ISSN 0321—4427

ВЫПУСК

34

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 512.86:513.88:519.4

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

СИНГУЛЯРНЫЕ ЧИСЛА ОПЕРАТОРОВ В УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Работа посвящена построению неархимедова аналога теории сингулярных чисел матриц. Пусть K — поле с ультраметрическим ($|\alpha+\beta|\leqslant\max\{|\alpha|, |\beta|\}$) абсолютным значением, E — неархимедово нормированное ($\|x+y\|\leqslant\max\{\|x\|, \|y\|\}$), n-мерное, линейное пространство над K. Система векторов $x_1, \ldots, x_m$ называется ортогональной, если для любых скаляров $t_1, \ldots, t_m$

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} t_i x_i\right\| = \max\{|t_i|\,\|x_i\| : 1\leqslant i\leqslant m\}.$$

В дальнейшем будет предполагаться, что пространство E — евклидово, т. е. обладает ортонормированным базисом. Важную роль в его изучении играет пространство $\bar{E}=\{x\in E:\|x\|\leqslant 1\}/\{x\in$

$\in E: \|x\| < 1\}$ классов вычетов пространства E над полем $\overline{K}$ классов вычетов поля K. Известно, что нормированная система векторов $x_1, \ldots, x_m$ ортогональна тогда и только тогда, когда система векторов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ линейно независима в $\overline{E}$. Норма линейного оператора определяется обычным образом, и равна максимуму модулей матричных элементов его матрицы в ортонормированном базисе. Матрица называется унитарной, если система ее строк (столбцов) ортонормированна, оператор U называется унитарным, если $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$. Известно, что матрица унитарна тогда и только тогда, когда $\|U\| \leqslant 1 = |\det U|$.

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E. Детерминантом Грама системы векторов $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ назовем величину

$$G(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= \max \left\{ \left| \det \begin{pmatrix} t_{j_1 1} & \ldots & t_{j_1 m} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ t_{j_m 1} & \ldots & t_{j_m m} \end{pmatrix} \right| : 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n \right\}.$$

Пользуясь формулой Бинэ — Коши, можно показать, что она не зависит от выбора ортонормированного базиса. В случае n векторов имеем $G(x_1, \ldots, x_n) = |\det T|$, где T — матрица системы векторов в ортонормированном базисе.

Теорема 1. *Для любой системы векторов выполняется «неравенство Адамара»*

$$G(x_1, \ldots, x_m) \leqslant \|x_1\| \ldots \|x_m\|. \tag{1}$$

Для системы ненулевых векторов равенство $G(x_1, \ldots, x_m) = \|x_1\| \ldots \|x_m\|$ *имеет место тогда и только тогда, когда эта система векторов ортогональна.*

Доказательство неравенства (1) получается с помощью ультраметрического неравенства. Далее, в силу однородности, можно считать, что $\|x_1\| = \ldots = \|x_m\| = 1$. Тогда $|t_{ij}| \leqslant 1$. Система $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ортогональна тогда и только тогда, когда система векторов

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{t}_{ji} \bar{e}_j \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

линейно независима, т. е. ранг матрицы $(\bar{t}_{ji})$ равен m. Это значит, что найдется такой набор $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_m \leqslant n$, что $\det(\bar{t}_{k_j i}) \neq \bar{0}$ или что $|\det(t_{k_j i})| = 1$. Поскольку остальные миноры матрицы T не превосходят по абсолютной величине 1, то последнее условие равносильно тому, что $G(x_1, \ldots, x_m) = 1$.

Лемма 1. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — ортогональная система столбцов в K_n. Тогда существует такая подстановка τ, что $\|A_i\| = |a_{\tau(i) i}|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

Доказательство. Пусть

$$\max\left\{\prod_{i=1}^{n}|a_{\sigma(i)i}|:\sigma\in S_n\right\}=\prod_{i=1}^{n}|a_{\tau(i)i}|.$$

С помощью теоремы 1 имеем

$$|\det A|\leqslant\prod_{i=1}^{n}|a_{\tau(i)i}|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\|A_i\|=G(A_1,\ldots,A_n)=|\det A|.$$

Следовательно, во всех неравенствах $|a_{\tau(i)i}|\leqslant\|A_i\|$ имеют место знаки равенства.

Отметим, что другое определение детерминанта Грама было дано в работе [2], однако оно не подходит для наших целей.

Оператор назовем нормальным, если он обладает ортогональным базисом из собственных векторов. В отличие от классического случая ортонормированный базис треугольного представления нормального оператора не обязан быть собственным. Следующее утверждение является неархимедовым аналогом минимаксного свойства собственных значений самосопряженного оператора.

Лемма 2. *Пусть собственные значения нормального оператора занумерованы в порядке невозрастания их модулей. Тогда*

$$|\lambda_k|=\max\left\{\min\left\{\frac{\|Rx\|}{\|x\|}:x\in L\right\}:\dim L=k\right\}.$$

Доказательство этого, а также двойственного ему соотношения близко к классическому. Однако ультраметрического аналога перемежаемости собственных значений не существует. Рассмотрим, например, оператор R с матрицей в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$, равной

$$\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & -(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1) & \lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Оператор R нормален при условии $|\lambda_i|=|\lambda_i-\lambda_j|=1$ $(i\neq j)$. Пусть P — ортопроектор на векторы e_2, e_3 параллельно e_1. Ограничение оператора PR на линейную оболочку векторов e_2, e_3 имеет матрицу, равную $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. Следовательно, PR не является нормальным оператором.

Теорема 2. *(О существовании «полярного разложения»). Для любого линейного оператора A в ультраметрическом евклидовом пространстве существуют такой унитарный оператор U и нормальный оператор R, что $A=UR$.* (В бесконечномерном случае этот результат установлен в работе [3].)

Матрицу оператора A в ортонормированном базисе можно привести к диагональному виду элементарными преобразованиями с унитарными преобразующими матрицами. Поэтому $A=U_1DU_2$, где U_1, U_2 — унитарные операторы, D — нормальный. Следовательно, $A = UR$, где $U = U_1U_2$ — унитарный, $R = U_2^{-1}DU_2$ — нормальный оператор.

Можно показать, что множитель R набором модулей собственных значений не определяется однозначно.

Выпуклой оболочкой системы векторов называется множество

$$\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_m\} = \left\{\sum_{i=1}^{m} t_i x_i : |t_i| \leqslant 1\right\}.$$

Например, единичный шар пространства E является выпуклой оболочкой любого ортонормированного базиса.

Лемма 3. *Если выпуклые оболочки двух ортогональных систем векторов равны, то нормы векторов с точностью до нумерации совпадают.*

Доказательство достаточно провести для ортогональных систем из n столбцов. Из равенства $\operatorname{conv}\{A_1, \ldots, A_n\} = \operatorname{conv}\{B_1, \ldots, B_n\}$ вытекает существование такой унитарной матрицы $T = (t_{ij})$, что $A_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} B_k$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Далее $\|A_1\| \ldots \|A_n\| = |\det A| = |\det(BT)| = |\det B| = \|B_1\| \ldots \|B_n\|$. По лемме 1 существует такая подстановка τ, что $|t_{\tau(i)i}| = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Имеем $\|A_i\| = \max\{|t_{ki}| \|B_k\| : 1 \leqslant k \leqslant n\} \geqslant \|B_{\tau(i)}\|$. Если хотя бы одно из этих неравенств было строгое, то перемножая их, получили бы противоречие с равенством выше.

Теорема 3. *Пусть U, V — унитарные операторы, R, S — нормальные операторы со спектрами $\sigma(R) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\sigma(S) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Если $UR = VS$, то существует такая подстановка τ, что $|\lambda_i| = |\mu_{\tau(i)}|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

Доказательство. Пусть $\{a_i\}_1^n$, $\{b_i\}_1^n$ — ортонормированные базисы из собственных векторов операторов R, S. Действуя равенством $UR = VS$ на единичный шар пространства E, получим

$$\operatorname*{conv}_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\lambda_i U a_i\} = \operatorname*{conv}_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\mu_i V b_i\}.$$

По лемме 3 найдется такая подстановка τ, что $|\lambda_i| = \|\lambda_i U a_i\| = \|\mu_{\tau(i)} V b_{\tau(i)}\| = |\mu_{\tau(i)}|$.

Пусть $A = UR$ — некоторое полярное разложение оператора A, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис собственных векторов оператора $R : Re_i = \lambda_i e_i$. Сингулярными числами оператора A назовем величины $s_i(A) = |\lambda_i|$. Будем считать, что они занумерованы в порядке не возрастания. Пусть $\{f_i\}_1^n$ — базис, сопряженный к $\{e_i\}_1^n$. Имеет место следующий аналог разложения Шмидта [1]:

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)\, U e_k.$$

Теорема 4.

$$s_k(A) = \max\left\{\min\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in L\right\} : \dim L = k\right\}.$$

Из теоремы 4 вытекают аппроксимационные свойства s-чисел в форме, совпадающей с классическими [1, гл. 8, задачи 123, 124].

Теорема 5. (Аналог теоремы Фань Цзи [1, гл. 3, задача 239].)

$$\min \sum_{i=1}^{r} \| Ax_i \| = \sum_{j=n-r+1} s_j(A),$$

где минимум берется по всевозможным ортонормированным системам $\{x_i\}_1^r$.

Доказательство. Пусть t_{ki} — координаты x_i в базисе $\{e_i\}_1^n$. По лемме 1 найдется такая подстановка τ, что $1 = \|x_i\| = |t_{\tau(i)i}|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Имеем $\|Ax_i\| = \max\{s_k(A)|t_{ki}| : 1 \leqslant k \leqslant n\} \geqslant s_{\tau(i)}(A)$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{r} \|Ax_i\| \geqslant \sum_{i=1}^{r} s_{\tau(i)}(A) \geqslant \sum_{j=n-r+1}^{n} s_j(A).$$

Минимум достигается на векторах $e_{n-r+1}, \ldots, e_n$. Отметим, что соответствующий максимум сумм равен $r\|A\|$.

Теорема 6. (Аналог неравенства Хорна.) *При $m \leqslant n$ выполняется $G(Ax_1, \ldots, Ax_m) \leqslant s_1(A) \ldots s_m(A) G(x_1, \ldots, x_m)$.*

Теорема 7. *Пусть $\alpha_k(A)$ — собственные значения оператора A, занумерованные в порядке не возрастания модулей. Тогда*

$$|\alpha_1(A) \ldots \alpha_m(A)| \leqslant s_1(A) \ldots s_m(A) \quad (m \leqslant n). \tag{2}$$

Доказательства последних двух теорем подобны классическим.

Теорема 8. *«Неравенства Вейля» (2) точны.*

Это аналог теоремы Хорна [1, гл. 7, задача 140]. В доказательстве ограничимся случаем, когда все $\lambda_k \neq 0$. Пусть σ_k — k-я элементарная симметрическая функция величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Пусть $a_{1k} = (-1)^{k-1}\sigma_k\lambda_1^{-1} \ldots \lambda_{k-1}^{-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $a_{k+1\,k} = \lambda_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, $a_{ij} = 0$ (в остальных случаях) — матричные элементы оператора A в ортонормированном базисе. Пусть $R = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — нормальный оператор, $U = AR^{-1}$. Если α_k, λ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ удовлетворяют «неравенствам Вейля», то оператор U унитарен. Поэтому $s_k(A) = |\lambda_k|$, $\alpha_k(A) = \alpha_k$.

Можно показать, что из равенств $s_k(A) = |\alpha_k(A)|$ не следует, что оператор A нормален.

Список литературы: 1. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. М., Наука, 1969. 476 с. 2. *Treiber D.* Uber orthogonalisierbare nicht-archimedische Banach-räume. — Archiv der Mathematik, 1973, Bd 24, S. 71-80. 3. *Put M. van der.* The ring of bounded operators on a non-archimedean normed linear space. — Indag. Math., 1968, vol. 30, № 3, p. 260-264.

Поступила 30 ноября 1978 г.

УДК 512.86:513.88:519.4

Сингулярные числа операторов в ультраметрических евклидовых пространствах. Калюжный В. Н.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 34. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 64—68.

Определяются и изучаются сингулярные числа операторов в конечномерных неархимедово нормированных пространствах, обладающих ортонормированным базисом.
Список лит.: 3 назв.