ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. Г. Мильграм

Будем рассматривать семейство операторов вида $A_p = A_0 + pcJ_0 \ (c > 0)$, действующих в пространстве H и зависящих от вещественного параметра p, где A_0 — ограниченный эрмитов оператор, а J_0 — оператор проектирования на некоторое одномерное подпространство (c — положительная постоянная величина). Эрмитова матрица A_p линейна относительно параметра p.

Как известно, имеет место следующая теорема Г. Вейля [7]: если к ограниченному самосопряженному оператору A прибавить вполне непрерывный самосопряженный оператор B, то предельный спектр оператора A при этом не изменится. Из этой теоремы следует, что может меняться только чисто точечный спектр конечного ранга оператора A_p, т. е. дискретный спектр*.

Мы будем говорить, что семейство операторов A_p *линеаризует* заданную функцию $\lambda = F(p)$ (не обязательно однозначную), если значения этой функции в каждой точке p совпадают с дискретным спектром оператора A_p. Ниже найдены необходимые и достаточные условия, при которых функцию можно линеаризовать. Частный случай этой задачи был рассмотрен в работах М. С. Лившица [4]. В дальнейшем применяется метод, использованный в этих работах.

1. Рассмотрим однозначную или многозначную функцию $\lambda = F(p)$ вещественного переменного p, принимающую вещественные значения и обозначим соответственно через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ — область определения и область значений этой функции.

Пусть $p = p(\lambda)$ — обратная функция. Мы будем говорить, что функция $\lambda = F(p)$ принадлежит классу $N^{(-1)}$, если функция $q(\lambda) = \frac{-1}{p(\lambda)}$ от переменной λ однозначна и представима в виде

$$q(\lambda) = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda} \quad (\lambda \in \mathfrak{M}),$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая, ограниченная функция. Область определения ($\mathfrak{M}$) функции $q(\lambda)$ состоит из интерваьов $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ и точек постоянства функции $\sigma(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$.

Замечание. Для семейства операторов $A_p = A_0 + pJ_0$ при условии, что A_0 оператор с простым спектром, имеет место следующее утверждение: если u_0, базисный орт одномерного пространства J_0H, является

* Все точки непрерывного спектра, а также предельные точки точечного спектра и собственные значения бесконечной кратности относятся к предельному спектру.

порождающим элементом для оператора A_0, то u_0 также есть порождающий элемент для оператора A_p. Действительно, допустим, что u_0 — является порождающим элементом оператора A_0, следовательно, линейная замкнутая оболочка $A_0^k u_0$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ образует все пространство H_0. Легко показать по индукции, что векторы $A_0^n u_0$ выражаются в виде линейных комбинаций векторов $A_p^k u_0$ $(k = 0, 1, 2 \ldots n)$. Для $n = 1$ это очевидно. Если $A_0^n u_0 = \sum c_k A_p^k u_0$, то, применяя к обеим частям A_0 и используя соотношение $A_0 f = A_p f - p(f, u_0) u_0$, получим

$$A_0^{n+1} u_0 = \sum_{k=0}^{n} c_k A_p^{k+1} u_0 - p \sum_{k=0}^{n} c_k (A_p^k u_0, u_0) u_0.$$

Пусть теперь A_0 — эрмитов оператор, не обязательно имеющий простой спектр в пространстве H. Пространство H_0, образованное линейной замкнутой оболочкой векторов $A_0^k u_0$, приводит семейство операторов A_p, и u_0 будет порождающим элементом для семейства операторов A_p. Представим пространство H как прямую сумму

$$H = H_0 \oplus H_1.$$

Пусть $A_p^{(0)}$ и $A_p^{(1)}$ — части оператора A_p, лежащие соответственно в H_0, H_1, тогда

$$A_p g = A_p^{(0)} g_1 + A_p^{(1)} g_2,$$

где $g = g_1 + g_2$ и $g_1 \in H_0$, $g_2 \in H_1$.

Очевидно, что оператор $A_p^{(1)}$ не зависит от параметра p. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы оператор A_0 в пространстве H имел простой спектр и элемент u_0 являлся порождающим. Если этого не потребовать, то все рассуждения будут верны для пространства H_0.

Имеет место теорема: Если $A_p = A_0 + pcJ_0$ $(c > 0)$ — семейство эрмитовых операторов с простым спектром, зависящих от вещественного параметра p и J_0 — проектор на одномерное пространство, базисный орт которого есть порождающий элемент оператора A_0, то существует функция $\lambda = F(p)$ класса $N^{(-1)}$, обладающая следующими свойствами:

1. Область определения $\mathfrak{R}$ функции $\lambda = F(p)$ совпадает с множеством тех значений p, при которых у оператора $A(p)$ существует непустой дискретный спектр.

2. Если $p \in \mathfrak{R}$, то дискретный спектр соответствующего оператора A_p совпадает с множеством значений функции $\lambda = F(p)$ в точке p. Для доказательства введем в рассмотрение функции [4]

$$\varphi_0(\lambda) = ((A_0 - \lambda I)^{-1} u_0, u_0), \quad \varphi_p(\lambda) = ((A_p - \lambda I) u_0, u_0), \tag{1}$$

где λ — точка регулярности операторов A_0 и A_p, а u_0 — порождающий элемент A_0 и, следовательно, порождающий элемент A_p, что следует из замечания. Предварительно докажем лемму:

Для того, чтобы точка λ_0 была точкой дискретного спектра эрмитового оператора A, имеющего простой спектр, необходимо и достаточно, чтобы точка λ_0 являлась полюсом функции $\varphi(\lambda) = ((A - \lambda I)^{-1} u_0, u_0)$ (u_0 — порождающий элемент). Как известно [1, 3], для любого ограниченного самосопряженного оператора имеет место следующее представление:

$$((A - \lambda I)^{-1} \psi_0, \psi_0) = \int_a^b \frac{d\rho_A(t)}{t - \lambda}, \quad \rho_A(t) = (\mathcal{E}_\lambda \psi_0 \psi_0),$$

где $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция оператора A.

Необходимость вытекает из того известного факта, что если λ_0 явл тся точкой дискретного спектра, то существуют интервалы $(\lambda_0-\varepsilon,$ $(\lambda_0, \lambda_0+\mathscr{E})$, в которых спектральная функция $\mathscr{E}_\lambda$ постоянна, а $(\mathscr{E}_{\lambda_0+0}-\mathscr{E}_{\lambda_0-0})\neq$

Из простоты спектра следует, что функция $\rho(\lambda)=\|\mathscr{E}_\lambda u_0\|^2$, где u порождающий элемент, также имеет разрыв непрерывности в точ разрыва спектральной функции $\mathscr{E}_\lambda$ [3]. Таким образом, получаем, что то λ_0 — простой полюс функции $\varphi(\lambda)$. Достаточность может быть установл с помощью формулы обращения Стильтьеса:

$$\rho_A(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^x[g(t+\alpha i)-g(t-\alpha i)]\,dt,$$

где

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\rho(x)}{x-t}.$$

Так как точка λ_0 является простым полюсом функции $g(\lambda)$, то в не торой окрестности $(\lambda_0-\varepsilon,\ \lambda_0+\varepsilon)$ функция $g(\lambda)$ непрерывна, исклю точку λ_0. Согласно формуле обращения Стильтьеса, функция $\rho_A(x)$ бу постоянной в интервалах $(\lambda_0-\varepsilon,\ \lambda_0)$, $(\lambda_0,\ \lambda_0+\varepsilon)$ и $\rho_A(\lambda_0+0)-\rho_A(\lambda_0-0)>0$. Из простоты спектра оператора A следует, что точка λ_0 п надлежит дискретному спектру. Воспользовавшись леммой и соотно нием [4]

$$\varphi_p=\frac{\varphi_0(\lambda)}{1+pc\varphi_0(\lambda)},$$

нетрудно получить доказательство теоремы. Из соотношения (2) следу что полюсы функций $\varphi_0(\lambda)$ и $\varphi_p(\lambda)$ различны. Следовательно, все полю функции $\varphi_p(\lambda)$ совпадают с множеством корней уравнения относительно

$$1+pc\varphi_0(\lambda)=0,$$

где $\varphi_0(\lambda)$ имеет вид (1). Значения функции $\lambda=F(p)$, определяемой ура нением

$$-\frac{1}{cp}=\int_a^b\frac{d\rho_{A_0}(t)}{t-\lambda},$$

согласно лемме, являются точками дискретного спектра оператора A Итак, функция $\lambda=F(p)$ принадлежит классу $N^{(-1)}$ и удовлетворяет в условиям теоремы.

Так как функция $\varphi_0(\lambda)$ монотонно возрастает на каждом интерва постоянства функции

$$\rho_{A_0}(t)=(\mathscr{E}_t u_0 u_0),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

то, в частности, из доказанной теоремы получаем известный факт: вну каждой лакуны в спектре оператора A_0 оператор A_p имеет не более одн собственного значения. К числу лакун относятся также интервалы $(-\infty,$ и $(b,\ +\infty)$, где $a,\ b$ — границы спектра оператора A_0.

Заметим, что из уравнения (2) следует, что дискретные спектры о раторов A_p при различных значениях параметра p не имеют общих точ

Докажем обратную теорему:

Для любой функции $\lambda=F(p)$ класса $N^{(-1)}$ можно построить сем ство операторов $A_p=A_0+pcJ_0$ такое, что для каждого фиксированн значения p из области определения $(\mathfrak{N})$ функции $\lambda=F(p)$ множество з чений этой функции совпадает с дискретным спектром соответствующе оператора A_p. Таким образом, семейство операторов A_p линеаризует заданную функцию $F(p)$.

Доказательство. Пусть $\lambda = F(p)$ принадлежит классу $N^{(-1)}$. Тогда для обратной функции $p = p(\lambda)$ имеет место соотношение

$$-\frac{1}{p(\lambda)} = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda} = c\int_a^b \frac{d\rho_0(t)}{t-\lambda},$$

где

$$c = \int_a^b d\sigma(t), \quad \int_a^b d\rho_0(t) = 1.$$

По весу $\rho_0(t)$ строим Якобиеву матрицу [3], элементы которой имеют вид

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda P_i(\lambda) P_k(\lambda)\, d\rho_0(\lambda),$$

где $P_i(\lambda)$ и $P_k(\lambda)$ — ортонормированная система полиномов с весом $\rho_0(\lambda)$

$$\int_a^b P_i(\lambda) P_k(\lambda)\, d\rho_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Обозначим через A_0 эрмитов оператор, соответствующий данной матрице. Оператор A_0 имеет простой спектр и за порождающий элемент можно принять первый орт $u_0(1, 0, 0, \ldots)$. Любой базисный орт u_k выразится через u_0 по формуле:

$$u_k = P_k(A_0)\, u_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Построим семейство операторов $A_p = A_0 + cpJ_0$, где J_0 — оператор проектирования на одномерное пространство с базисным ортом u_0. Используя лемму и соотношения (1) и (3), мы убедимся в том, что спектр оператора A_p совпадает с множеством значений функции $\lambda = F(p)$ и семейство операторов A_p линеаризует функцию $F(p)$. Если не требовать, чтобы оператор A_0 имел простой спектр, то матрица, соответствующая оператору A_p, будет унитарно эквивалентна матрице вида:

$$\begin{pmatrix} A_0 + pcJ_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad C \text{ — эрмитова матрица, не зависящая от } p.$$

Это следует из замечания и того факта, что всякая эрмитова матрица, соответствующая ограниченному оператору с простым спектром, унитарно эквивалентна матрице Якоби. В итоге получена

Теорема. *Для того, чтобы можно было построить семейство операторов $A_p = A_0 + cpJ_0$, линеаризующих функцию $\lambda = F(p)$, необходимо и достаточно, чтобы данная функция принадлежала к классу $N^{(-1)}$.*

Из приведенного выше доказательства следует, что между классом Якобиевых матриц $A_p = A_0 + pcJ_0$ и классом функций из $N^{(-1)}$ можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим примеры.

В качестве простейшего примера рассмотрим двузначную функцию

$$\lambda = p \pm \sqrt{m^2 + p^2}, \tag{4}$$

откуда

$$-\frac{1}{p} = \frac{-2\lambda}{\lambda^2 - m^2} = \frac{1}{m-\lambda} + \frac{1}{-m-\lambda}. \tag{5}$$

Так как функция $\frac{-2\lambda}{\lambda^2 - m^2}$, очевидно, является неванлинновской, то функция (4) принадлежит к классу $N^{(-1)}$. По функции $\lambda = F(p)$ построим семейство операторов $A_p = A_0 + pcJ_0$. Имеет место соотношение

$$-\frac{1}{p} = c\int_a^b \frac{d\rho_{A_0}(t)}{t-\lambda},$$

где $\int_a^b d\rho_{A_0}(t) = 1$.

Из соотношения (4) и (5) следует, что нагрузка $c\rho_{A_0}(t)$ — кусочно постоянная функция, имеющая в точках $x_1 = m$ и $x_2 = -m$ скачки, равные единице. Постоянную c найдем из условия:

$$c\int_{-m}^{m} d\rho_{A_0}(t) = 2, \quad c = 2.$$

Пространство H_0 является двумерным. Ортогональные полиномы: $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = \frac{1}{m}t$. Вычисляя коэффициенты матрицы Якоби, получаем матрицы второго порядка:

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{Vmatrix} \text{ и } A_p = \begin{Vmatrix} 2p & m \\ m & 0 \end{Vmatrix}$$

2. Рассмотрим двузначную функцию $\lambda = F(p)$, $(-\infty < p < \infty)$, $p \neq 0$, имеющую вид*:

$$F(p) = \begin{cases} \sqrt{m_2^2+p^2} \pm \sqrt{m_1^2+p^2} & p > 0 \\ -\sqrt{m_2^2+p^2} \pm \sqrt{m_1^2+p^2} & p < 0 \end{cases} \quad m_1 > m_2. \tag{6}$$

Очевидно, функция $F(p)$ принимает все значения, лежащие вне отрезков $[-(m_2+m_1),\ -(m_1-m_2)]$, $[(m_1-m_2),\ (m_1+m_2)]$. Покажем, что так определенная функция $F(p)$ принадлежит классу $N^{(-1)}$ и линеаризуем ее. Для этого вначале покажем, что функция $q(\lambda) = -\frac{1}{p(\lambda)}$ при аналитическом продолжении в верхнюю полуплоскость допускает представление вида

$$q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}. \tag{7}$$

Обозначим $\sqrt{m_2^2+p^2} = \zeta$, тогда функция $\lambda = F(p)$ имеет вид

$$F(p) = \zeta \pm \sqrt{\mu^2+\zeta^2},$$

где $\mu^2 = m_1^2 - m_2^2$.

Условимся считать корень $\zeta = \sqrt{m_2^2+p^2}$ положительным, когда $p > 0$, и отрицательным, когда $p < 0$. Обратная функция $p = p(\lambda)$ может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \zeta = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\mu^2}{\lambda}\right), \ \lambda \in \mathfrak{M} = (-\infty, -\mu_1) + (-\mu_2, \mu_2) + (\mu_1 + \infty) \\ p = \sqrt{\zeta^2 - m_2^2}, \quad \mu_1 = m_1 + m_2, \quad \mu_2 = m_1 - m_2. \end{cases} \tag{8}$$

* Интересно отметить, что сумма $E = \sqrt{m_1^2+p^2} + \sqrt{m_2^2+p^2}$ выражает в релятивистской механике энергию системы двух частиц относительно центра их масс (скорость света $c = 1$). Возможно, что линеаризация этой функции имеет не только математический интерес.

Проведем в плоскости ζ разрез вдоль отрезка $[-m_2, m_2]$ и возьмем ту однозначную ветвь функции $p=\sqrt{\zeta^2-m_2^2}$, которая при $\zeta>m_2$ принимает положительные значения. Тогда при аналитическом продолжении $\sqrt{\zeta^2-m_2^2}$ принимает отрицательные значения для $\zeta<-m_2$. Так как каждая из функций (8) переводит верхнюю полуплоскость на себя, то сложная функция $p=p(\lambda)$ есть функция Неванлинны:

$$\operatorname{Im} p(\lambda)>0 \quad (\operatorname{Im}\lambda>0).$$

Очевидно, функция $q(\lambda)=-\dfrac{1}{p(\lambda)}$ обладает тем же свойством и, кроме того, $\overline{\lim\limits_{y+\infty}}\left|y\dfrac{1}{p(iy)}\right|<\infty$. Отсюда следует [1, 2], что функция $q(\lambda)$ представлена в виде интеграла (7). Из соотношений (8) найдем $q(\lambda)$:

$$q(\lambda)=\frac{-2\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-\mu_1^2)(\lambda^2-\mu_2^2)}}. \tag{9}$$

Функция $\zeta(\lambda)$ отображает отрезки $[-\mu_1, -\mu_2]+[\mu_2, \mu_1]$ на отрезок $[-m_2, m_2]$. Таким образом, область определения функции $q(\lambda)$ совпадает с областью значений функции $F(p)$. Воспользовавшись формулой обращения Стильтьеса, выразим функцию $\sigma'(t)$ через скачок функции $q(\lambda)$ в точках вещественной оси

$$\sigma'(t)=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{2\pi i}[q(t+i\delta)-q(t-i\delta)]=-\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to+0}\operatorname{Im}q(t+i\delta). \tag{10}$$

Рассмотрим произвольную точку $\lambda=t+i\delta$ в плоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$, такую, что $t\in[-\mu_1, -\mu_2]+[\mu_1, \mu_2]$, тогда при $\delta\to0$ точка $\zeta(t+i0)\in\in[-m_2, m_2]$. В случае, когда $t\,\overline{\in}\,[-\mu_1, -\mu_2]+[\mu_1, \mu_2]$ и $\delta\to0$ точка $\zeta(t+i0)\,\overline{\in}\,[-m_2, m_2]$.

Из формулы обращения Стильтьеса (10) получаем:

$$\begin{aligned} &1.\ \sigma'(t)=\frac{1}{\pi}|q(t)| && \text{при } t\in[-\mu_1, -\mu_2]+[\mu_2, \mu_1]\\ &2.\ \sigma'(t)=0 && \text{при } t\,\overline{\in}\,[-\mu_1, -\mu_2]+[\mu_2, \mu_1] \end{aligned} \tag{11}$$

Из соотношений (11) следует, что интеграл (7) имеет вид

$$q(\lambda)=\int_{-\mu_1}^{-\mu_2}\frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}+\int_{\mu_2}^{\mu_1}\frac{d\sigma(t)}{t-\lambda},$$

или

$$-\frac{1}{p(\lambda)c}=\int_{-\mu_1}^{-\mu_2}\frac{d\rho_A(t)}{t-\lambda}+\int_{\mu_2}^{\mu_1}\frac{d\rho_A(t)}{t-\lambda}, \quad \left[\int_{-\mu_1}^{-\mu_2}d\rho_A(t)+\int_{\mu_1}^{\mu_2}d\rho_A(t)=1\right] \tag{12}$$

В дальнейшем покажем, что $c=2$. Из соотношений (9) и (11) следует

$$\rho_A'(t)=\frac{|t|}{\pi\sqrt{[(m_1+m_2)^2-t^2][t^2-(m_1-m_2)]^2}}.$$

Наша задача линеаризации $\lambda=F(p)$ свелась к задаче построения системы ортогональных полиномов на вещественной оси по весу $\rho_A'(t)$ на множестве E и вычислению матрицы Якоби.

Рассмотрим вес:

$$\rho(t)=\begin{cases}\dfrac{|t|}{\pi\sqrt{(b^2-t^2)(t^2-a^2)}} & t\in E=[-b, -a]+[a, b]\\ 0 & t\,\overline{\in}\,E \quad (a<b).\end{cases} \tag{13}$$

Мы приходим к ортогональным полиномам, полученным Н. И. Ахиезером [5], как частный случай эллиптических полиномов. Полиномы $P_n(t)$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) можно найти следующим образом.

Пусть $a = m_1 - m_2$, $b = m_1 + m_2$. В интеграле

$$\frac{2}{\pi}\int_{m_1-m_2}^{t}\frac{t\,dt}{[(m_1+m_2)^2-t^2][t^2-(m_1-m_2)^2]}$$

сделаем подстановку $t=\sqrt{\alpha x+\beta}$, где $\alpha = 2m_1m_2$, $\beta = m_1^2+m_2^2$; получим

$$\frac{2}{\pi}\int_a^t\frac{t\,dt}{(b^2-t^2)(t^2-a^2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad (a\leqslant t\leqslant b,\ -1\leqslant x\leqslant 1). \tag{14}$$

Весовая функция (13), следовательно, переходит в вес полиномов П. Л. Чебышева

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{на отрезке}\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

(Пользуясь равенством (14) и формулой (12), получаем, что $c=2$). Отсюда непосредственно следует, что четные полиномы $P_{2n}(t)$ связаны с полиномами П. Л. Чебышева зависимостью

$$P_{2n}(t)=\sqrt{2}T_n\left(\frac{t^2-\beta}{\alpha}\right)=\sqrt{2}\cos n\arccos\left(\frac{t^2-\beta}{\alpha}\right),\quad P_0(t)=1\quad (n=1, 2, \ldots)$$

Полиномы $P_{2n}(t)$ будут при этом нормированными условием

$$\int_E P_{2n}^2(t)\,\rho(t)\,dt = 1.$$

Найдем нечетные полиномы $P_{2n+1}(t)$. Условие ортогональности дает

$$\int_E\frac{P_{2n+1}(t)\,P_{2m+1}(t)\,|t|\,dt}{\pi\sqrt{(b^2-t^2)(t^2-a^2)}}=\frac{2}{\pi}\int_{m_1-m_2}^{m_1+m_2}\frac{t^2\widetilde{P}_{2n}(t)\,\widetilde{P}_{2m}(t)\,t\,dt}{\sqrt{[(m_1+m_2)^2-t^2][t^2-(m_1-m_2)^2]}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{(\alpha x+\beta)\,\widetilde{P}_{2n}(\sqrt{\alpha x+\beta})\,\widetilde{P}_{2m}(\sqrt{\alpha x+\beta})}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=0\quad (n\neq m),$$

где

$$\widetilde{P}_{2n}(t)=t^{-1}P_{2n+1}(t).$$

Известно [6], что полиномы, образующие ортогональную систему по весу

$$\frac{x+\frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{1-x^2}},$$

лишь постоянным множителем могут отличаться от полиномов

$$\frac{1}{x+\frac{\beta}{\alpha}}\begin{vmatrix} T_n\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) & T_n(x)\\ T_{n+1}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) & T_{n+1}(x)\end{vmatrix}$$

Следовательно,

$$P_{2n+1}(t)=c_nt^{-1}\left[T_n\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)T_{n+1}\left(\frac{t^2-\beta}{\alpha}\right)-T_{n+1}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)T_n\left(\frac{t^2-\beta}{\alpha}\right)\right]$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots)$$

Множитель c_n находим из условия нормированности полиномов $P_{2n+1}(t)$. Нормируя полиномы $P_{2n+1}(t)$, получим

$$P_{2n+1}(t) = \sqrt{2m_1m_2}\, t^{-1}\left[\gamma_n T_n\left(\frac{t^2-\beta}{\alpha}\right) + \gamma_n^{-1} T_{n+1}\left(\frac{t^2-\beta}{\alpha}\right)\right], \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{n+1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{n} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{n}}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(n+1)\,\alpha}{\operatorname{ch} n\alpha}}, \quad \alpha = \ln\frac{m_1}{m_2} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Напишем рекуррентные соотношения между полиномами $P_n(t)$ и найдем матрицу Якоби. Из соотношений:

$$tP_n(t) = b_nP_{n+1}(t) + a_nP_n(t) + b_{n-1}P_{n-1}(t) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$P_0(t) = 1 \qquad P_{-1}(t) = 0$$

получаем значения коэффициентов a_n, b_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \quad b_0 = \sqrt{2m_1m_2}\,\gamma_0, \text{ так как } P_0(t) = 1.$$

$$b_{2n} = \sqrt{m_1m_2}\,\gamma_n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \quad b_{2n+1} = \sqrt{m_1m_2}\,\gamma_n^{-1} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Искомая матрица A_0 имеет вид

$$A_0 = \sqrt{m_1m_2}A,$$

где

$$A = \left\|\begin{matrix} 0 & \sqrt{2}\gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{2}\gamma_0 & 0 & \gamma_0^{-1} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \gamma_0^{-1} & 0 & \gamma_1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_1^{-1} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1^{-1} & 0 & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\|$$

Семейство операторов A_p, линеаризующих функцию $\lambda = F(p)$, имеет вид

$$A_p = \sqrt{m_1m_2}A + 2pJ_0,$$

где J_0 — проектор на подпространство с базисным ортом $u_0 = (1,\ 0,\ \ldots)$. Из доказательства видно, что оператор A_0 имеет чисто непрерывный спектр, заполняющий отрезки $[-(m_1+m_2),\ -(m_1-m_2)]$, $[m_1-m_2,\ m_1+m_2]$.

Оператор A_p имеет два собственных значения, определенных равенствами (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории полиномов. Харьков, 1938.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, 5, Физматгиз, М.—Л., 1959.
4. М. С. Лившиц. Об одной обратной задаче теории операторов, «Докл. АН СССР», **97**, № 3—4 (1954).
5. Н. И. Ахиезер. Über eine Eigenschaft der «elliptischen» Polynome. Сообщения Харьковского математического общества, серия 4, т. IX, 3—8, 1934.
6. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Изд-во иностр. лит., 1954.