УДК 517.53

В. П. МАНЖОЛОВСКИЙ

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ

1. В теории дифференциальных уравнений рассматривается функция

$$\{\varphi,\ x\} = \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{2}{3}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2, \tag{1}$$

называемая производной Шварца или шварцианом функции $\varphi(x)$.

Как показал А. Кэли, равенство

$$\left\{\frac{a\varphi + b}{c\varphi + d},\ x\right\} = \{\varphi,\ x\} \tag{2}$$

выражает основное свойство производной Шварца, а именно, ее инвариантность указанного вида так, что она не меняется при замене функции φ на $\frac{a\varphi + b}{c\varphi + d}$, где приведенный вид преобразования

$$f = \frac{a\varphi + b}{c\varphi + d} \tag{3}$$

называется дробно-линейным.

2. Вместо производной Шварца (1) рассмотрим дифференциальное выражение

$$\Phi = k\frac{\zeta''}{\zeta} + l\frac{\zeta'''}{\zeta'} + p\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^2 + q\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2, \tag{4}$$

в котором k, l, p и q — некоторые числа.

Функцию преобразования, играющую ту же роль, что и дробно-линейная для Шварца (3), запишем в виде

$$\zeta = f[\varphi(x)]. \tag{5}$$

Тогда основное уравнение инвариантности функции (4) относительно преобразования (5) будет

$$\{f[\varphi(x)],\ x\}_\Phi = \{\varphi,\ x\}_\Phi, \tag{6}$$

где $\varphi = \varphi(x)$.

Рассмотрим, при каких условиях функция (4) будет инвариантна относительно преобразования (5); определим вид преобразования и соответствующие значения постоянных k, l, q и p.

Подставляя ζ из (5) в (4), находим функцию Φ и, исходя из условия инвариантности (6), приходим к равенству

$$\left\{k\frac{f''}{f} + l\frac{f'''}{f'} + p\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{\varphi^2}\right] + q\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right\}\dot{\varphi}^2 + \\ + \left[k\left(\frac{f'}{f} - \frac{1}{\varphi}\right) + (3l + 2q)\frac{f''}{f'}\right]\ddot{\varphi} = 0. \tag{7}$$

Решение полученного уравнения (7) позволит определить функцию преобразования $f(x)$, которая будет удовлетворять основному уравнению инвариантности $\{f[\varphi(x)],\ x\}_\Phi = \{\varphi,\ x\}_\Phi$.

Так как уравнение (7) должно удовлетворяться при любых φ, выражения, стоящие перед $\dot{\varphi}^2$ и $\ddot{\varphi}$, мы должны принять равными нулю и, следовательно, получим следующие два равенства:

$$k\frac{f''}{f} + l\frac{f'''}{f'} + p\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{\varphi^2}\right] + q\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = 0; \tag{8}$$

$$k\left(\frac{f'}{f} - \frac{1}{\varphi}\right) + (3l + 2q)\frac{f''}{f'} = 0. \tag{9}$$

Решая уравнение (9), получим искомое выражение для функции преобразования $f(\varphi)$

$$f = A\left(\varphi^{\frac{3l+2q+k}{3l+2q}} + \varepsilon\right)^{\frac{3l+2q}{3l+2q+k}} \tag{10}$$

при условиях $3l + 2q + k \neq 0, \qquad 3l + 2q \neq 0$.

Коэффициенты k, l, p и q являются величинами постоянными и могут принимать любые значения: целые, дробные, положительные, отрицательные и равные нулю.

Введем для удобства записи обозначение

$$\frac{3l + 2q + k}{3l + 2q} = m. \tag{11}$$

Тогда будем иметь

$$f_m = A\sqrt[m]{\varphi^m + \varepsilon} \tag{12}$$

или

$$f_m = q\sqrt[m]{d\varphi^m + c}\,. \tag{13}$$

Подставив теперь найденное выражение функции преобразования (12) в первое уравнение системы (8) — (9), получим

$$k(m-1)\varphi^m + l(m-1)[(m-2)\varepsilon - (m+1)\varphi^m] - \tag{14}$$
$$- p(2\varphi^m + \varepsilon) + q(m-1)^2\varepsilon = 0.$$

Ввиду произвольности функции φ имеем

$$l(m-1)(m-2) - p + q(m-1)^2 = 0 \tag{15}$$

или

$$p = l(m-1)(m-2) + q(m-1)^2 =$$
$$= (m-1)[l(m-2) + q(m-1)]. \tag{16}$$

Тогда выражение функции Φ_m (4) запишем в виде

$$\Phi_m = k\frac{\varphi''}{\varphi} + l\frac{\varphi'''}{\varphi'} + (m-1)[l(m-2) + q(m-1)]\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + q\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2. \tag{17}$$

Согласно (11) имеем

$$k = (m-1)(3l + 2q). \tag{18}$$

Выражение (17) запишем в связи с принятым нами обозначением (11) в виде

$$\Phi_m = l\left[3(m-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'''}{\varphi'} + (m-1)(m-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2\right] +$$
$$+ q\left[2(m-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + (m-1)^2\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right]. \qquad (19)$$

Так как l и q взаимно независимы, придем к двум видам функции Φ_m, являющихся инвариантами преобразования (12):

$$_q\Phi_m = \left[\frac{\varphi''}{\varphi'} + (m-1)\frac{\varphi'}{\varphi}\right]^2; \qquad (20)$$

$$_l\Phi_m = 3(m-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'''}{\varphi'} + (m-1)(m-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2. \qquad (21)$$

Согласно (16), (18) определим коэффициенты l и q, выразив их через m, k, и p:

$$l = (m-1)k - 2p \quad (22); \qquad q = \frac{3p-(m-2)k}{m^2-1}. \qquad (23)$$

Подставляя (22), (23) в (4), получим

$$\Phi_m = k\left[\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{1}{m+1}\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{m-2}{m^2-1}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right] +$$
$$+ p\left[\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - \frac{2}{m^2-1}\frac{\varphi'''}{\varphi'} + \frac{3}{m^2-1}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right] \qquad (24)$$

и, следовательно,

$$_k\Phi_m = \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{1}{m+1}\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{m-2}{m^2-1}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2; \qquad (25)$$

$$_p\Phi_m = -\frac{2}{m^2-1}\{\varphi,\ x\} + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2. \qquad (26)$$

Выражения для функций (20), (21) примем за основные.

Что касается $_k\Phi_m$ и $_p\Phi_m$, то они являются следствиями полученных выражений $_q\Phi_m$ и $_l\Phi_m$.

Действительно, будем иметь

$$_k\Phi_m = (m-1)_l\Phi_m - (m-2)_q\Phi_m; \qquad (27)$$

$$_p\Phi_m = {}_l\Phi_m - \frac{3}{2}\,{}_q\Phi_m. \qquad (28)$$

Составим алгебраические суммы вида

$$_t\Phi_m = q_t\,{}_q\Phi_m + l_t\,{}_l\Phi_m \qquad (29)$$

или

$$_t\Phi_m = q_t\left[\frac{\varphi''}{\varphi'} + (m-1)\frac{\varphi'}{\varphi}\right]^2 + l_t\left[3(m-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'''}{\varphi'} +\right.$$
$$\left. + (m-1)(m-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2\right]. \qquad (30)$$

Коэффициенты q_t и l_t могут принимать любые значения.

Отсюда следует, что в основе бесконечного числа инвариантов ${}_{l}\Phi_m$, определяемых согласно (29) или, что то же, (30), лежит система из конечного числа, в данном случае лишь двух основных форм инвариантов ${}_{q}\Phi_m$, ${}_{l}\Phi_m$.

Во всех полученных формулах m может быть любым вещественным числом, не равным нулю. При $m=-1$ в силу (12) будем иметь $f_{m=-1}=\dfrac{A\varphi}{\varepsilon\varphi+1}$ и согласно (13) $f_{m=-1}=\dfrac{q\varphi}{c\varphi+d}$.

Таким образом, приходим к дробно-рациональному преобразованию.

Поступила в редколлегию 13.12.89