_2(\boldsymbol{R}^2)$;

2) $\inf_{\xi}|\sigma_{A_{\pm\pm}}(\omega, \xi)| > 0, \ \omega \in \overline{\boldsymbol{R}}_{\pm\pm} \cap S^1$.

Равносильность условий теорем 2.1 и 3.2 проверяется точно так же, как и выше. Следует только заметить, что

$$\sigma_A(\omega) = \sigma_{A_{\pm\pm}}(\omega), \quad \omega \in S^1\boldsymbol{R}_{\pm\pm},$$

и

$$\begin{aligned}
\sigma_A((1, 0)) &= \sigma_{A_{++}}((1, 0)) P_{(0, 1)} + \sigma_{A_{+-}}((1, 0)) P_{(0, 1)};\\
\sigma_A((0, 1)) &= \sigma_{A_{++}}((0,1)) P_{(1, 0)} + \sigma_{A_{-+}}((0, 1) P_{(-1, 0)};\\
\sigma_A((-1, 0)) &= \sigma_{A_{-+}}((-1, 0)) P_{(0, 1)} + \sigma_{A_{--}}((-1, 0)) P_{(0, -1)};\\
\sigma_A((0, -1)) &= \sigma_{A_{--}}((0, -1)) P_{(-1, 0)} + \sigma_{A_{+-}}((0, -1)) P_{(1, 0)}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Применяя условие 2 теоремы 3.2 к разностному оператору вида (3.8), получаем следующие эффективные необходимые условия обратимости разностного оператора.

Следствие 3.2. *Пусть в операторе* (3.8) $A_{\pm\pm} \in \mathring{A}_1$, *тогда, если A обратим, то*

1) $\inf_{\xi}|\hat{\sigma}_{A_{\pm\pm}}(\omega, \xi)| > 0, \quad \omega \in \overline{\boldsymbol{R}}_{\pm\pm} \cap S^1$;

2) а) $\lim_{T\to\infty} [\arg(\hat{\sigma}_{A_{++}}((1, 0), \ \xi_1, \xi_2) \hat{\sigma}^{-1}_{A_{+-}}((1, 0)), \ \xi_1, \xi_2))]^T_{\xi_2=-T} = 0$;

б) $\lim_{T\to\infty} [\arg(\hat{\sigma}_{A_{++}}((0, 1), \ \xi_1, \xi_2) \hat{\sigma}^{-1}_{A_{-+}}((0, 1), \ \xi_1, \xi_2))]^T_{\xi_1=-T} = 0$;

в) $\lim_{T\to\infty} [\arg\hat{\sigma}_{A_{-+}}((-1, 0), \ \xi_1 \xi_2) \hat{\sigma}^{-1}_{A_{--}}((-1, 0), \xi_1, \xi_2))]^T_{\xi_2=-T} = 0$;

г) $\lim_{T\to\infty} [\arg\hat{\sigma}_{A_{--}}((0, -1), \ \xi_1, \xi_2) \hat{\sigma}^{-1}_{A_{+-}}((0, -1), \ \xi_1, \xi_2)]^T_{\xi_1=-T} = 0$.

Из теоремы 3.2 вытекает следствие о фредгольмовости теплицева оператора для четверти плоскости.

Следствие 3.3 *Оператор* $P_{++}AP_{++}$, *где* $A \in \mathring{A}$ — *фредгольмов оператор в* $L_2(\boldsymbol{R}^2_{++})$ *тогда и только тогда, когда*

1) $P_{++}\pi(A) P_{++}$ *обратим в* $L_2(\boldsymbol{R}^2)$;

2) $\inf_{\xi}|\hat{\sigma}_A(\omega, \xi)| > 0, \quad \omega \in S^1 \cap \overline{\boldsymbol{R}}_{++}$.

Необходимые условия обратимости оператора $P_{++}\pi(A)P_{++}$ состоят в том, что

$$1) \ \inf_{\xi} \hat{\sigma}_{\pi(A)}(\omega, \xi) | > 0, \quad \omega \in S^1 \cap \overline{\boldsymbol{R}}_{++}; \tag{3.10}$$

$$2) \ \lim_{T\to\infty} [\arg\hat{\sigma}_{\pi(A)}((0, 1), \ \xi_1, \xi_2)]^T_{\xi_2=-T} = \lim_{T\to\infty} [\arg\hat{\sigma}_{\pi(A)}((1,0), \xi_1, \xi_2]^T_{\xi_2=-T} = 0 \tag{3.11}$$

Приведем пример, когда необходимые условия обратимости являются достаточными.

Пусть оператор A имеет вид

$$(Au)(x)=\sum_{j=1}^{N} a_j u(x-h^{(j)}),\ x\in \boldsymbol{R}_{++},\ u(x)\in L_2(R_{++}),\ a_0\in C.$$

Векторы $h^{(j)}$ таковы, что либо все $h_1^{(j)}\geqslant 0$, либо все $h_2^{(j)}\leqslant 0$. В достаточности условий (3.10), (3.11) можно убедиться методом факторизации, аналогично случаю $n=1$ [3].

Замечание 3.4 Если оператор A в $P_{++}AP_{++}$ принадлежит коммутативной банаховой алгебре, порожденной сдвигами на целочисленные векторы, то вопрос об обратимости разностных операторов сводится к вопросу обратимости дискретных операторов, свертки в четверти плоскости (см. работы [7—10]).

3°. С помощью развитой в работе техники можно провести исследование и в матричном случае. Формулировки теорем 3.1, 3.2 и их следствий меняются очевидным образом. В условии 2) требование невырожденности функции заменяется требованием невырожденности определителя матрицы-функции и при $n>1$ добавляется требование равенства нулю частных индексов матрицы-функции по соответствующему переменному.

Список литературы: 1. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на R^n и в полупространстве.— Докл. АН СССР, 1978, **243**, № 5, с. 1134—1137. 2. *Пилиди В. С.* О многомерных бисингулярных операторах.— Докл. АН СССР, 1971, **201**, № 4, с. 787—789. 3. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.— М.: Наука, 1971.— 120 с. 4. *Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах.— Мат. сб., 1967, **74**, № 2, с. 298—313. 5. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.— М.: Наука, 1978.— 90 с. 6. *Рабинович В. С.* О нетеровости псевдодифференциальных операторов с символами класса $S^m_{\rho,\delta}$ $(0\leqslant\rho=\delta<1)$.— Мат. заметки, 1980, **27**, № 3, с. 457—467. 7. *Малышев В. А.* О решении дискретного уравнения Винера—Хопфа в четверти плоскости.—Докл. АН СССР, 1969, **187**, № 6, с. 1243—1246. 8. *Donglas R. G.* On the invertibility of a class of Toeplitz operators on the quarter-plane, Indiana Univ. Math. J., 1972, **21**, p. 1031—1035. 9. *Osher S.* On certain Toeplitz operator in two variables. Racific J. Math.. 1970, **34**, p. 123—129. 10. *Strang G.* Toeplitz operators in a quarter-plane.— Bull. Amer. Math. Soc., 1970, **76**, p. 1303—1307.

Поступила в редколлегию 04.10.82.