ОБ УРАВНЕНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С БЫСТРОПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. Я. Любарский

1. Предметом настоящей статьи является задача Коши для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, \tau) u, \quad \tau = \nu t \tag{1.1}$$

$$Au(x, t) \equiv a_1 u'(0, t) + a_2 u(0, t) = 0,$$
$$Bu(x, t) \equiv b_1 u'(1, t) + b_2 u(1, t) = 0,$$
$$\underset{t \to 0}{\text{l.i.m.}}\, u(x, t) = \psi(x)$$

в полуполосе Π $(t > 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1)$. Числа a_1, a_2, b_1 и b_2 вещественны, причем $a_1^2 + a_2^2 > 0$ и $b_1^2 + b_2^2 > 0$, $\psi(x)$—произвольная квадратично интегрируемая функция, ν — положительный параметр. Относительно функции $q(x, \tau)$ предполагается следующее. Она вещественна и периодична с периодом 2π, разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$q(x, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k(x) e^{ik\tau}$$

с непрерывными коэффициентами и имеет квадратично интегрируемую производную по t. Кроме того, предполагается существование столь малого положительного числа σ такого, что ряд

$$\| q \|_\sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^\sigma \max |q_k(x)| + \max |q_0(x)| \tag{1.2}$$

сходится.

Нас будут интересовать те свойства задачи (1.1), которыми она обладает при достаточно больших значениях параметра ν.

2. В этом пункте формулируются полученные результаты.

Условимся называть решением Флоке задачи (1.1) всякую функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую первым трем соотношениям (1.1) и представимую в виде

$$u(x, t) = e^{\gamma t} v(x, t),$$

где $v(x, t)$ — периодическая функция t с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\nu}$.

Обозначим через Λ_μ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$ совокупность всех периодических функций $y(x, t) = y(x, t+T)$, коэффициенты Фурье которых непрерывны и удовлетворяют условию: ряд

$$\|y\|_\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^\mu \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |y_k(x)| + \max |y_0(x)| \tag{2.1}$$

сходится. Если принять $\|y\|_\mu$ за норму функции $y(x, t)$, то Λ_μ превращается в банахово пространство.

Теорема 2.1. *Если ν больше некоторого числа $\nu_m(\|q\|_0)$, зависящего только от величины $\|q\|_0$,*

$$\nu > \nu_m(\|q\|_0), \tag{2.2}$$

то задача (1.1) имеет не менее m решений Флоке

$$u_1(x, t),\ u_2(x, t),\ \ldots,\ u_m(x, t),$$

принадлежащих Λ_1^0[1].

Обозначим через L оператор

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q_0(x), \tag{2.3}$$

рассматриваемый на функциях, удовлетворяющих граничным условиям $A\varphi = 0$, $B\varphi = 0$. Пусть

$$\varphi_k(x) \text{ и } \lambda_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

полный набор собственных функций и собственных чисел оператора L, причем $\lambda_{k+1} < \lambda_k$. Собственные функции $\varphi_k(x)$ имеют в $L_2(0,1)$ норму, равную единице, и равностепенно ограничены

$$\int_0^1 \varphi_k^2(x)\,dx = 1, \ \max|\varphi_k(x)| < \theta \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Теорема 2.2. *Если $\nu > \nu_m(\|q\|_0)$ и $\lambda_{m+1} < -2Q_1$, то решение $u(x, t)$ задачи (1.1) может быть представлено в виде*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(x, t) + w(x, t); \tag{2.5}$$

здесь c_k $(k = 1, 2, \ldots m)$ — некоторые коэффициенты, определяемые ниже, а $w(x, t)$ — функция, которую можно оценить следующим образом

$$\left|w(x, t) - \sum_{k=m+1}^{\infty} h_k e^{\lambda_k t} \varphi_k(x)\right| < 2\theta\|h\| \sqrt{1 + 2(\alpha - \lambda_{m+1}) \sum_{k=m+2}^{\infty} (\lambda_{m+1} - \lambda_k)^{-1}} \times$$
$$\times e^{\alpha t} F_m\left(Q_1 \sqrt{\frac{2t}{\alpha - \lambda_{m+1}}}\right); \tag{2.6}$$

h_k — коэффициенты Фурье функции

$$h(x) = \psi(x) - \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(x, 0),$$

α — произвольное число из интервала $\lambda_{m+1} < \alpha < 0$, такое, что $|\alpha(\alpha - \lambda_{m+1})| > Q_1^2$,

$$q_1(x, \tau) \equiv q(x, \tau) - q_0(x), \ Q_1 = \max|q_1(x, \tau)|, \tag{2.7}$$

---

[1] Λ_1^0 — совокупность всех функций вида $e^{\gamma t} v(x, t)$ $(v(x, t) \in \Lambda_1)$.

$\|h\|$ *означает норму функции* $h(x)$ в L_2 (0,1) *и, наконец,*

$$F_m(z) \equiv \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}. \tag{2.8}$$

Функция $w(x, t)$ *имеет непрерывную производную по* t *в полуполосе* П.

Заметим, что $F_m(z)$ является целой функцией второго порядка типа $\frac{1}{2}$.

Поэтому функция $w(x, t)$ не превышает некоторой функции t экспоненциального типа с показателем

$$\alpha + \frac{Q_1^2}{\alpha - \lambda_{m+1}}.$$

Обозначим через $z_k(x, t) \in \Lambda_1$ $(k = 1, \ldots, m)$ решения Флоке задачи (1.1), в которой функция $q(x, \tau)$ заменена функцией $q(x, -\tau)$. Функции $z_k(x, t)$ можно так перенумеровать и нормировать, чтобы

$$\int_0^1 u_i(x, t)\, z_k(x, -t)\, dx = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.9}$$

Теорема 2.3. *Коэффициенты* $c_k (k = 1, 2, \ldots, m)$, *фигурирующие в соотношении (2.5), можно вычислить по формуле*

$$c_k = \int_0^1 \psi(x)\, z_k(x, 0)\, dx. \tag{2.10}$$

Следующие две теоремы позволяют найти решения Флоке $u_k(x, t)$ и функцию $w(x, t)$.

Теорема 2.4. *Представим решение Флоке* $u_k(x, t)$ $(k = 1, 2, \ldots m)$ *в виде*

$$u_k(x, t) = e^{\gamma t} v(x, t), \quad v(x, t + T) = v(x, t). \tag{2.11}$$

Функция $v(x, t)$ *является пределом по норме* Λ_1 *последовательности* $v_n(x, t)$, *определяемой следующим образом:*

1) $v_0(x, t) \equiv \varphi_k(x)$;

2) *если функция* $v_n(x, t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *уже определена, то функция* $v_{n+1}(x, t)$ *находится как решение из* Λ_1 *задачи*

$$\frac{\partial v_{n+1}}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_{n+1}}{\partial x^2} + [q_0(x) - \lambda_k]\, v_{n+1} + [q_1(x, \tau) - \gamma_n + \lambda_k]\, v_n, \tag{2.12}$$

$$Av_{n+1} = 0, \ Bv_{n+1} = 0, \ A^+ v_{n+1,0} \equiv a_1 v_{n+1,0}(0) - a_2 v'_{n+1,0}(0) = A^+ \varphi_k(x),$$

где

$$\gamma_n = \lambda_k + \frac{\int_0^1 \varphi_k(x)\, (q_1(x, \tau)\, v_n(x, t))_0\, dx}{\int_0^1 \varphi_k(x)\, v_{n0}(x)\, dx}. \tag{2.13}$$

Все определяемые таким способом числа γ_n *конечны, а последовательность этих чисел стремится к* γ.

Скорость аппроксимации функции $v(x, t)$ функциями $v_n(x, t)$ характеризуют следующие оценки:

$$|(v_{n+1}(x, t) - v_n(x, t))_0| < N_0 \left(\frac{\alpha_0}{\nu}\right)^{1+\left[\frac{n}{2}\right]},$$

$$\|(v_{n+1}(x, t) - v_n(x, t))_1\|_0 < N_1 \left(\frac{\alpha_0}{\nu}\right)^{1+\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \tag{2.14}$$

где N_0, N_1, α_0 и α_1 — некоторые постоянные, не зависящие от ν.

Индексы нуль и единица в равенствах (2.12), (2.13) и (2.14) имеют тот же смысл, что и в определении (2.7).

Теорема 2.5. *Функция $w(x, t)$ равна*

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t); \tag{2.15}$$

стоящий в правой части ряд сходится в Π равномерно, а функции $w_n(x, t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ определяются следующим образом:

$$w_n(x, t) = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(n)}(t)\, \varphi_k(x) + \zeta_n(x, t) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2.16}$$

$$\zeta_0(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} h_k e^{\lambda_k t} \varphi_k(x),$$

$$\zeta_n(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k(x) \int_0^t e^{\lambda_k (t-s)} f_{n-1, k}(s)\, ds \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.17}$$

$f_{n, k}(s)$ — коэффициенты Фурье функции $q_1(x, \nu s)\, w_n(x, s)$ относительно функций $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2 \ldots)$. Коэффициенты $c_k^{(n)}(t)$ определяются из условий

$$\int_0^1 w_n(x, t)\, z_k(x, -t)\, dx = 0 \quad t \geqslant 0, \; k = 1, 2, \ldots, m; \; n = 0, 1, \ldots). \tag{2.18}$$

Члены этого ряда можно оценить следующим образом:

$$|w_n(x, t)| < 2\theta \|h\| \sqrt{1 + 2(\alpha - \lambda_{m+1}) \sum_{k=m+2}^{\infty} (\lambda_{m+1} - \lambda_k)^{-1}} \times$$

$$\times \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{n!}} \left[\frac{2Q_1^2 t}{\alpha - \lambda_{m+1}}\right]^{\frac{n}{2}}, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.18'}$$

где α — любое число из интервала $(\lambda_{m+1} < \alpha \leqslant 0)$.

Функция $w(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t в Π, ее производная может быть получена почленным дифференцированием ряда (2.15). Имеет место оценка

$$|\dot{w}_n(x, t)| \leqslant \sigma_n(t_0) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{4} n} \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{3}}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $t_0 > 0$ произвольное положительное число, а $\sigma_n(t_0)$ набор функций таких, что $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sigma_n(t_0)} = 0$.

3. Отметим некоторые свойства пространства Λ_μ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$.

Лемма 3.1. *Всякая функция* $y(x, t) \in \Lambda_\mu$ *непрерывна и равна своему ряду Фурье. Из сходимости последовательности в* Λ_μ *вытекает равномерная сходимость. Всякая функция* $y(x, t) \in \Lambda_1$ *имеет непрерывную производную по* t, *которая равна*

$$\dot{y}(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(x)\, ik\nu e^{ik\nu t},$$

причем ряд в правой части сходится в метрике Λ_0. *Из сходимости последовательности* $y_n(x, t)$ *в метрике* Λ_1 *к некоторой функции* $y(x, t)$ *вытекает сходимость производных* $\dot{y}_n(x, t)$ *к* $\dot{y}(x, t)$ *в метрике* Λ_0 *и, следовательно, в равномерной метрике.*

Лемма 3.2. *Если функция* $\frac{\partial}{\partial x} z(x, t)$ *принадлежит* Λ_0, *то функция* $z(x, t) - z(0, t)$ *также принадлежит* Λ_0.

Если

$$z(x, t) - z(0, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} s_l(x)\, e^{il\nu t},$$

то

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} s_l'(x)\, e^{il\nu t}.$$

Лемма 3.3. *Если* $y(x, t) \in \Lambda_\mu$ *и* $z(x, t) \in \Lambda_\mu$ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$, *то* $y(x, t)\, z(x, t) \in \Lambda_\mu$, *причем*

$$\| y(x, t)\, z(x, t) \|_\mu \leqslant 3 \| y(x, t) \|_\mu \| z(x, t) \|_\mu .$$

Если функции $y(x, t)$ *и* $z(x, t)$ *рассматривать как элементы* Λ_0, *то справедливы неравенства*

$$(yz)_0 \leqslant y_0 z_0 + y_1 z_1, \quad (yz)_1 \leqslant y_1 z + y_0 z_1. \tag{3.1}$$

Здесь мы воспользовались обозначением

$$\| y(x, t) \|_0 \equiv y, \quad \| y_0(x, t) \|_0 \equiv y_0, \quad \| y_1(x, t) \|_0 = y_1, \tag{3.2}$$

которым будем пользоваться и в дальнейшем.

Обозначим через $B_m (0 \leqslant m \leqslant 1)$ множество, элементами которого являются последовательности ядер $g(x, s) = \{g_l(x, s)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ $(l \neq 0)$, обладающие следующими свойствами:

а) каждое ядро $g_l(x, s)$ непрерывно во всех точках квадрата $0 \leqslant x$, $s \leqslant 1$, кроме его диагонали $x = s$, где возможен разрыв первого рода;

б)

$$\| g \|_m \equiv \sup_x \int_0^1 \sup_l | l |^m | g_l(x, s) |\, ds < \infty. \tag{3.3}$$

Назовем нормой последовательности ядер $g_l(x, s)$ величину (3.3). При $m = 0$ будем пользоваться более простым обозначением $\| g \|_0 \equiv g$.

Лемма 3.4. *Пусть* $\{g_l(x, s)\} \in B_m$ *и* $z(x, t) \in \Lambda_\mu$ $(m + \mu \leqslant 1)$.

Положим

$$y_l(x) = \int_0^1 g_l(x, s)\, z_l(s)\, ds, \tag{3.4}$$

$$y(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_l(x)\, e^{il\nu t}.$$

Функция $y(x, t)$ принадлежит $\Lambda_{m+\mu}$, причем

$$\| y_1(x, t) \|_{m+\mu} \leqslant \| g \|_m \| z \|_\mu, \tag{3.5}$$

в частности,

$$y_1 < g z_1. \tag{3.6}$$

Обозначим через $g_l(x, s)$ $(l = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ функцию Грина оператора

$$L_l = \frac{d^2}{dx^2} + q_0(x) - (\lambda_k + il\nu), \tag{3.7}$$

выделенную граничными условиями $Ag_l = 0$, $Bg_l = 0$.

Теорема 3.1. *Последовательность функций Грина $g_l(x, s)$ принадлежит любому из множеств $B_m (0 \leqslant m < 1)$, если параметр ν достаточно велик.*

Доказательство. В частном случае, когда $q_0(x) \equiv 0$, в справедливости теоремы можно убедиться простой проверкой. При этом оказывается, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \| g^0(x, s) \|_m = 0, \ (0 \leqslant m < 1) \text{ и } g^0 < \frac{G^0}{\nu} \tag{3.8}$$

($g_l^0(x, s)$ — функция Грина оператора (3.7) при $q_0(x) \equiv 0$).

Ядра $g_l(x, s)$ и $g_l^0(x, s)$ связаны друг с другом известным соотношением

$$g_l(x, s) = g_l^0(x, s) - \int_0^1 g_l^0(x, \xi) q_0(\xi) g_l(\xi, s) d\xi.$$

Из этого соотношения вытекает оценка

$$| g_l(x, s) | \leqslant | g_l^0(x, s) | + q_0 \int_0^1 | g_l^0(x, \xi) | | g_l(\xi, s) | d\xi.$$

Отсюда, после простых преобразований

$$\{1 - q_0 \| g^0 \|_0\} \sup_x \int_0^1 \sup_l | l |^m | g_l(x, s) | ds \leqslant \| g^0 \|_m.$$

При достаточно большом ν фигурная скобка больше половины, поэтому из последнего равенства вытекает утверждение теоремы (3.1). Кроме того, мы получаем соотношения

$$\lim_{\nu \to \infty} \| g(x, s) \|_m = 0, \ g < \frac{G}{\nu}, \tag{3.9}$$

где G — некоторый постоянный коэффициент.

4. **Теорема 4.1.** *Система рекуррентных соотношений (2.12) вместе с условием $v_0(x, t) \equiv \varphi_k(x)$ однозначно определяет в Λ_1 функцию $v_n(x, t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Последняя обладает следующими свойствами:*

а) $\sigma(v_n) \equiv \int_0^1 \varphi_k(x) v_{n.0}(x) dx > \frac{1}{2} \sigma(v_0);$ (4.1)

б) $v_n < 2\theta_k, \ \theta_k = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} | \varphi_k(x) |;$ (4.2)

в) $v_{n1} < \frac{4Gq_1\theta_k}{\nu};$ (4.3)

г) $| \gamma_n - \lambda_k | < \frac{M}{\nu}, \ M = 8Gq_1^2\theta_k^2\sigma^{-1}(v_0),$ (4.4)

если параметр ν достаточно велик.

Доказательство. Утверждение теоремы, очевидно, справедливо при $n=0$. Поэтому достаточно доказать теорему для функции $v_{n+1}(x, t)$, предполагая, что она справедлива для функции $v_n(x, t)$.

Начнем с вопроса о единственности. Предположим, что существует функция

$$v_{n+1}(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v_{n+1, l}(x) e^{il\nu t}, \tag{4.5}$$

принадлежащая Λ_1 и являющаяся решением задачи 2.12. Тогда $\dot{v}_{n+1}(x, t) \in \Lambda_0$ и $v''_{n+1}(x, t) \in \Lambda_0$. Согласно лемме 3.2 отсюда следует, что

$$v'_{n+1}(x, t) - v'_{n+1}(0, t) \in \Lambda_0,$$

$$v_{n+1}(x, t) - v_{n+1}(0, t) - xv'_{n+1}(0, t) \in \Lambda_0. \tag{4.6}$$

Так как $v_{n+1}(x, t) \in \Lambda_1$, то последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$v'_{n+1}(0, t) \in \Lambda_0.$$

Теперь из первого соотношения (4.6) заключаем, что

$$v'_{n+1}(x, t) \in \Lambda_0. \tag{4.7}$$

Опять, обращаясь к лемме 3.2, заключаем, что

$$v'_{n+1}(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v'_{n+1, l}(x) e^{il\nu t},$$

$$v''_{n+1}(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v''_{n+1, l}(x) e^{il\nu t}. \tag{4.8}$$

Подставляя эти равенства в (2.12), получим

$$\begin{gathered} v''_{n+1, l}(x) + [q_0(x) - \lambda_k - i\nu l]\, v_{n+1, l}(x) = f_{n, l}(x), \\ Av_{n+1, l}(x) = 0, \quad Bv_{n+1, l}(x) = 0, \\ A^+ v_{n+1, 0}(x) = A^+ \varphi_k(x) \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{gathered} \tag{4.9}$$

где $f_{n, l}(x)$ — коэффициенты Фурье функции

$$f_n(x, t) = [\gamma_n - \lambda_k - q_1(x, t)]\, v_n(x, t) \in \Lambda_\sigma. \tag{4.10}$$

Из (4.9) заключаем, что

$$v_{n+1, l}(x) = \int_0^1 g_l(x, s) f_{n, l}(s)\, ds \quad (l = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{4.11}$$

и

$$v_{n+1, 0}(x) = \varphi_k(x) + \int_0^x g_0(x, s) f_{n, 0}(s)\, ds. \tag{4.12}$$

Мы видим, что если в Λ_1 существует решение $v_{n+1}(x, t)$ задачи (2.12), то оно задается формулами (4.5), и (4.10) (4.11), (4.12) и, следовательно, единственно.

В связи с этим рассмотрим более подробно функцию $v_{n+1}(x, t)$, задаваемую формулами (4.5), (4.10) — (4.12), не предполагая, что $v_{n+1}(x, t) \in \Lambda_1$ и что $v_{n+1}(x, t)$ является решением задачи (2.12).

Из (4.10), условия (1.2) и леммы 3.3 следует, что $f_n(x, t) \in \Lambda_\sigma$.

Из (4.11) и леммы (3.4) следует, что $v_{n+1}(x, t) \in \Lambda_1$, поэтому $\dot{v}_{n+1}(x, t) \in \Lambda_0$. Из (4.9) следует, что $v''_{n+1}(x, t) \in \Lambda_0$. Следовательно, выражение
$\dot{v}_{n+1}(x, t) - v''_{n+1}(x, t) - [q_0(x) - \lambda_k] v_{n+1}(x, t) - [q_1(x, \tau) - \gamma_n + \lambda_k] v_n(x, t)$
принадлежит Λ_0. С другой стороны все коэффициенты Фурье этого выражения равны нулю. Это означает, что уравнение (2.12) удовлетворяется функцией $v_{n+1}(x, t)$.

Мы уже видели, что из $v''_{n+1}(x, t) \in \Lambda_0$ вытекают соотношения (4.7) и (4.8), поэтому функция $v_{n+1}(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (2.12) и, следовательно, действительно является решением задачи (2.12).

Из равенств (4.11), (4.12) и (4.10), лемм 3.3 и 3.4 и оценки (3.9) заключаем, что

$$v_{n+1, 1} \leqslant \frac{G}{\nu} f_{n, 1};\quad v_{n+1, 0} \leqslant \theta_k + g_0 f_{n, 0};$$

$$f_{n, 0} \leqslant |\gamma_n - \lambda_k| v_{n, 0} + q_1 v_{n, 1};\quad f_{n, 1} \leqslant q_1 v_n + |\gamma_n - \lambda_k| v_{n, 1}. \tag{4.13}$$

Кроме того, из (4.12) следует, что

$$|v_{n+1, 0}(x) - \varphi_k(x)| \leqslant g_0 f_{n, 0}.$$

Так как

$$\sigma(v_{n+1}) - \sigma(v_0) = \int_0^1 \varphi_k(x) [v_{n+1, 0}(x) - \varphi_k(x)]\, dx,$$

то

$$|\sigma(v_{n+1}) - \sigma(v_0)| \leqslant \theta_k g_0 f_{n, 0}.$$

Отсюда

$$\sigma(v_{n+1}) > \sigma(v_0) - \theta_k g_0 f_{n, 0}. \tag{4.14}$$

Наконец, из равенства (2.13) заключаем, что

$$|\gamma_n - \lambda_k| \leqslant \frac{2}{\sigma(v_0)} \theta_k q_1 v_{n, 1}. \tag{4.15}$$

Неравенства (4.13)—(4.15) позволяют показать, что вместе с функцией $v_n(x, t)$ соотношениям (4.1)—(4.4) удовлетворяет и функция $v_{n+1}(x, t)$, если выполнено условие

$$\nu > 4Gq_1 \max\left\{\frac{\theta_k}{\sigma(v_0)},\ q_1\left(1 + \frac{4g_0\theta_k^2}{\sigma(v_0)}\right),\ 2q_1 g\theta_k^2\left(1 + \frac{4\theta_k^2}{\sigma(v_0)}\right)\right\}.$$

Тем самым теорема 4.1 доказана полностью.

Следствие 4.1. *Функции $v_n(x, t)$ равностепенно ограничены в метрике Λ_1, а функции $f_n(x, t)$ равностепенно ограничены в метрике Λ_σ.*

В самом деле, из неравенства (4.2) следует, что функции $v_n(x, t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ равностепенно ограничены в метрике Λ_0. Из (4.4) вытекает ограниченность последовательности γ_n. Вспоминая определение (4.10) функций $f_n(x, t)$, заключаем с помощью леммы 3.3, что они равностепенно ограничены в Λ_0. Отсюда с помощью леммы 3.4 выводим ограниченность последовательности $v_n(x, t)$ в любой метрике Λ_m $(0 \leqslant m < 1)$ и, в частности, в метрике Λ_σ. Отсюда последовательно заключаем о равностепенной ограниченности функций $f_n(x, t)$ в метрике Λ_σ и функций $v_n(x, t)$ в метрике Λ_1.

Приведем теперь доказательство теоремы 2.4.

Введем следующие обозначения:

$$v_{n+1}(x, t) - v_n(x, t) = \Delta v_n(x, t), \quad \gamma_{n+1} - \gamma_n = \Delta\gamma_n,$$
$$f_{n+1}(x, t) - f_n(x, t) = \Delta f_n(x, t).$$

Из равенства $v_0(x, t) \equiv \varphi_k(x)$ следует согласно (2.13) и (4.10), что

$$\gamma_0 = \lambda_k, \quad f_0(x, t) = -q_1(x, \tau)\varphi_k(x) = f_{0,1}(x, t), \quad f_{0,0}(x, t) \equiv 0. \tag{4.16}$$

Имея это в виду, находим из (4.11) и (4.12)

$$\Delta v_{0,0} = 0, \quad \Delta v_{0,1} \leqslant \frac{G}{\nu} q_1\theta_k. \tag{4.17}$$

Далее, из (4.11) и (4.12) получаем

$$\Delta v_{n+1,0}(x) = \int_0^1 g_0(x, s)\,\Delta f_{n,0}(s)\,ds,$$

$$\Delta v_{n+1,l}(x) = \int_0^1 g_l(x, s)\,\Delta f_{n,l}(s)\,ds \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4.18}$$

Из определений (4.10) и (2.13) находим

$$\Delta f_n(x, t) = [\gamma_{n+1} - \lambda_k - q_1(x, \tau)]\,\Delta v_n(x, t) + v_n(x, t)\,\Delta\gamma_n, \tag{4.16'}$$

$$\sigma(v_n)\,\Delta\gamma_n + (\gamma_{n+1} - \lambda_k)\,\sigma(\Delta v_n) = \int_0^1 \varphi_k(x)\,(q_1(x, \tau)\,\Delta v_n(x, t))_0\,dx \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4.17'}$$

Из последних четырех соотношений вытекают следующие неравенства:

$$\Delta v_{n+1,0} < g_0\Delta f_{n,0}, \quad \Delta v_{n+1,1} < \frac{G}{\nu}\Delta f_{n,1},$$
$$\Delta f_{n,0} \leqslant |\gamma_{n+1} - \lambda_k|\,\Delta v_{n,0} + |\Delta\gamma_n|\,v_{n,0} + q_1\Delta v_{n,1},$$
$$\Delta f_{n,1} \leqslant |\gamma_{n+1} - \lambda_k|\,\Delta v_{n,1} + |\Delta\gamma_n|\,v_{n,1} + q_1\Delta v_n, \tag{4.18'}$$
$$|\Delta\gamma_n| \leqslant \frac{\theta_k}{\sigma(v_n)}\{|\gamma_{n+1} - \lambda_k|\,\Delta v_{n,0} + q_1\Delta v_{n,1}\}, \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Эти рекуррентные неравенства вместе с «начальными» неравенствами (4.17) позволяют методом индукции доказать справедливость следующих оценок:

$$\Delta v_{n,0} < N_0\left(\frac{\alpha_0}{\nu}\right)^{1+\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad \Delta v_{n,1} < N_1\left(\frac{\alpha_1}{\nu}\right)^{1+\left[\frac{n+1}{2}\right]} \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4.19}$$

при подходящем выборе постоянных N_0, N_1, α_0 и α_1 (эти постоянные не зависят от ν, если только параметр ν достаточно велик).

Неравенства (4.19) показывают, что последовательность функций $v_n(x, t)$ сходится к некоторой функции $v(x, t)$ по метрике Λ_0. Отсюда вытекает, что

$$\sigma(v_n) \to \sigma(v), \quad \gamma_n \to \lambda = \lambda_k + \int_0^1 \varphi_k(x)\cdot(q_1(x, \tau)\,v(x, t))_0\,dx. \tag{4.20}$$

Теперь видно, что функции $f_n(x, t)$ стремятся по метрике Λ_0 к функции

$$f(x, t) = (\gamma - \lambda_k - q_1(x, \tau))\,v(x, t) = \lim f_n(x, t), \tag{4.20'}$$

а это в свою очередь показывает, что последовательность $v_n(x, t)$ стремится к $v(x, t)$ в любой метрике Λ_m $(m < 1)$ и, в частности, в метрике Λ_σ.

Учитывая это обстоятельство, заключаем, что соотношение (4.20′) справедливо в метрике Λ_σ. Теперь видно, что

$$v_n(x, t) \to v(x, t) \quad (n \to \infty) \tag{4.21}$$

в метрике Λ_1. Отсюда следует, что

$$\dot{v}_n(x, t) \to \dot{v}(x, t) \quad (n \to \infty) \tag{4.22}$$

в метрике Λ_0.

Соотношения (2.12) эквивалентны интегральному уравнению

$$v_{n+1}(x, t) = \varphi_k(x) + \int_0^x g_0(x, s)\{\dot{v}_{n+1}(s, t) - [q_1(s, t) - \gamma_n + \lambda_k]\, v_n(s, t)\}\, ds.$$

В силу (4.20)—(4.22) левая часть этого равенства стремится к пределу в смысле метрики Λ_1, а правая — в смысле равномерной метрики: Приравнивая соответствующие пределы, получим

$$v(x, t) = \varphi_k(x) + \int_0^x g_0(x, s)\{\dot{v}(s, t) - [q_1(s, t) - \gamma + \lambda_k]\, v(s, t)\}\, ds.$$

Это означает, что функция $v(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + [q(x, \tau) - \gamma]\, v;$$

$$Av = 0, \quad Bv = 0, \ A^+ v = A^+ \varphi_k(x).$$

Отсюда следует, что функция $u(x, t) = e^{\gamma t} v(x, t)$ является искомым решением Флоке. Теорема 2.4 доказана. Вместе с тем доказана и теорема 2.1.

5. Назовем уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + q(x, -\tau)\, z, \quad \tau = \nu t \tag{5.1}$$

сопряженным уравнению (1.1).

Обозначим через P совокупность всех функций $y(x, t)$, которые удовлетворяют граничным условиям $Ay = 0$, $By = 0$ и имеют непрерывную производную по времени.

Лемма 5.1. *Если функция $u(x, t) \in P$ удовлетворяет уравнению (1.1), а функция $z(x, t) \in P$ — уравнению (5.1), то интеграл*

$$(u, z) \equiv \int_0^1 u(x, t)\, z(x, -t)\, dx \tag{5.2}$$

не зависит от t.

Если взять в качестве функций $u(x, t)$ и $z(x, t)$ решения Флоке

$$u(x, t) = e^{\gamma t} v(x, t), \quad z(x, t) = e^{\mu t} w(x, t)$$

уравнений (1.1) и (5.1) ($u \in P$; $z \in P$), то легко получить соотношение

$$(1 - e^{(\gamma - \mu)\, T}) \int_0^1 v(x, t)\, w(x, -t)\, dx = 0. \tag{5.3}$$

При достаточно большом значении параметра ν можно построить согласно теореме 2.4 m решений Флоке ($m = 1, 2 \ldots$) уравнений (1.1) и (5.1)

$$u_1(x, t),\ u_2(x, t),\ \ldots,\ u_m(x, t);$$
$$z_1(x, t),\ z_2(x, t),\ \ldots,\ z_m(x, t),$$

принадлежащих P. Так как при больших значениях ν функции $u_k(x, t)$ и $z_k(x, t)$ составляют весьма малый угол с одной и той же функцией $\varphi_k(x)$, то они не могут быть взаимно ортогональны

$$\delta_k \equiv \int_0^1 u_k(x, t)\, z_k(x, -t)\, dx \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.4}$$

Поэтому из (5.3) следует, что показатели роста γ и μ функций $u_k(x, t)$ и $z_k(x, t)$ равны друг другу и что

$$\int_0^1 u_k(x, t)\, z_l(x, -t)\, dx = 0 \quad (k \neq l,\ k,\ l = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.5}$$

Обозначим через $H_m(t) \subset L_2$ (0,1) подпространство, ортогональное функциям $z_j(x, -t)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$).

Любую функцию $\psi(x) \in L_2$ (0,1) можно единственным образом представить в виде

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(x, 0) + h(x) \quad (h(x) \in H_m(0)). \tag{5.6}$$

В самом деле, из соотношений (5.4) и (5.5) следует, что

$$c_k = \frac{1}{\delta_k} \int_0^1 \psi(x)\, z_k(x, 0)\, dx \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.7}$$

Разложение (5.6) позволяет свести задачу Коши к задаче со специальным начальным условием

$$\underset{t \to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, u(x, t) = h(x) \quad (h(x) \in H_m(0)). \tag{5.8}$$

Наша цель—исследовать эту специальную задачу Коши.

Лемма 5.2. *Пусть* $u(x, t) \in P$ *есть решение задачи Коши* (1.1). *Если* $\psi(x) \in H_m(0)$, *то* $u(x, t) \in H_m(t)\ (t > 0)$.

Эта лемма — прямое следствие соотношения (5.2).

Лемма 5.3. *Если* $u(x, t) \in P$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, \tau)\, u + \mu(x, t) \tag{5.9}$$

и начальному условию

$$\underset{t \to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, u(x, t) = \psi(x) \in H_m(0), \tag{5.10}$$

то функции $u(x, t)$ и $\mu(x, t)$ *либо обе принадлежат* $H_m(t)$, *либо обе не принадлежат этому пространству.*

Следствие 5.1. *Если функция* $u(x, t) \in P \cap H_m(t)$ *удовлетворяет соотношению* (5.9), где $\mu(x, t)$ — *какая либо функция вида*

$$\mu(x, t) = \sum_{k=1}^{m} C_k(t)\, \varphi_k(x), \tag{5.11}$$

то функция $u(x, t)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* (1.1).

Доказательство. Согласно лемме 5.3 функция $\mu(x, t) \in H_m(t)$. Это, однако, невозможно для функции вида (5.11), если только она не равна тождественно нулю.

Обозначим через $w_n(x, t) \in P \cap H_m(t)$ функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + q_0(x) w_0 + \mu_0(x, t),$$
$$\underset{t\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, w_0(x, t) = h(x) \in H_m(0), \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial w_{n+1}}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_{n+1}}{\partial x^2} + q_0(x) w_{n+1} + q_1(x, \tau) w_n + \mu_{n+1}(x, t), \tag{5.13}$$
$$\underset{t\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, w_{n+1}(x, t) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

где $\mu_n(x, t)$ — функции вида (5.11).

Теорема 5.1. *Если ряды*

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \dot{w}_n(x, t) \tag{5.14}$$

сходятся равномерно в полуполосе Π *и в любой области* $t \geqslant t_0$ $(t_0 > 0)$, *соответственно, и сумма второго ряда равна* $\dot{w}(x, t)$, *то функция* $w(x, t)$ *является решением задачи Коши* (1.1) *при* $\psi(x) = h(x)$.

Доказательство. Применяя к соотношениям (5.12) и (5.13) лемму 5.3, заключаем, что

$$\mu_0(x, t) - q_1(x, \tau) w_0(x, t) \in H_m(t), \tag{5.14^1}$$
$$q_1(x, \tau)[w_n(x, t) - w_{n+1}(x, t)] + \mu_{n+1}(x, t) \in H_m(t) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{5.15}$$

Просуммируем это соотношение по n от N_1 до N_2

$$q_1(x, \tau)\left[w_{N_1}(x, t) - w_{N_2+1}(x, t)\right] + \sum_{n=N_1}^{N_2} \mu_{n+1}(x, t) \in H_m(t). \tag{5.16}$$

Отсюда легко заключить, что

$$\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} \mu_{n+1}(x, t)\right| \leqslant M_1 q_1 \| w_{N_1}(x, t) - w_{N_2+1}(x, t) \|.$$

Так как ряд $\sum_{n=0} w_n(x, t)$ сходится равномерно по x при любом $t \geqslant 0$, то из последнего неравенства следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n+1}(x, t) = \mu(x, t) - \mu_0(x, t) \tag{5.17}$$

сходится равномерно и, следовательно, представляет собой выражение вида (5.11).

С другой стороны, из соотношений (5.13) следует, что

$$w_{n+1}(x, t) = \int_0^1 g(x, s, \lambda)\{\dot{w}_{n+1}(s, t) - \lambda w_{n+1}(s, t) -$$
$$- q_1(s, \tau) w_n(s, \tau) - \mu_{n+1}(s, t)\}\, ds \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{5.18}$$

где $\lambda \neq \lambda_k$ $(k = 1, 2 \ldots)$ — произвольное число, $g(x, s, \lambda)$ — функция Грина оператора $\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x) - \lambda$, выделенная граничными условиями $Ag = 0$, $Bg = 0$.

Просуммируем равенство (5.18) по n от 0 до N. Полагая

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} w_n(x, t), \quad M_N = \sum_{n=0}^{N} \mu_n(x, t), \tag{5.19}$$

получим

$$S_{N+1}(x, t) = \int_0^1 g(x, s, \lambda)\{\dot{S}_{N+1}(s, t) - \lambda S_{N+1}(s, t) -$$
$$- q_1(s, \tau) S_n(s, t) - q_1(s, \tau) w_0(s, t) - M_{N+1}(s, t) + \mu_0(s, t)\}\, ds.$$

Устремим в этом соотношении N к бесконечности. В силу равномерной сходимости рядов (5.19) при каждом фиксированном значении $t > 0$ получим

$$w(x, t) - w_0(x, t) = \int_0^1 g(x, s, \lambda)\{\dot{w}(s, t) - \dot{w}_0(s, t) - \lambda w(s, t) +$$
$$+ \lambda w_0(s, t) - q_1(s, \tau) w(s, t) - \mu(s, t) + \mu_0(s, t)\}\, ds.$$

Из этого равенства следует, что разность $w(x, t) - w_0(x, t)$, а следовательно, и функция $w(x, t)$, дважды дифференцируема по x, удовлетворяет граничным условиям $Aw = 0$, $Bw = 0$ и дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[w(x, t) - w_0(x, t)] + q_0(x)[w(x, t) - w_0(x, t)] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}[w(x, t) - w_0(x, t)] - q_1(x, \tau) w(x, t) - \mu(x, t) + \mu_0(x, t).$$

С помощью (5.12), отсюда получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q(x, \tau) w(x, t) + \mu(x, t).$$

Так как $w \in P \cap H_m(t)$, а функция $\mu(x, t)$ представима в виде (5.11), то согласно лемме 5.3 $\mu(x, t) \equiv 0$. Таким образом, теорема 5.1 доказана.

6. В этом пункте в предположении, что $\lambda_{m+1} < -2Q_1$ будут найдены функции $w_n(x, t)$ $(n = 0, 1 \ldots)$, удовлетворяющие соотношениям (5.13) и условиям теоремы 5.1. Тем самым будут доказаны теоремы 2,2, 2,3 и 2,5.

Обозначим через $h_k (k = 1, 2 \ldots)$ коэффициенты Фурье функции $h(x) \in H_m(0)$. Положим

$$w_0(x, t) = \eta_0(x, t) + \zeta_0(x, t), \tag{6.1}$$

где

$$\eta_0(x, t) = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(0)}(t)\varphi_k(x), \quad \zeta_0(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} h_k e^{\lambda_k t}\varphi_k(x), \tag{6.2}$$

причем коэффициенты $c_k^{(0)}(t)$ $(k = 1, 2 \ldots, m)$ определяются так, чтобы $w_0(x, t) \in H_m(t)$.

Если функция $w_{n-1}(x, t)$ $(n = 1, 2 \ldots)$ уже определена, то функция $w_n(x, t)$ определяется так:

$$w_n(x, t) = \eta_n(x, t) + \zeta_n(x, t), \tag{6.3}$$

где

$$\zeta_n(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k(x) \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n-1,\,k}(\sigma)\,d\sigma, \tag{6.4}$$

$$\eta_n(x, t) = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(n)}(t)\,\varphi_k(x), \tag{6.5}$$

а $f_{n-1,\,k}(t)$ — коэффициенты Фурье функции

$$f_{n-1}(x, t) = q_1(x, \tau)\,\omega_{n-1}(x, t). \tag{6.6}$$

Коэффициенты $c_k^{(n)}(t)$ определяются так, чтобы $\omega_n(x, t) \in H_m(t)$.

Отметим некоторые свойства функций $\omega_n(x, t)$, справедливые при достаточно большом значении ν.

а) *Ряд* (6.4) *сходится в среднем квадратичном. Норма суммы ряда удовлетворяет неравенству*

$$\|\zeta_n(x, t)\| \leqslant \frac{1}{2}\rho_n(\alpha)\, t^{\frac{n}{2}} e^{\alpha t} \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{6.7}$$

где α — *произвольное число, большее, чем* λ_{m+1} *и*

$$\rho_n(\alpha) = 2\|h\| \sqrt{\frac{1}{n!}\left[\frac{2Q_1^2}{\alpha - \lambda_{m+1}}\right]^n}, \quad (Q_1 = \max_{x,\,\tau} |q_1(x, \tau)|). \tag{6.8}$$

Норма функции $\|\omega_n\|$ *не превосходит величины* $2\|\zeta_n\|$:

$$\|\omega_n(x, t)\| \leqslant 2\|\zeta_n(x, t)\| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.9}$$

Доказательство. Соотношение (6.7) очевидно, выполняется при $n = 0$. Предположим, что оно выполняется при некотором значении n и докажем его для функции $\zeta_{n+1}(x, t)$.

Прежде всего оценим коэффициенты $c_k^{(n)}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Они определяются из следующей системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}(t)\, c_k^{(n)}(t) = \beta_i^{(n)}(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{6.10}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha_{ik}(t) = \int_0^1 \varphi_k(x)\, z_i^0(x, -t)\,dx, \\ \beta_i^{(n)}(t) = -\int_0^1 \zeta_n(x, t)\, z_i^0(x, -t)\,dx, \end{gathered} \tag{6.11}$$

$$z_i^0(x, t) = z_i(x, t)\left(\int_0^1 z_i^2(x, t)\,dx\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.12}$$

В силу оценки (2.14) при $\nu \to \infty$ матрица $\alpha_{ik}(t)$ стремится к единичной матрице, а коэффициенты $\beta_i(t)$ удовлетворяют неравенству

$$|\beta_i^{(m)}(t)| \leqslant \frac{M}{\nu}\|\zeta_n(x, t)\| \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{6.13}$$

где M — коэффициент, не зависящий ни от ν, ни от n.

Поэтому при достаточно большом значении ν имеем

$$|\eta_n(x, t)| \leqslant \|\zeta_n(x, t)\|. \tag{6.14}$$

Отсюда вытекает оценка (6.9). Обратимся теперь к оценке частичной суммы

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N_1} \varphi_k(x) \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma \Big\|^2 = \sum_{k=N}^{N_1} \Big| \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma \Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{2\alpha t}}{2(\alpha-\lambda_N)} \int_0^t e^{-2\alpha\sigma} \| f_n(x, \sigma) \|^2 d\sigma \leqslant \frac{Q_1^2 e^{2\alpha t}}{2(\alpha-\lambda_N)} \int_0^t e^{-2\alpha\sigma} \| \omega_n(x, \sigma) \|^2 d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \rho_{n+1}^2(\alpha)\, e^{2\alpha t} \cdot t^{n+1}. \tag{6.15}$$

Эта оценка показывает, что ряд

$$\zeta_{n+1}(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k(x) \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma$$

сходится в среднем квадратичном, а его сумма подчиняется оценке (6.7).

б) *Ряд* (6.4) *сходится равномерно в полуполосе* II, *а его сумму можно оценить следующим образом:*

$$|\zeta_n(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} \theta\rho_n(\alpha) \sqrt{1 + 2(\alpha-\lambda_{m+1}) \sum_{k=m+2}^{\infty} (\lambda_{m+1}-\lambda_k)^{-1}} \cdot t^{\frac{n}{2}} e^{\alpha t}. \tag{6.16}$$

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму

$$\Big| \sum_{k=N}^{N_1} \varphi_k(x) \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n-1,k}(\sigma)\, d\sigma \Big| \leqslant \theta \sum_{k=N}^{N_1} \Big| \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n-1,k}(\sigma)\, d\sigma \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \theta \Big(\sum_{k=N}^{N_1} \int_0^t e^{2\lambda_k(t-\sigma)+2\alpha\sigma} d\sigma \sum_{k=N}^{N_1} \int_0^t e^{-2\alpha\sigma} | f_{n-1,k}(\sigma) |^2 d\sigma \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \theta e^{\alpha t} \Big(\sum_{k=N}^{N_1} \frac{1}{2(\alpha-\lambda_k)} \Big)^{\frac{1}{2}} Q_1 \rho_{n-1}(\alpha) \sqrt{\frac{t^n}{n}}. \tag{6.17}$$

Из сходимости ряда $\sum^{\infty} |\lambda_k|^{-1}$ следует, что с ростом N сумма $\sum_N^{N_1} (\alpha-\lambda_k)^{-1}$ стремится к нулю. Поэтому из (6.17) следует, что ряд (6.4) сходится равномерно и что его сумма удовлетворяет неравенству (6.16).

в) *Функции* $\omega_n(x, t)$ *ограничены*

$$|\omega_n(x, t)| \leqslant \theta\rho_n(\alpha) \sqrt{1 + 2(\alpha-\lambda_{m+1}) \sum_{k=m+2}^{\infty} (\lambda_{m+1}-\lambda_k)^{-1}} t^{\frac{n}{2}} e^{\alpha t}, \tag{6.17'}$$

и, следовательно, ряд $\sum \omega_n(x, t)$ *равномерно и абсолютно сходится, если* $|\alpha(\alpha-\lambda_{m+1})| > Q_1^2$.

Это вытекает из неравенств (6.14) и (6.16).

г) *Если функция* $\zeta_n(x, t)$ *имеет ограниченную и непрерывную в области* $t \geqslant t_0$ $(t_0 > 0)$ *производную* $\dot{\zeta}_n(x, t)$, *вычисляемую путем почленного дифференцирования ряда* (6.4)

$$\dot{\zeta}_n(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{d}{dt} \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n-1,k}(\sigma)\, d\sigma, \tag{6.18}$$

то и функция $\eta_n(x, t)$ *имеет ограниченную и непрерывную производную* $\dot{\eta}_n(x, t)$ *в этой же области.*

Доказательство. Из уравнений (6.10) легко получить соотношения

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}(t)\,\dot{c}_k^{(n)}(t) = b_i^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(t)\,c_k^{(n)}(t), \tag{6.19}$$

где

$$b_i^{(n)}(t) = \int_0^1 \zeta_n(x,t)\,\dot{z}_i(x,-t)\,dx \left(\int_0^1 z_i^2(x,-t)\,dx\right)^{-\frac{1}{2}} -$$

$$- \int_0^1 \dot{\zeta}_n(x,t)\,z_i^0(x,-t)\,dx, \tag{6.20}$$

$$a_{ik}(t) = \int_0^1 \varphi_k(x)\,\dot{z}_i(x,-t)\,dx \left(\int_0^1 z_i^0(x,-t)\,dx\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.21}$$

Из (6.20) и (6.21) легко получить оценки вида

$$|b_i^{(n)}(t)| < \frac{M_1}{\nu}\,\|\zeta_n(x,t)\| + \frac{M_2}{\nu}\,\|\dot{\zeta}_n(x,t)\|,$$

$$|a_{ik}(t)| < M_3,$$

где M_1, M_2 и M_3 — некоторые постоянные. Так как матрица $\alpha_{ik}(t)$ при больших ν сколь угодно близка к единичной матрице, то из (6.19) теперь следует

$$|\dot{c}_k^{(n)}(t)| \leqslant \frac{M_4}{\nu}\{\|\zeta_n(x,t)\| + \|\dot{\zeta}_n(x,t)\|\}. \tag{6.22}$$

Непрерывность производной $\dot{\eta}_n(x,t)$ следует из равенства (6.19).

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 6.1. *Ряд*

$$S_p(\sigma) = \sum_{k=m+1}^{\infty} |\lambda_k|^p e^{\lambda_k \sigma} \tag{6.23}$$

сходится равномерно в любой области вида $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$, а его сумма ограничена выражением

$$S_p(\sigma) < \frac{M_p}{\sigma^{p+\frac{1}{2}}}, \tag{6.24}$$

где M_p — некоторая постоянная.

д) *Все функции $\zeta_n(x,t)$ и $\eta_n(x,t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ дифференцируемы по t $(t > 0)$. Производная $\dot{\zeta}_n(x,t)$ может быть вычислена путем почленного дифференцирования ряда (6.4). При $t \geqslant t_0\,(t_0 > 0)$ производные $\dot{\zeta}_n(x,t)$ и $\dot{\eta}(x,t)$ ограничены и непрерывны.*

Доказательство. Утверждение д) справедливо при $n = 0$. Предполагая, что оно справедливо для функций $\zeta_n(x,t)$ и $\eta_n(x,t)$, докажем его для функций $\zeta_{n+1}(x,t)$ и $\eta_{n+1}(x,t)$.

Рассмотрим сумму

$$S(N, N_1) = \sum_{k=N}^{N_1} \varphi_k(x)\,\frac{d}{dt}\int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \sum_{k=N}^{N_1} \varphi_k(x)\left\{f_{n,k}(t_0)\,e^{\lambda_k(t-t_0)} + \int_0^{t_0} \lambda_k e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\,d\sigma + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_k(t-\sigma)}\dot{f}_{n,k}(\sigma)\,d\sigma\right\}. \tag{6.25}$$

Имеем

$$|S(N, N_1)| \leqslant \theta \Bigg\{ \sqrt{\sum_{k=N}^{N_1} |f_{n,k}(t_0)|^2} \sqrt{\sum_{k=N}^{N_1} e^{2\lambda_k (t-t_0)}} +$$

$$\int_0^{t_0} \| f_n(x, \sigma) \| \sqrt{\sum_{k=N}^{N_1} \lambda_k^2 e^{2\lambda_k (t-\sigma)}}\, d\sigma + \int_t^t \| \dot{f}_n(x, \sigma) \| \sqrt{\sum_{k=N}^{N_1} e^{2\lambda_k (t-\sigma)}}\, d\sigma \Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_0 \theta}{\sqrt{2(t-t_0)}} \sqrt{\sum_{k=N}^{N_1} |f_{n,k}(t_0)|^2} + \theta \int_0^{t_0-\varepsilon} \| f_n(x, \sigma) \| \sqrt{\sum_{k=N}^{N_1} e^{2\lambda_k (t-\sigma)}}\, d\sigma +$$

$$+ \theta \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \| f_n(x, \sigma) \| \frac{M_2\, d\sigma}{[2(t-\sigma)]^{\frac{5}{2}}} + \theta \int_{t_\bullet}^{t-\varepsilon} \| f_n(x, \sigma) \| \sqrt{\sum_{k=N}^{N_1} e^{2\lambda_k (t-\sigma)}}\, d\sigma +$$

$$+ \theta \int_{t-\varepsilon}^{t} \| \dot{f}_n(x, \sigma) \| \frac{M_0}{\sqrt{2(t-\sigma)}}\, d\sigma. \tag{6.26}$$

Выбирая ε достаточно малым, можно сделать сколь угодно малыми интегралы от $t_0 - \varepsilon$ до t_0 и от $t - \varepsilon$ до t. После того как ε зафиксировано, можно, пользуясь равномерной сходимостью рядов (6.23) в области $\sigma \geqslant \varepsilon$ и выбирая N достаточно большим, сделать сколь угодно малыми остальные два интеграла. Наконец, сумма $\sum_{k=N}^{N_1} |f_{n,k}(t_0)|^2$ стремится к нулю при $N \to \infty$. Тем самым доказана равномерная по t $(t \geqslant t_1 > 0)$ и по x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ сходимость ряда

$$S_n(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{d}{dt} \int_0^t e^{\lambda_k (t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma$$

при любом n $(n = 1, 2 \ldots)$. Благодаря равномерной сходимости функция $S_n(x, t)$ является непрерывной $(t > 0)$ и равна функции $\dot{\zeta}_n(x, t)$.

Свойство д) доказано.

е) *Ряд*

$$T_n(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k'(x) \int_0^1 e^{\lambda_k (t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma \tag{6.27}$$

сходится в среднем квадратичном при каждом фиксированном значении t.

Доказательство. Воспользуемся тождеством

$$\sum_{k=N}^{N_1} \varphi_k(x) \int_0^t e^{\lambda_k (t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma = \sum_{k=N}^{N_1} \varphi_k(x) \frac{d}{dt} e^{\lambda_k (t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma -$$

$$- \sum_{k=N}^{N_1} \varphi_k(x) f_{n,k}(t) - q_0(x) \sum_{k=N}^{N_1} \varphi_k(x) \int_0^t e^{\lambda_k (t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma.$$

Первая и третья суммы правой части становятся сколь угодно малыми по абсолютной величине при всех x и $t \geqslant t_1 > 0$, если число N

достаточно велико. При этом вторая сумма становится сколь угодно малой в среднем квадратичном при любом фиксированном значении t. Свойство е) доказано.

ж) Из сходимости ряда (6.27) в среднем квадратичном вытекает равномерная по x сходимость рядов

$$\int_0^x T_n(x_1, t)\,dx_1 = \sum_{k=m+1}^{\infty} [\varphi_k'(x) - \varphi_k'(0)] \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\,d\sigma, \tag{6.28}$$

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} T_n(x_2, t)\,dx_2 = \sum_{k=N}^{N_1} [\varphi_k(x) - \varphi_k(0) - x\varphi_k'(0)] \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\,d\sigma.$$

Отсюда следует сходимость ряда

$$F_n(t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k'(0) \int_0^t f_{n,k}(\sigma)\, e^{\lambda_k(t-\sigma)} d\sigma. \tag{6.29}$$

Переписывая (6.28) в виде

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} T_n(x_2, t)\,dx_2 = \zeta_n(x, t) - \zeta_n(0, t) - xF_n(t), \tag{6.30}$$

заключаем, что функция $\zeta_n(x, t)$ непрерывно дифференцируема и имеет квадратично интегрируемую вторую производную, причем

$$\zeta_n'(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k'(x) \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\,d\sigma,$$

$$\zeta_n''(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k''(x) \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\,d\sigma.$$

Первый из этих рядов сходится равномерно по x, второй — в среднем квадратичном. Из последнего равенства следует, что в метрике $L_2(0, 1)$ справедливо соотношение

$$\dot{\zeta}_n(x, t) = \zeta_n''(x, t) + q_0(x)\,\zeta_{n+1}(x, t) + f_{\cdot}(x, t) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\, f_{n,k}(t). \tag{6.31}$$

Все члены этого равенства, кроме, может быть, функции $\zeta_n''(x, t)$, непрерывны. Поэтому можно утверждать, что функция $\zeta_n''(x, t)$ непрерывна по x, а равенство (6.31) выполняется при каждом значении x и t, а не только в смысле метрики $L_2(0, 1)$.

Прибавим к равенству (6.31) следующее тождество:

$$\dot{\eta}_{n+1}(x, t) = \eta_{n+1}''(x, t) + q_0(x)\,\eta_{n+1}(x, t) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\,\{\dot{c}_k^{(n)}(t) - \lambda_k c_k^{(n)}(t)\}.$$

Получим

$$\dot{\omega}_{n+1}(x, t) = \omega_{n+1}''(x, t) + q_0(x)\,\omega_{n+1}(x, t) + q_1(x, \tau)\,\omega_n(x, t) + \mu_n(x, t), \tag{6.32}$$

где $\mu_n(x, t)$ — некоторая функция вида (5.11).

Мы видим, что функция $\omega_{n+1}(x, t)$ $(n = 0, 1 \ldots)$ удовлетворяет уравнению (5.13).

Из равномерной сходимости ряда (6.4) следует, что

$$\lim_{t\to 0} \zeta_{n+1}(x, t) = \zeta_{n+}\ (x, 0) = 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $\underset{t\to0}{\mathrm{l.i.m.}}\,\zeta_{n+1}(x, t) = 0$. Вспоминая (6.14), заключаем, что $\underset{t\to0}{\mathrm{l.i.m.}}\,\eta_{n+1}(x, t) = 0$ и, следовательно,

$$\underset{t\to0}{\mathrm{l.i.m.}}\,w_{n+1}(x, t) = 0, \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6.33}$$

Таким образом, и начальное условие (5.13) выполнено.

Наконец, из равномерной сходимости ряда (6.29) и равенства (6.30) следует, что

$$\zeta'_{n+1}(0, t) = F_n(t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi'_k(0) \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma.$$

Вместе с тождеством

$$\zeta_n(0, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k(0) \int_0^t e^{\lambda_k(t-\sigma)} f_{n,k}(\sigma)\, d\sigma,$$

это дает

$$A\zeta_{n+1}(x, t) = 0.$$

Так как $A\eta_{n+1}(x, t) = 0$, то получим

$$Aw_{n+1}(x, t) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Аналогично можно доказать, что $Bw_{n+1}(x, t) = 0$. Вместе с равенствами (6.32) и (6.33) это показывает, что *функции* $w_n(x, t)$ $(n = 0, 1 \ldots)$, *заданные равенствами* (6.3) — (6.5), *удовлетворяют всем условиям предыдущего параграфа.*

Для того, чтобы они удовлетворяли также условиям теоремы 5.1 остается доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t)$$

сходится равномерно при $t \geqslant t_0$ $(t_0 > 0)$. Для этого нам придется оценить абсолютную величину производной $\dot{w}_n(x, t)$.

з) Для оценки $\dot{w}_n(x, t)$ вернемся к неравенству (6.26). Полагая в нем $N = m + 1$ и устремляя N_1 к бесконечности, получим

$$|\dot{\zeta}_{n+1}(x, t)| \leqslant \theta \Bigg\{ \|f_n(x, t_0)\| \sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} e^{2\lambda_k(t-t_0)}} + \int_0^{t_0} \|f_n(x, \sigma)\| \sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^2 e^{2\lambda_k(t-\sigma)}}\, d\sigma + \int_{t_0}^{t} \|\dot{f}_n(x, \sigma)\| \sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} e^{2\lambda_k(t-\sigma)}}\, d\sigma \Bigg\} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6.34}$$

Пользуясь неравенством (6.24), заключаем

$$|\dot{\zeta}_{n+1}(x, t)| \leqslant \theta \Bigg\{ \|f_n(x, t_0)\| \frac{\sqrt{M_0}}{[2(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}} + \int_0^{t_0} \|f_n(x, \sigma)\| \frac{\sqrt{M_2}\, d\sigma}{[2(t-\sigma)]^{\frac{5}{4}}} + \int_{t_0}^{t} \|\dot{f}_n(x, \sigma)\| \frac{\sqrt{M_0}}{[2(t-\sigma)]^{\frac{1}{4}}}\, d\sigma \Bigg\}. \tag{6.35}$$

Заметим еще, что из (6.22) следует

$$|\dot{\eta}_{n+1}(x, t)| \leqslant \frac{K}{\nu}\{\|\zeta_n(x, t)\| + \|\dot{\zeta}_{n+1}(x, t)\|\}. \tag{6.36}$$

При достаточно большом ν отсюда вытекает, что

$$|\dot{\omega}_n(x, t)| \leqslant \frac{K}{\nu}\|\zeta_n(x, t)\| + 2\|\dot{\zeta}_n(x, t)\| \tag{6.37}$$

и

$$\|\dot{f}_n(x, t)\| \leqslant \|q_1\| \left\{\frac{K}{\nu}\|\zeta_n(x, t)\| + 2\|\dot{\zeta}_n(x, t)\|\right\} + \|\dot{q}_1\| \cdot 2\|\zeta_n(x, t)\|,$$

т. е.

$$\|\dot{f}_n(x, t)\| \leqslant \left[2\|\dot{q}_1(x, t)\| + \frac{K}{\nu}\|q_1(x_1 t)\|\right] \times$$
$$\times \|\zeta_n(x, t)\| + 2\|q_1(x_1 t)\|\|\dot{\zeta}_n(x, t)\|. \tag{6.38}$$

Опираясь на неравенства (6.35) и (6.38), докажем, что при некотором выборе чисел σ_n $(n = 1, 2 \ldots)$ имеют место оценки

$$|\dot{\zeta}_n(x, t)| \leqslant \sigma_n\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{4}n}\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{3}} (t > t_0) \quad (n = 1, 2 \ldots). \tag{6.39}$$

Для этого, несколько ослабляя неравенство (6.7), запишем

$$\|\zeta_n(x, t)\| < \mu_n\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad \mu_n = \frac{1}{2}\rho_n(\alpha)\, t_0^{\frac{n}{2}}. \tag{6.40}$$

Теперь из (6.38) заключаем

$$\|\dot{f}_n(x, t)\| \leqslant \left\{2\|\dot{q}_1(x, t)\|\mu_n + \frac{K}{\nu}\|q_1(x, t)\|\mu_n + \right.$$
$$\left. + 2\|q_1(x, t)\|\sigma_n\right\}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{4}n}\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{3}}. \tag{6.41}$$

(мы предположили, что соотношение (6.39) справедливо для некоторого значения n). Подставляя (6.41) в (6.35) и пользуясь неравенством

$$\|f_n(x, t)\| \leqslant Q_1\mu_n\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{6.42}$$

получим

$$|\dot{\zeta}_{n+1}(x, t)| \leqslant \theta Q_1\mu_n \frac{\sqrt{M_0}}{[2(t - t_0)]^{\frac{1}{4}}} + \theta\mu_n\sqrt{M_2}\int_0^{t_0}\left(\frac{\sigma}{t_0}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{d\sigma}{[2(t-\sigma)]^{\frac{5}{4}}} +$$
$$+ \varkappa_n \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\sigma}{t_0}\right)^{\frac{3}{4}n}\left(1 - \frac{t_0}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d\sigma}{(t-\sigma)^{\frac{1}{4}}}, \tag{6.43}$$

где

$$\varkappa_n = \frac{\theta\sqrt{M_0}}{2^{\frac{1}{4}}} \max_t \left\{2\|\dot{q}_1\|\mu_n + \frac{K}{\nu}\|q_1\|\mu_n + 2\|q_1\|\sigma_n\right\}. \tag{6.44}$$

Легко оценить входящие в (6.43) интегралы:

$$\int_0^{t_0} \left(\frac{\sigma}{t_0}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{d\sigma}{[2(t-\sigma)]^{\frac{5}{4}}} < \frac{3}{2^{\frac{1}{4}}} \frac{t_0^{\frac{1}{6}}}{(t-t_0)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\sigma}{t_0}\right)^{\frac{3}{4}n} \left(1-\frac{t_0}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d\sigma}{(t-\sigma)^{\frac{1}{4}}} \leqslant \frac{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{3n}{2}+\frac{5}{3}}} t_0^{\frac{5}{6}} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{4}n+\frac{5}{6}} (t-t_0)^{-\frac{1}{6}}.$$

Поэтому

$$|\dot{\zeta}_{n+1}(x, t)| \leqslant \theta \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{4}(n+1)} \left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{3}} \times$$

$$\times \left\{Q_1 \mu_n M_0^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{4}} t_0^{-\frac{1}{4}} + \mu_n M_2^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{2}} t_0^{-\frac{1}{6}} + \varkappa_n \left(\frac{3}{2}n+\frac{5}{3}\right)^{-1}\right\} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right).$$

Если в качестве σ_{n+1} взять любое число, удовлетворяющее неравенству

$$\sigma_{n+1} > \theta \left\{Q_1 \mu_n M_0^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{4}} t_0^{-\frac{1}{4}} + \mu_n \sqrt{M_2} \frac{3}{\sqrt{2}} t_0^{-\frac{1}{6}} + \right.$$

$$\left. + \varkappa_n \left(\frac{3}{2}n+5\right)^{-\frac{1}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right\} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \tag{6.45}$$

то из оценки (6.39) вытекает оценка

$$|\dot{\zeta}_{n+1}(x, t)| < \sigma_{n+1} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{4}(n+1)} \left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{3}}. \tag{6.46}$$

С другой стороны, при $n = 0$ оценка (6.39) справедлива, если в качестве σ_0 взять число

$$\sigma_0 = \theta \sum_{k=m+1}^{\infty} h_k e^{\lambda_k t_0}. \tag{6.47}$$

Тем самым оценка (6.39) доказана для всех n, если только числа σ_n удовлетворяют соотношениям (6.45) и (6.47).

Пользуясь (6.44), можно неравенству (6.45), несколько усиливая его, придать следующую форму:

$$\sigma_{n+1} \geqslant \frac{P}{\sqrt{n+1}} \sigma_n + Q \mu_n, \tag{6.48}$$

где P и Q — некоторые постоянные коэффициенты.

Отсюда легко заключить, что числа σ_n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ можно выбрать так, чтобы ряд $\sum \sigma_n R^h$ сходился при любом значении R. Это означает, что ряд $\sum \dot{\omega}_n(x, t)$ сходится равномерно на любом интервале $t_1 < t < t_2$.

Мы видим, что все условия теоремы 5.1 выполнены, тем самым доказаны теоремы 2.2, 2.3 и 2.5.