ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ В НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ B-ПРОСТРАНСТВАХ С БЕЗУСЛОВНЫМ БАЗИСОМ

С. Троянски

сть A — множество произвольной мощности $\mathfrak{M}$, а X — действи- е пространство Банаха веса $\mathfrak{M}$. Система элементов $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$ на- тся безусловным базисом мощности $\mathfrak{X}$, если для каждого $x \in X$ су- ует единственная зависящая от x последовательность действительных $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ такая, что

$$x = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x)\, e_\alpha,$$

м этот ряд сходится при любой перестановке его членов. Будем ть, что базис нормированный ($\|e_\alpha\| = 1$ для всех $\alpha \in A$).

Исходную норму пространства X обозначим через $\|\cdot\|_0$.

Известно [1], что в X можно ввести эквивалентную норму

$$\|x\| = \max_{\varepsilon_\alpha = \pm 1} \Big\| \sum_{\alpha \in A} \varepsilon_\alpha f_\alpha(x)\, e_\alpha \Big\|_0,$$

тельно которой базис станет ортогональным, т. е. $\varphi(t) = \|x_1 + tx_2\|$ неубывающей функцией от $|t|$, если

$$\{\alpha : f_\alpha(x_1) \neq 0\} \cap \{\alpha : f_\alpha(x_2) \neq 0\} = \varnothing.$$

Возьмем последовательность индексов $\sigma = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$. Пусть $x = \sum f_\alpha(x)\, e_\alpha$, положим

$$R_k(\sigma, x) = \sum_{\alpha \in A_k} f_\alpha(x)\, e_\alpha, \text{ где } A_k = A \diagdown \{\alpha_i\}_{i=1}^{k},$$

$$F_k = 2 \sum_{i=1}^{k} |f_{\alpha_i}(x)|,$$

$$R(\sigma, x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot \|R_k(\sigma, x)\|,$$

$$F(\sigma, x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot F_k(\sigma, x).$$

ведем новую норму

$$\|x\|_1 = \sup_{\sigma \subset A} [R(\sigma, x) + F(\sigma, x)]. \tag{1}$$

чевидно

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant 6\|x\|. \tag{2}$$

Набор индексов $\sigma = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ будем называть нормальным для элемента если из того что $|f_\alpha(x)| > 2|f_{\alpha_k}(x)|$ следует, что $\alpha \in \{\alpha_i\}_{i=1}^{k-1}$.

Лемма 1. *Для любого набора* $\sigma \subset A$ *найдется нормальный набор для элемента* x *такой, что*

$$R(\sigma, x) + F(\sigma, x) \leqslant R(\sigma^*, x) + F(\sigma^*, x)$$

Доказательство. Пусть задан набор $\sigma = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ и k — перв индекс, для которого существует $\alpha \in A$, такой, что

$$|f_\alpha(x)| > 2|f_{\alpha_k}(x)|, \quad \alpha \in \{\alpha_i\}_{i=1}^{k-1}.$$

Если $\alpha = \alpha_n$, то положим

$$\sigma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1}, \alpha_n, \alpha_{k+1}, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_k, \alpha_{n+1} \ldots\}.$$

Очевидно

$$\|R_i(\sigma, x)\| + F_i(\sigma, x) = \|R_i(\sigma_1, x)\| + F_i(\sigma_1, x) \quad (i < k, \ i \leqslant n).$$

В силу ортогональности базиса имеем

$$\|R_i(\sigma, x)\| \leqslant \|R_i(\sigma_1, x) - f_{\alpha_k}(x)e_{\alpha_k}\| + |f_\alpha(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \|R_i(\sigma_1, x)\| + |f_\alpha(x)| \quad (k \leqslant i < n).$$

Из (3) и (5) следует, что

$$\|R_i(\sigma, x)\| + F_i(\sigma, x) \leqslant \|R_i(\sigma_1, x)\| + F(\sigma_1, x) \quad (k \leqslant i < n).$$

В силу (4) и (6)

$$R(\sigma, x) + F(\sigma, x) \leqslant R(\sigma_1, x) + F(\sigma_1, x).$$

Если $\alpha \in \sigma$, то положим $\sigma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \ldots\}$. Лег видеть, что (4) имеет место для $i < k$, а (6) для $i \geqslant k$.

Рассмотрим набор σ_1, найдем первый индекс k_1, для которого в полняется (3) и т. д.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, $x \in X$, *тогда*

$$\lim_{n\to\infty}[\|x_n - x\| - \|R_k(\sigma, x_n - x)\|] = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty}\|R_k(\sigma, x_n)\| \geqslant \|R_k(\sigma, x)\| \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Доказательство этой леммы по существу приводится в [3].

Теорема 1. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} f_\alpha(x_n) = f(x) \quad (\alpha \in A),$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1 = \|x\|_1.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Доказательство. Допустим, что

$$\|x_n - x\| > \varepsilon > 0$$

для сколь угодно больших n.

Через $\sigma_0 = \sigma_0(x)$ обозначим последовательность $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, такую что

$$|f_{\alpha_{i+1}}(x)| \leqslant |f_{\alpha_i}(x)| \text{ и } f_\alpha(x) = 0 \text{ если } \alpha \in \sigma_0(x).$$

Найдем p так, чтобы

$$\|R_p(\sigma_0, x)\| < \frac{\varepsilon}{64}.$$

m так, чтобы $2|f_{\alpha_m}(x)| < |f_{\alpha_p}(x)|$. Тогда для любого нормаль-
го элемента x имеем

$$\| R_m(\sigma, x) \| \leqslant \| R_p(\sigma_0, x) \| < \frac{\varepsilon}{64}. \tag{10}$$

(1) и леммы 1 найдется нормальный для элемента x набор σ что

$$\| x \|_1 - [R(\sigma, x) + F(\sigma, x)] < \frac{\varepsilon}{2^{m+6}}. \tag{11}$$

(7), (8) и леммы 2 найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что если $n > N$, то

$$\| x_n \|_1 - \| x \|_1 < \frac{\varepsilon}{2^{m+6}}, \tag{12}$$

$$F(\sigma, x) - F(\sigma, x_n) < \frac{\varepsilon}{2^{m+5}}, \tag{13}$$

$$\| x_n - x \| - \| R_m(\sigma, x_n - x) \| < \frac{\varepsilon}{24}, \tag{14}$$

$$\| R_k(\sigma, x_n) \| > \| R_k(\sigma, x) \| - \frac{\varepsilon}{2^{m+7}} \quad (k = 0, 1, \ldots m-1).$$

Из последнего неравенства получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k} \cdot \| R_k(\sigma, x_n) \| > \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k} \cdot \| R_k(\sigma, x) \| - \frac{\varepsilon}{2^{m+6}}. \tag{15}$$

Из (2) и (9) следует, что

$$\| x_n - x \| > \frac{\varepsilon}{6}.$$

В силу (14)

$$\| R_m(\sigma, x_n - x) \| > \frac{\varepsilon}{8}.$$

Из (10) следует, что

$$\sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} \cdot \| R_k(\sigma, x_n) \| > 2^{-m} \cdot \| R_m(\sigma, x_n) \| \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-m} \cdot \{ \| R_m(\sigma, x_n - x) \| - \| R_m(\sigma, x) \| \} \geqslant \frac{\varepsilon}{2^{m+3}} - \frac{\varepsilon}{2^{m+6}}. \tag{16}$$

Применяя последовательно (14), (16) и (10), получим

$$(\sigma, x_n) > \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k} \cdot \| R_k(\sigma, x) \| + \frac{\varepsilon}{2^{m+3}} - \frac{\varepsilon}{2^{m+5}} > R(\sigma, x) + \frac{\varepsilon}{2^{m+4}}. \tag{17}$$

С другой стороны, складывая (11) и (12), получим

$$\| x_n \|_1 - [R(\sigma, x) + F(\sigma, x)] < \frac{\varepsilon}{2^{m+5}}.$$

определения эквивалентной нормы (1) следует, что

$$[R(\sigma, x_n) - R(\sigma, x)] + [F(\sigma, x_n) - F(\sigma, x)] < \frac{\varepsilon}{2^{m+5}}.$$

Сопоставляя это неравенство с (13), получим

$$R(\sigma, x_n) < R(\sigma, x) + \frac{\varepsilon}{2^{m+4}}. \tag{18}$$

видно, (17) противоречит (18). Полученное противоречие доказы-
теорему 1.

Пространство Банаха называется локально равномерно выпук, если для любых элементов пространства $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и x из равенств

$$\|x_n\| = \|x\| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Понятие локально равномерно выпуклого пространства было вве; Ловалья [5]. Каждое локально равномерно выпуклое пространство я: ется строго нормированным пространством, т. е. его единичная с(не содержит прямолинейных отрезков.

Кадец [4] доказал, что любое сепарабельное пространство изомо| локально равномерно выпуклому пространству. С другой стороны, Дэ| показал, что несепарабельное пространство $m_0(\lambda)$ при несчетном λ не морфно строго нормированному пространству, а значит и подавно не морфно локально равномерно выпуклому пространству. Покажем, теорему Кадеца можно распространить на пространства с безуслов базисом произвольной мощности.

Теорема 2. *Пространство X с безусловным базисом произвол мощности изоморфно локально равномерно выпуклому пространству.*

Доказательство. Пусть $x = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x) e_\alpha$, а $\sigma = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ счет набор индексов из A. Положим

$$J(x) = \sup_{\sigma\subset A} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f_{\alpha_i}^2(x)}.$$

Можно показать, что наибольшее значение достигается на на $\sigma_0(x) = \{\alpha_i\}_{j=1}^{\infty}$, т. е. тогда, когда $\{|f_{\alpha_j}(x)|\}_{j=1}^{\infty}$ представляет монотонно вающую последовательность и $f_\alpha(x) = 0$, если $\alpha \in \sigma_0(x)$. Поэтому запи

$$J(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \cdot f_{\alpha_i}^2(x)},$$

подразумевая под $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ набор $\sigma_0(x)$.

Не трудно проверить, что $J(x)$ — четный выпуклый, положите однородный функционал.

Введем новую норму, эквивалентную старой:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\|x\|_1^2 + J^2(x)}.$$

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и x удовлетворяют (19). Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2 = 0.$$

Рассмотрим тождество

$$2(\|x_n\|_2^2 + \|x\|_2^2) - \|x_n + x\|_2^2 = \{2[\|x_n\|_1^2 + \|x\|_1^2] - \|x_n + x\|_1^2\} + \\ + \{2[J^2(x_n) + J^2(x)] - J^2(x_n + x)\}.$$

Так как выражения в фигурных скобках неотрицательны, то в силу

$$\lim_{n\to\infty} \{2[J^2(x_n) + J^2(x)] - J^2(x_n + x)\} = 0,$$

Но

$$2[(J^2(x_n)+J^2(x)]-J^2(x_n+x)=\{[J(x_n)+J(x)]^2-J^2(x_n+x)\}+\\ +[J(x_n)-J(x)]^2.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} J(x_n)=J(x). \tag{21}$$

Пусть $\sigma_0(x)=\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\sigma_0(x_n+x)=\{\alpha_{in}\}_{i=1}^{\infty}$. Перепишем (20) более подробно

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\Big[J^2(x_n)-\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\cdot f^2_{\alpha_{in}}(x_n)\Big]+\Big[J^2(x)-\sum^{\infty}2^{-i}\cdot f^2_{\alpha_{in}}(x)\Big]+\\ +\Big[J^2(x_n)+J^2(x)-2\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\cdot f_{\alpha_{in}}(x_n)\cdot f_{\alpha_{in}}(x)\Big]\Big\}=0.$$

Так как выражения в квадратных скобках неотрицательны, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\big[f^2_{\alpha_i}(x)-f^2_{\alpha_{in}}(x)\big]=0. \tag{22}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}f^2_{\alpha_{in}}(x_n-x)=0. \tag{23}$$

Обозначим $B_i(x)=\{\alpha:|f_\alpha(x)|\geqslant|f_{\alpha_i}(x)|\}$. Докажем, что для каждого i найдется N_i такое, что если $n>N_i$, то $\alpha_{in}\in B_i(x)$. Допустим противное. Пусть j такое, что $\alpha_{jn}\in B_j(x)$ для сколь угодно больших n; и если $s<j$, то, начиная с некоторого номера, $\alpha_s\in B_s(x)$.

Существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$f^2_{\alpha_j}(x)>f^2_\alpha(x)+\varepsilon\quad(\alpha\in B_j(x)). \tag{24}$$

Пусть $\alpha_j\in\sigma_0(x_n+x)$ для сколь угодно больших n. Значит, $\alpha_j=\alpha_{rn}$ $>j)$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\big[f^2_{\alpha_i}(x)-f^2_{\alpha_{in}}(x)\big]=\sum_{i=j}^{\infty}2^{-i}\big[f^2_{\alpha_i}(x)-f^2_{\alpha_{in}}(x)\big]=\\ =(2^{-j}-2^{-r})\big[f^2_{\alpha_j}(x)-f^2_{\alpha_{jn}}(x)\big]+\Big\{\sum_{i=j+1}^{r-1}2^{-i}\big[f^2_{\alpha_i}(x)-f^2_{\alpha_{in}}(x)\big]+\\ +2^{-r}\big[f^2_{\alpha_r}(x)-f^2_{\alpha_{jn}}(x)\big]+\sum_{i=r+1}^{\infty}2^{-i}\big[f^2_{\alpha_i}(x)-f^2_{\alpha_{in}}(x)\big]\Big\}.$$

Так как $\{\alpha_i\}_{i=1}^{j}\cap(\{\alpha_{in}\}_{i=j}^{r-1}\cup\{\alpha_{in}\}_{i=r+1}^{\infty})=\varnothing$, то выражение в фигурных скобках неотрицательно. Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\big[f^2_{\alpha_i}(x)-f^2_{\alpha_{in}}(x)\big]\geqslant\frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \tag{25}$$

для сколь угодно больших n, что противоречит (22).

Если $\alpha_j\in\sigma_0(x_n+x)$ для сколь угодно больших n, то (25) вытекает непосредственно из (24).

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}f_\alpha(x_n)=f_\alpha(x)\quad(\alpha\in A). \tag{26}$$

Сначала покажем, что (26) имеет место для $\alpha \in \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ *. Найдем N та что при $n > N$ $\alpha_{in} \in B_i(x)$ $(i \leqslant q)$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f_{\alpha_{in}}^2 (x_n - x) < \frac{\varepsilon^2}{2^q},$$

где q — количество элементов множества $B_j(x)$. Отсюда $\{\alpha_{in}\}_{j=1}^{q} = B_\alpha$ и значит $|f_{\alpha_j}(x_n) - f_{\alpha_j}(x)| < \varepsilon$.

Пусть $f_\alpha(x) = 0$ и для сколь угодно больших n

$$|f_\alpha(x_n)| > \varepsilon > 0. \quad (2$$

Найдем ν так, чтобы

$$f_{\alpha_{\nu+1}}^2(x) < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Тогда

$$J^2(x) \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} 2^{-i} \cdot f_{\alpha_i}^2(x) + \frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+3}}. \quad (2$$

Найдем N так, чтобы при $n > N$

$$\sum_{i=1}^{\nu} 2^{-i} [f_{\alpha_i}^2(x) - f_{\alpha_i}^2(x_n)] < \frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+3}}. \quad (2$$

Из (28) и (29) следует, что

$$\sum_{i=1}^{\nu} 2^{-i} f_{\alpha_i}^2(x_n) > J^2(x) - \frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+2}}. \quad (3$$

Из (27) и (30) следует, что

$$J^2(x_n) \geqslant \sum_{i=1}^{\nu} 2^{-i} f_{\alpha}\ (x_n) + 2^{-\nu-1} \cdot f_\alpha(x_n) > J^2(x) + \frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+2}},$$

что противоречит (21). Полученное противоречие доказывает (26).

В силу (19) и (21)

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_1 = \|x\|_1. \quad (3$$

Из теоремы 1 (26) и (31) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0.$$

Так как нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, то

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2 = 0.$$

Теорема доказана.

* Точнее, для тех $\alpha \in \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых $|f_\alpha(x)| > 0$.

Следствие. *Пространства* $c_0(\lambda)$ и $l(\lambda)$ *изоморфны локально равно выпуклым пространствам* *.

В заключение выражаю глубокую благодарность М. И. Кадецу за постановку задач и руководство в процессе их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. Изд-во иностр. лит., М., 1961.
2. M. M. Day. Strict convexity and smoothnes, Trans. Amer. Math. Soc., 78, 528 (1955).
3. М. И. Кадец. О пространствах, изоморфных локально равномерно выпуклым пространствам. Изв. вузов, математика, № 6, 51—57, 1959.
4. М. И. Кадец. Письмо в редакцию. Изв. вузов, математика, № 6, 186—187, 1961.
5. A. R. Lovaglia. Localy uniformly convex Banach spaces, Trans. Amer. Math. 78, 225—238 (1955).

* Относительно определения пространств $c_0(\lambda)$ и $l(\lambda)$, например, [1, стр. 52]. Легко ть, что оба эти пространства обладают безусловным базисом соответствующей мощ-

Поступила 29 мая 1967 г.