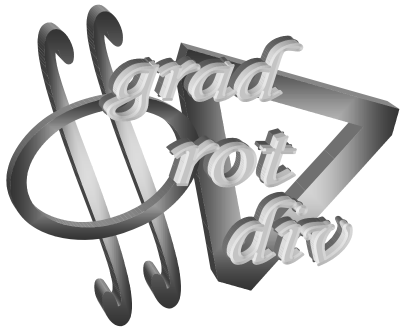


С.Н. Зиненко

Векторный и тензорный анализ

Потенциальные и соленоидальные поля

(сборник задач)

2018

11. Потенциальные векторные поля

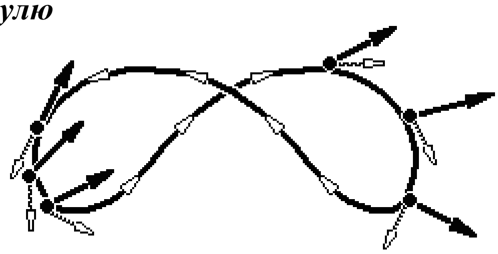
Условия

Проверить, что поле потенциально и найти его потенциал	
№ 11.1. $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^3+2xy-y^2 \\ x^2-2xy-y^3 \end{bmatrix}$ **№ 11.2.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} 3x^2 + yz \\ 4y^3 + zx \\ 5z^4 + xy \end{bmatrix}$	**№ 11.1.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{bmatrix}$ **№ 11.2.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} y^2z^3+1 \\ 2xyz^3+2y \\ 3xy^2z^2+3z^2 \end{bmatrix}$
Проверить, что поле потенциально и найти его работу вдоль кривой от точки A до точки B	
№ 11.3. $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^4+2xy^3 \\ 3x^2y^2-y^4 \end{bmatrix}, \quad A(-1,\ 2) \to B(\ 3,-4)$ **№ 11.4.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x-yz \\ y-zx \\ z-xy \end{bmatrix}, \ A(-1,\ 2,-3) \to B(-4,\ 5,-6)$	**№ 11.3.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \\ \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \end{bmatrix}, \quad A(\ 1,-2) \to B(-3,\ 4)$ **№ 11.4.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^2-2yz \\ y^2-2zx \\ z^2-2xy \end{bmatrix}, \ A(\ 3,\ 2,\ 1) \to B(\ 4,\ 5,\ 6)$
№ 11.5. Проверить, что электростатическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ точечного заряда q, удовлетворяет условиям $\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ причем потенциально, но не ~~соленоидально~~	**№ 11.5.** Выяснить, при каких условиях сферическое поле $\vec{E}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$ удовлетворяет условиям $\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ причем потенциально, но не ~~соленоидально~~

Теория

*Векторное поле $\vec{F}_P(\vec{r})$ называется **потенциальным** в объеме V, если **циркуляция** поля вдоль любого **замкнутого контура** $L \subset V$ равна **нулю***

$$\oint_L \left(\vec{F}_P(\vec{r}),\ d\vec{L} \right) = 0 \quad \forall L \subset V$$



Теорема *(критерий потенциальности) Для того,*

1) чтобы $\vec{F}_P(\vec{r})$ было потенциальным

$\Leftrightarrow$

1) чтобы $\operatorname{rot}\vec{F}_P(\vec{r}) = \vec{0}$

Замечание. *Объем V должен быть **поверхностно** связным, т.е. любой контур можно стянуть в точку, оставаясь в V (описывая при этом некоторую поверхность $S_L \subset V$)*

Теорема *(характерное свойство потенциального поля) Для того,*

1) чтобы $\vec{F}_P(\vec{r})$ было потенциальным

$\Leftrightarrow$

1) чтобы $\vec{F}_P(\vec{r}) = \operatorname{grad} f(\vec{r})$

*Скалярное поле $f(\vec{r})$ называется **потенциалом** (скалярным) векторного поля $\vec{F}_P(\vec{r})$ и определяется с точностью до const.*

Следствие

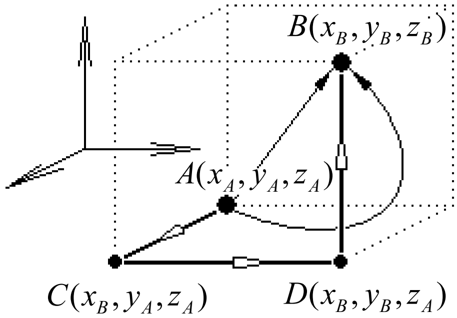
$$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{0}}$$

Работа *потенциального поля* ***не зависит*** *от формы* L *пути, определяясь только граничными точками* A *и* B *кривой* L_{AB}*, и равна разности потенциалов*

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{\boldsymbol{F}}_P(\vec{\boldsymbol{r}}),\, d\vec{\boldsymbol{L}} \right) = \int\limits_{A}^{B} \left(\vec{\boldsymbol{F}}_P(\vec{\boldsymbol{r}}),\, d\vec{\boldsymbol{L}} \right) = f(B) - f(A)$$

Для ее нахождения удобно взять ломаную L_{ACDB} ***со звеньями***

$$L_{AC} \parallel Ox \qquad L_{CD} \parallel Oy \qquad L_{DB} \parallel Oz$$



$$\int\limits_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)} = \int\limits_{(\boldsymbol{x_A}, y_A, z_A)}^{(\boldsymbol{x_B}, y_B, z_B)} x + \int\limits_{(x_A, \boldsymbol{y_A}, z_A)}^{(x_B, \boldsymbol{y_B}, z_B)} y + \int\limits_{(x_A, y_A, \boldsymbol{z_A})}^{(x_B, y_B, \boldsymbol{z_B})} z =$$

$$= \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x, y_A, z_A)\,dx + \int\limits_{y_A}^{y_B} Q(x_B, y, z_A)\,dy + \int\limits_{z_A}^{z_B} R(x_B, y_B, z)\,dz$$

Зафиксировав начальную точку, например $(x_A,\, y_A,\, z_A) = (0,\ 0,\ 0)$*, и оставив конечную произвольной* $(x_B,\, y_B,\, z_B) = (x,\ y,\ z)$*, найдем один из потенциалов*

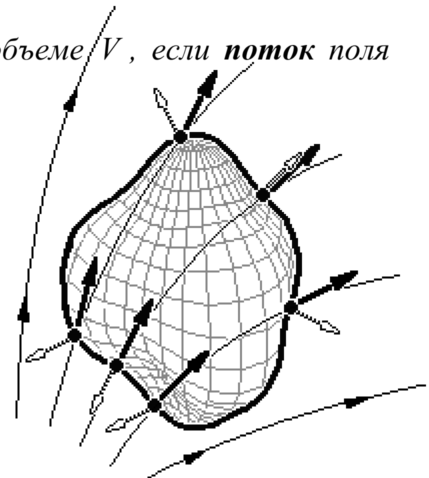
$$f(x,\, y,\, z) = \int\limits_0^x P(x,\ 0,\ 0)\,dx \ + \int\limits_0^y Q(x,\ y,\ 0)\,dy \ + \int\limits_0^z R(x,\ y,\ z)\,dz$$

12. Соленоидальные векторные поля

Условия

№ 12.1. Проверить, что электростатическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ бесконечного прямолинейного проводника с постоянной плотностью заряда q удовлетворяет условиям $$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r})=0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r})=\vec{0}$$ причем и потенциально, и соленоидально	**№ 12.1.** Выяснить, при каких условиях *цилиндрическое* поле $\vec{E}(\vec{d})=f(d)\vec{d}\,,\qquad \vec{d}=\left[\left[\vec{e},\vec{r}\right],\vec{e}\right]$ удовлетворяет условиям $$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{d})=0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{d})=\vec{0}$$ причем и потенциально, и соленоидально
№ 12.2. Проверить, что магнитостатическое поле $\vec{H}(\vec{r})$ бесконечного прямолинейного проводника с постоянной плотностью тока $\vec{j}=q\,\vec{v}$ удовлетворяет условиям $$\operatorname{div}\vec{H}(\vec{r})=0 \qquad \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r})=\vec{0}$$ причем соленоидально, но не ~~потенциально~~	**№ 12.2.** Выяснить, при каких условиях *вихревое* поле $\vec{H}(\vec{d})=\left[\vec{e},\,f(d)\vec{d}\right],\quad \vec{d}=\left[\left[\vec{e},\vec{r}\right],\vec{e}\right]$ удовлетворяет условиям $$\operatorname{div}\vec{H}(\vec{d})=0 \qquad \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{d})=\vec{0}$$ причем соленоидально, но не ~~потенциально~~

Теория



1° *Векторное поле* $\vec{F}_S(\vec{r})$ *называется* ***соленоидальным*** *в объеме* V, *если* ***поток*** *поля через любую* ***замкнутую поверхность*** $S\subset V$ *равен* ***нулю***

$$\oiint\limits_S \left(\vec{F}_S(\vec{r}),\,d\vec{S}\right)=0 \quad \forall S\subset V$$

Теорема *(критерий соленоидальности) Для того,*

1) чтобы поле $\vec{F}_S(\vec{r})$ *было соленоидальным*
$\Leftrightarrow$
1) чтобы $\operatorname{div}\vec{F}_S(\vec{r})=0$

Замечание. *Объем* V *должен быть* ***объемно*** *связным, т.е. любую замкнутую поверхность можно стянуть в точку, оставаясь в* V.

Теорема *(характерное свойство соленоидального поля) Для того,*

1) чтобы поле $\vec{F}_S(\vec{r})$ *было соленоидальным*
$\Leftrightarrow$
1) чтобы поле $\vec{F}_S(\vec{r})=\operatorname{rot}\vec{G}(\vec{r})$

Векторное поле $\vec{G}(\vec{r})$ *называется* ***векторным потенциалом*** *векторного поля* $\vec{F}_S(\vec{r})$ *и определяется с точностью до градиента* $\operatorname{grad} f(\vec{r})$ *некоторого скалярного поля (т.е. с точностью до потенциального поля).*

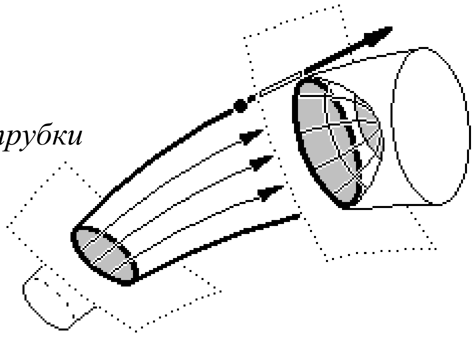
Следствие

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\,\vec{F}(\vec{r})=0}$$

Поток *соленоидального поля* ***не зависит*** *от формы* S *поверхности, определяясь только границей* L *поверхности* S_L*, и равен циркуляции векторного потенциала по* L

$$\iint\limits_{S_L} \left(\vec{\boldsymbol{F}}_S(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{S}} \right) = \oint\limits_L \left(\vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{L}} \right)$$

Более того, поток через любое сечение векторной трубки



$$\iint\limits_S \left(\vec{\boldsymbol{F}}_S(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{S}} \right) = const$$

Отсюда вытекает, что векторные трубки (иногда говорят о векторных линиях) не могут ни начинаться, ни кончаться внутри поля, т.е. они либо замкнуты, либо имеют концы на границе поля, либо имеют бесконечные ветви.

2° ***Потенциальное*** *и* ***соленоидальное*** *векторное поле* $\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}})$ *называется* ***лапласовым***

Из цепочки эквивалентных условий (если объем V *-* ***объемно*** *и* ***поверхностно*** *связный)*

$$\left[\begin{array}{l} \oint\limits_L \left(\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{L}} \right) = 0 \\ \oiint\limits_S \left(\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{S}} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{0}} \\ \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}) \\ \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \end{array} \right.$$

вытекает, что лапласово поле является градиентом ***гармонической*** *функции*

$$\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}), \qquad \text{где} \qquad \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}) = \Delta f(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$$

Теорема

Любое векторное поле $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *допускает разложение в сумму* ***потенциального*** *и* ***соленоидального*** *полей*

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{F}}_P(\vec{\boldsymbol{r}}) + \vec{\boldsymbol{F}}_S(\vec{\boldsymbol{r}}) = \left(\vec{\boldsymbol{F}}_P(\vec{\boldsymbol{r}}) + \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) \right) + \left(\vec{\boldsymbol{F}}_S(\vec{\boldsymbol{r}}) - \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) \right)$$

Это разложение единственно с точностью до ***лапласова*** *поля*

3^{o} Во многих вопросах электродинамики и гидродинамики часто встречаются задачи о восстановлении векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}}$ по наперед заданным ***дивергенции*** *и* ***ротору***

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{F}} = q \\ \\ \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}} \end{array}\right.$$

В отличие от скалярного поля q векторное поле $\vec{\boldsymbol{j}}$ не может быть совсем произвольным

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{j}} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}} = 0$$

Из цепочки эквивалентных условий

$$\left[\begin{array}{llll} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{j}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{j}} = \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{G}} & & & \\ \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}} & \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}} = \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{G}} & \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{G}} + \operatorname{grad} f & \\ \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{F}} = q & & & \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} (\vec{\boldsymbol{G}} + \operatorname{grad} f) = q \end{array}\right.$$

вытекает, что поставленная задача сводится к решению уравнения Пуассона

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = q - \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{G}} = p \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f = p$$

Замечание. *В случае ограниченной области V дополнительное задание на границе S_V нормальной составляющей восстанавливаемого поля обеспечивает его единственность*

$$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{F}} = q & \\ \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}} & \left(\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{j}} = 0 \right) \\ \left(\vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{n}} \right) \Big|_{\vec{\boldsymbol{r}} \in S_V} = g & \left(\oiint\limits_{S_V} g \, dS = \iiint\limits_{V} q \, dV \right) \end{array}\right.$$

Действительно, если $\vec{\boldsymbol{F}}_1$, $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ два решения, то разность $\vec{\boldsymbol{F}}_L = \vec{\boldsymbol{F}}_1 - \vec{\boldsymbol{F}}_2$ представляет собой лапласово поле, "скользящее" вдоль границы

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{F}}_L = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}_L = \vec{\boldsymbol{0}} \\ \left(\vec{\boldsymbol{F}}_L, \vec{\boldsymbol{n}} \right) \Big|_{\vec{\boldsymbol{r}} \in S_V} = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}), \qquad \text{где} \qquad \left[\begin{array}{l} \Delta f(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \\ \\ f'_{\vec{\boldsymbol{n}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \Big|_{\vec{\boldsymbol{r}} \in S_V} = 0 \end{array}\right.$$

Поскольку решением однородной задачи Неймана являются только $f(\vec{\boldsymbol{r}}) \equiv const$, то

$$\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla const = \vec{\boldsymbol{0}}, \qquad \forall \vec{\boldsymbol{r}} \in V$$

Замечание. *Забегая вперед, приведем два важных физических примера.*

Электростатическое *поле* $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, *создаваемое распределенным в объеме* V *зарядом с плотностью* $q(\vec{\boldsymbol{r}})$, ***потенциально*** *и равно*

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \iiint\limits_V q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\, \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}|^3}\, dV_\rho = -\operatorname{grad} \iiint\limits_V \frac{q(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}|}\, dV_\rho \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 4\pi q(\vec{\boldsymbol{r}}) \\ \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{0}} \end{array} \right.$$

Магнитостатическое *поле* $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, *создаваемое циркулирующим в объеме* V *стационарным током с плотностью* $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$: $(\nabla, \vec{\boldsymbol{j}})\Big|_V = (\boldsymbol{n}, \vec{\boldsymbol{j}})\Big|_{S_V} = 0$, ***соленоидально*** *и равно*

$$\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \iiint\limits_V \left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\, \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}|^3} \right] dV_\rho = \operatorname{rot} \iiint\limits_V \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}|}\, dV_\rho \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 4\pi \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \end{array} \right.$$

Следовательно, одним из решений задачи о восстановлении векторного поля по заданным div *и* rot *(с точностью до лапласового поля) в этом случае является*

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \iiint\limits_V \frac{q(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}|}\, dV_\rho}_{\vec{\boldsymbol{F}}_P} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint\limits_V \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}|}\, dV_\rho}_{\vec{\boldsymbol{F}}_S}$$

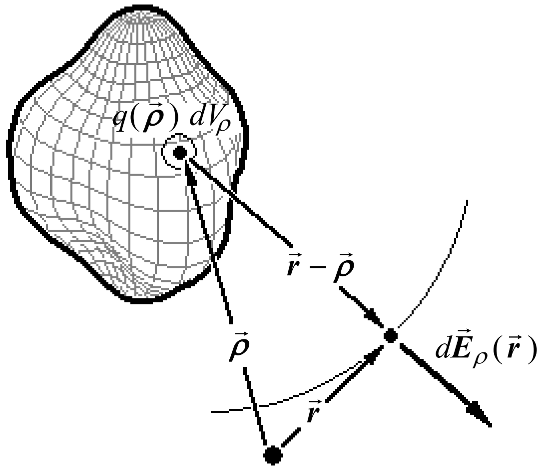
13. Электростатическое поле

Условия

<table>
<tr><td colspan="2">№ 13.1. Найти электростатическое поле $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ равномерно заряженного шара с объемной плотностью q</td></tr>
<tr><td>вне шара</td><td>внутри шара</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 13.2. Найти электростатическое поле $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ равномерно заряженной сферы с поверхностной плотностью q</td></tr>
<tr><td>вне сферы</td><td>внутри сферы</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 13.3. Найти электростатическое поле $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ равномерно заряженных бесконечных пластин конденсатора с поверхностной плотностью $\pm q$</td></tr>
<tr><td>вне конденсатора</td><td>внутри конденсатора</td></tr>
</table>

Теория

Согласно закону ***Кулона*** *элементарный заряд* $q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,dV_\rho$ *, находящийся в точке* $\vec{\boldsymbol{\rho}}$ *со “сферическим объемом”* dV_ρ *и плотностью* $q(\vec{\boldsymbol{\rho}})$*, создает в точке* $\vec{\boldsymbol{r}}$ *элементарное электростатическое поле с напряженностью*



$$d\vec{\boldsymbol{E}}_\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}}{\left|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\right|^3}\,dV_\rho$$

так что суммарное поле в точке $\vec{\boldsymbol{r}}$ *равно*

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \iiint\limits_V q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}}{\left|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\right|^3}\,dV_\rho$$

Найдем ***дивергенцию*** *электростатического поля*

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol{r}}_0}\frac{\oint\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right)dS_r}{\left|V_\varepsilon\right|}$$

Имеем

$$\oint\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right)dS_r =$$

$$= \oint\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\,\iiint\limits_V q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}}{\left|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\right|^3}\,dV_\rho\right)dS_r = \iiint\limits_{(V\setminus V_\varepsilon)\cup V_\varepsilon} q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,\underbrace{\oint\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\left(\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\,\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\right)}{\left|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\right|^3}dS_r}_{\begin{cases}0, & \vec{\boldsymbol{\rho}}\notin V_\varepsilon\\ 4\pi, & \vec{\boldsymbol{\rho}}\in V_\varepsilon\end{cases}}\,dV_\rho =$$

$$= \iiint\limits_{V\setminus V_\varepsilon} q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\cdot 0\;dV_\rho + \iiint\limits_{V_\varepsilon} q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\cdot 4\pi\;dV_\rho = 4\pi q(\vec{\boldsymbol{\xi}})\left|V_\varepsilon\right| \qquad \left(\vec{\boldsymbol{\xi}}\in V_\varepsilon\right)$$

“Расширяя” объем V *с* $q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\equiv 0$*, всегда можно считать точку* $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ *находящейся внутри* V *Следовательно,*

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol{r}}_0}\frac{4\pi q(\vec{\boldsymbol{\xi}})\left|V_\varepsilon\right|}{\left|V_\varepsilon\right|} = 4\pi q(\vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

Найдем ***ротор*** *электростатического поля*

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}_0)=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{r}_0}\frac{\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\left[\,\vec{n}(\vec{r}),\,\vec{E}(\vec{r})\,\right]dS_r}{|V_\varepsilon|}$$

Имеем

$$\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\left[\,\vec{n}(\vec{r}),\,\vec{E}(\vec{r})\,\right]dS_r=$$

$$=\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\left[\,\vec{n}(\vec{r}),\,\iiint_V q(\vec{\rho})\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho\,\right]dS_r=\iiint_V q(\vec{\rho})\,\underbrace{\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\frac{\left[\,\vec{n}(\vec{r}),\,\vec{r}-\vec{\rho}\,\right]}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dS_r}_{=\,\vec{0},\ \forall\vec{\rho}}\,dV_\rho$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}_0)=0$$

Полученные значения **div** *и* **rot** *напряженности* $\vec{E}(\vec{r})$ *называются дифференциальными уравнениями электростатического поля, равносильные интегральным*

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r})=4\pi q(\vec{r})\\[2ex]\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r})=\vec{0}\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\displaystyle\oint\!\!\oint_S\left(\vec{E}(\vec{r}),\,d\vec{S}\right)\ \left(=\iiint_{V_S}\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r})\,dV\right)=4\pi\iiint_{V_S}q(\vec{r})\,dV\\[3ex]\displaystyle\oint_L\left(\vec{E}(\vec{r}),\,d\vec{L}\right)\ \left(=\iint_{S_L}\left(\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}),\,d\vec{S}\right)\right)=0\end{array}\right.$$

представляющим собой известные из опыта ***законы электростатического поля***

1) ***(Закон Гаусса) Поток электростатического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся внутри поверхности, умноженному на*** 4π
2) ***(Независимость работы от формы пути)***
   Циркуляция электростатического поля вдоль замкнутого контура равна нулю

Из условия $\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r})=\vec{0}$ *вытекает* ***потенциальность*** *электростатического поля. Найдем его* ***скалярный потенциал*** $\vec{E}(\vec{r})=-\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r})=\iiint_V q(\vec{\rho})\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho=-\iiint_V\nabla_r\frac{q(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho=-\nabla_r\iiint_V\frac{q(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho$$

$\Rightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r})=-\operatorname{grad}\iiint_V\frac{q(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho\quad\Rightarrow\quad\varphi(\vec{r})=\iiint_V\frac{q(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho$$

14. Магнитостатическое поле

Условия

№ 14.1. Найти магнитостатическое поле $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ бесконечного проводника с постоянным *объемным* током плотностью $\vec{\boldsymbol{j}} = j \cdot \vec{\boldsymbol{e}}$	
вне проводника	внутри проводника
№ 14.2. Найти магнитостатическое поле $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ бесконечного проводника с постоянным *поверхностным* током плотностью $\vec{\boldsymbol{j}} = j \cdot \vec{\boldsymbol{e}}$	
вне проводника	внутри проводника
№ 14.3. Найти магнитостатическое поле $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ бесконечной цилиндрической катушки с *объемным вихревым* током плотностью $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}) = j\left[\,\vec{\boldsymbol{e}},\ \dfrac{\vec{\boldsymbol{d}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{d}\,\right]$	
вне катушки	внутри катушки
№ 14.4. Найти магнитостатическое поле $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ бесконечной цилиндрической катушки с *поверхностным вихревым* током плотностью $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}) = j\left[\,\vec{\boldsymbol{e}},\ \dfrac{\vec{\boldsymbol{d}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{d}\,\right]$	
вне катушки	внутри катушки

Теория

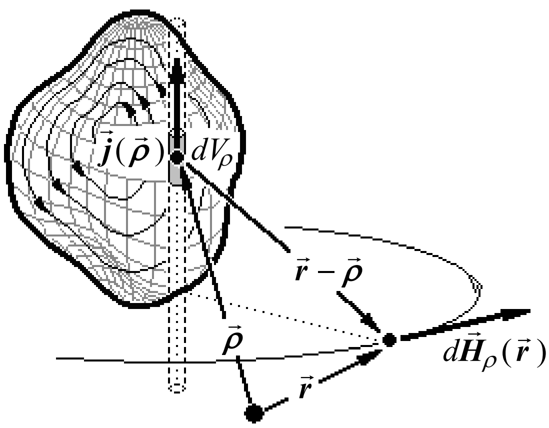
Согласно закону ***Био-Савара-Лапласа*** *элементарный ток* $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,dV_\rho$, *находящийся в точке* $\vec{\boldsymbol{\rho}}$ *с “цилиндрическим объемом”* dV_ρ *векторной трубки и плотностью тока* $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}) = q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$ *(*$q(\vec{\boldsymbol{\rho}})$*- плотность движущихся со скоростью* $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$ *зарядов) создает в точке* $\vec{\boldsymbol{r}}$ *элементарное магнитное поле с напряженностью*

$$d\vec{\boldsymbol{H}}_\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \left[\,\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}}{|\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\,|^3}\,\right] dV_\rho$$

так что суммарное поле, создаваемое непрерывно циркулирующим в объеме V *стационарным током с плотностью* $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$

$$\left(\nabla,\ \vec{\boldsymbol{j}}\,\right)\Big|_V = \left(\,\vec{\boldsymbol{n}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\,\right)\Big|_{S_V} = 0$$

в точке $\vec{\boldsymbol{r}}$ *равно*



$$\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \iiint\limits_V \left[\,\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}}{|\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\,|^3}\,\right] dV_\rho$$

Найдем ***дивергенцию*** *магнитостатического поля*

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{\boldsymbol{r}}_0} \frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\,\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right) dS_r}{|\,V_\varepsilon\,|}$$

Имеем
$$\oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{H}(\vec{r}\,) \right) dS_r =$$

$$= \oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\vec{n}(\vec{r}\,),\ \iiint\limits_V \frac{\left[\vec{j}(\vec{\rho}),\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right]}{\left| \vec{r}-\vec{\rho} \right|^3}\, dV_\rho \right) dS_r = \oiint\limits_{S_\varepsilon} \iiint\limits_V \frac{\left(\vec{n}(\vec{r}\,),\, \left[\vec{j}(\vec{\rho}),\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right] \right)}{\left| \vec{r}-\vec{\rho} \right|^3}\, dV_\rho\, dS_r =$$

$$= -\iiint\limits_V \oiint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\left(\vec{j}(\vec{\rho}),\, \left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right] \right)}{\left| \vec{r}-\vec{\rho} \right|^3} dS_r\, dV_\rho = -\iiint\limits_V \left(\vec{j}(\vec{\rho}),\, \underbrace{\oiint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right]}{\left| \vec{r}-\vec{\rho} \right|^3} dS_r}_{\vec{0},\ \ \forall \vec{\rho}} \right) dV_\rho = 0$$

Следовательно,
$$\operatorname{div} \vec{H}(\vec{r}_0) = 0$$

Найдем ***ротор*** *магнитостатического поля*

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}_0) = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{r}_0} \frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon} \left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{H}(\vec{r}\,) \right] dS_r}{\left| V_\varepsilon \right|}$$

Имеем
$$\oiint\limits_{S_\varepsilon} \left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{H}(\vec{r}\,) \right] dS_r =$$

$$= \oiint\limits_{S_\varepsilon} \left[\vec{n}(\vec{r}\,),\ \iiint\limits_V \frac{\left[\vec{j}(\vec{\rho}),\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right]}{\left| \vec{r}-\vec{\rho} \right|^3}\, dV_\rho \right] dS_r = \oiint\limits_{S_\varepsilon} \iiint\limits_V \frac{\left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \left[\vec{j}(\vec{\rho}),\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right] \right]}{\left| \vec{r}-\vec{\rho} \right|^3}\, dV_\rho\, dS_r = \to$$

Раскрывая двойные векторные произведения и получив связь между ними

$$\left[\vec{n},\, \left[\vec{j},\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right] \right] = \vec{j}\left(\vec{n},\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right) - (\vec{r}-\vec{\rho})\left(\vec{n},\, \vec{j} \,\right)$$

$$\left[\vec{j},\, \left[\vec{n},\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right] \right] = \vec{n}\left(\vec{j},\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right) - (\vec{r}-\vec{\rho})\left(\vec{j},\, \vec{n} \,\right)$$

$\Rightarrow$

$$\left[\vec{n},\, \left[\vec{j},\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right] \right] = \vec{j}\left(\vec{n},\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right) + \left[\vec{j},\, \left[\vec{n},\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right] \right] - \vec{n}\left(\vec{j},\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right)$$

перейдем к рассмотрению трех соответствующих интегралов

$$a) \to = \oiint\limits_{S_\varepsilon} \iiint\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{\rho})\left(\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right)}{\left| \vec{r}-\vec{\rho} \right|^3}\, dV_\rho\, dS_r = \iiint\limits_{(V \setminus V_\varepsilon) \cup V_\varepsilon} \vec{j}(\vec{\rho}) \underbrace{\oiint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\left(\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{r}-\vec{\rho} \,\right)}{\left| \vec{r}-\vec{\rho} \right|^3} dS_r}_{\begin{cases} 0, & \vec{\rho} \notin V_\varepsilon \\ 4\pi, & \vec{\rho} \in V_\varepsilon \end{cases}} dV_\rho =$$

$$= \iiint\limits_{V \setminus V_\varepsilon} \vec{j}(\vec{\rho}) \cdot 0\ dV_\rho + \iiint\limits_{V_\varepsilon} \vec{j}(\vec{\rho}) \cdot 4\pi\ dV_\rho = 4\pi \vec{j}(\vec{\xi}\,) \left| V_\varepsilon \right| \qquad \left(\vec{\xi} \in V_\varepsilon \right)$$

“Расширяя” объем V с $\vec{j}(\vec{\rho}) \equiv 0$*, всегда можно считать точку* $\vec{r}_0$ *находящейся внутри V*

$$b)\to=\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon}\iiint_V \frac{\left[\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\ \left[\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\right]\right]}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}|^3}\,dV_\rho\,dS_r=\iiint_V\left[\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\ \underbrace{\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon}\frac{\left[\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\right]}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}|^3}dS_r}_{\vec{\boldsymbol 0},\ \forall\vec{\boldsymbol\rho}}\right]dV_\rho=\vec{\boldsymbol 0}$$

$$c)\to=\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon}\iiint_V \frac{\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})\left(\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\ \vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\right)}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}|^3}\,dV_\rho\,dS_r=\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon}\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})\iiint_V\left(\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\ \nabla_\rho\frac{1}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}|}\right)dV_\rho\,dS_r=\vec{\boldsymbol 0}$$

Последнее вытекает из интегральной формулы, связывающей плотность тока $\vec{\boldsymbol j}$, *циркулирующего в объеме* V, *с некоторым произвольным скалярным полем* f

$$0=\oint\!\!\!\oint_{S_V}\Big(\underbrace{\vec{\boldsymbol n},\ \vec{\boldsymbol j}}_{0}\cdot f\Big)dS=\iiint_V\left(\nabla,\ \overset{\downarrow}{\overline{\vec{\boldsymbol j}\cdot f}}\right)dV=\iiint_V\Big(\underbrace{(\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol j}})}_{0}\cdot f+\big(\nabla\overset{\downarrow}{f},\ \vec{\boldsymbol j}\big)\Big)dV=\iiint_V\left(\vec{\boldsymbol j},\ \nabla f\right)dV$$

Кстати, полагая $f=\left(\vec{\boldsymbol c},\ \vec{\boldsymbol r}\right)\ \Rightarrow\ \nabla f=\vec{\boldsymbol c}$ *получаем, что полный ток* $\iiint_V \vec{\boldsymbol j}\,dV=\vec{\boldsymbol 0}$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r}_0)=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol r}_0}\frac{4\pi\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\xi})\,|V_\varepsilon|}{|V_\varepsilon|}=4\pi\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol r}_0)$$

Полученные значения **div** *и* **rot** *напряженности* $\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})$ *называются дифференциальными уравнениями магнитостатического поля, равносильные интегральным*

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=0\\[2ex] \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=4\pi\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol r})\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\oint\!\!\!\oint_S\left(\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S}\right)\quad\left(=\iiint_{V_S}\operatorname{div}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})\,dV\right)=0\\[2ex] \oint_L\left(\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol L}\right)\quad\left(=\iint_{S_L}\left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S}\right)\right)=4\pi\iint_{S_L}\left(\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S}\right)\end{array}\right.$$

представляющим собой известные из опыта ***законы магнитостатического поля***

1) ***(Отсутствие магнитных зарядов)***
   Поток постоянного магнитного поля через замкнутую поверхность равен нулю
2) ***(Закон Ампера) Циркуляция магнитного поля вдоль замкнутого контура равна полному току, пронизывающему поверхность, опирающуюся на контур, умноженному на*** 4π

Из условия $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=0$ *вытекает* ***соленоидальность*** *магнитостатического поля. Найдем его* ***векторный потенциал*** $\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol A}(\vec{\boldsymbol r})$

$$\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=\iiint_V\frac{\left[\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\right]}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}|^3}\,dV_\rho=\iiint_V\left[\nabla_r,\ \frac{\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho})}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}|}\right]dV_\rho=\left[\nabla_r,\ \iiint_V\frac{\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho})}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}|}\,dV_\rho\right]$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=\operatorname{rot}\iiint_V\frac{\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho})}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}|}\,dV_\rho\quad\Rightarrow\quad\vec{\boldsymbol A}(\vec{\boldsymbol r})=\iiint_V\frac{\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho})}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}|}\,dV_\rho$$