УДК 519.81

Л. З. Лившиц, канд. физ. -мат. наук

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ НЕРАЗЛОЖИМЫХ КОМПОНЕНТ У БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ. III.

В I и II частях нашей статьи, помещенных в предыдущем выпуске сборника, сформулированы теоремы 1—8 о принадлежности классу* I_{0n} безгранично делимых вероятностных законов и доказаны теоремы 3, 4, 8. Настоящая публикация является последней частью данной работы. В ней приводятся доказательства теорем 1, 2, 5, 6, 7.

III. Доказательства теорем 1, 2, 5, 6, 7.

Выведем теорему 6 из теоремы 5.

Пусть A — множество, фигурирующее в условиях теоремы 6. Покажем, что $0 \overline{\in} \operatorname{Co} A$. Предположив обратное и используя тот факт, что A — открытое множество, подберем точки $x \in A$, $y \in A$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ таким образом, чтобы $0 = (p/q)\,x + (1 - p/q)\,y$, где p, q — натуральные числа, $p < q$. Тогда $0 = px + (q - p)\,\varnothing$ и, следовательно, $\operatorname{Co} A \cap (q)\,A \neq \varnothing$. Но это противоречит (2).

---

* Мы придерживаемся обозначений и определений, введенных в предыдущих частях статьи. Нумерация формул принята сквозной по всем разделам.

Так как $0 \overline{\in} \operatorname{Co} A$, то существует $(n-1)$-мерная гиперплоскость L, проходящая через 0 и такая, что $\operatorname{Co} A$ лежит в одном из полупространств пространства R^n, определяемых L. Введем теперь ортогональную систему координат с центром в точке 0 таким образом, чтобы орт e_n n-й координатной оси был ортогонален к L и направлен в сторону множества $\operatorname{Co} A$. При этом $\operatorname{Co} A$ принадлежит открытому полупространству $\{x=(x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_n > 0\}$, ибо $\operatorname{Co} A \cap L = \varnothing$ вследствие того, что $\operatorname{Co} A$ — открытое множество.

При таком выборе системы координат для множества A выполняются требования теоремы 5 и, следовательно, для х. ф. $\varphi(t; Q)$ любой компоненты Q закона P при некотором $\sigma \geqslant 0$ справедливо представление ($e_n = (0, \ldots, 0, 1)$):

$$\frac{\varphi(t+i\sigma e_n;\ Q)}{\varphi(i\sigma e_n;\ Q)} = \exp\left\{ i < b, \quad t > + \int\limits_{R^n} (e^{i<t,\ x>} - 1)\, \mu_\sigma(dx) \right\}, \quad t \in R^n$$

где $b = (b_1, \ldots, b_n) \in R^n$, μ_σ — вполне конечная мера в R^n.

Функция $\psi(t_n) = \ln \varphi(0, \ldots, 0, t_n + i\sigma;\ Q) - \ln \varphi(0, \ldots, 0, i\sigma;\ Q) - ib_n t_n + \mu_\sigma(R^n) = \int\limits_{R^n} \exp(it_n x_n)\, \mu_\sigma(dx)$, $t_n \in R^1$, голоморфная в полосе $|\operatorname{Im} t_n| < \sigma$ и непрерывная в ее замыкании, является с точностью до множителя характеристической. Отсюда в силу известной теоремы [2, с. 38]

$$\int\limits_{R^n} \exp(-\operatorname{Im} t_n x_n)\, \mu_\sigma(dx) < \infty, \quad |\operatorname{Im} t_n| \leqslant \sigma.$$

Следовательно, имеет место представление

$$\varphi(t;\ Q) = \varphi(i\sigma e_n;\ Q)\ \exp\{ i < b,\ t - i\sigma e_n > + \int\limits_{R^n} (e^{i<t - i\sigma e_n,\ x>} - 1)\, \mu_\sigma(dx) \}, \quad t \in R^n.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\varphi(0;\ Q) = 1$, получаем

$$\varphi(t;\ Q) = \exp\{ i < b,\ t > + \int\limits_{R^n} (e^{i<t,\ x>} - 1)\, e^{\sigma x_n} \mu_\sigma(dx) \}, \quad t \in R^n.$$

Теорема 6 доказана.

Достаточность в условиях теорем 1, 2 непосредственно вытекает из теоремы 5.

Необходимость в теореме 2 непосредственно следует из доказанной ранее теоремы 3.

Необходимость в теореме 1 устанавливается следующим образом.

Предположим противное, а именно, что

$$\operatorname{Co} A \cap (2)\, M^+(A) \neq \varnothing. \tag{13}$$

Положим

$$A_\delta = \{ x \in R^n : \rho(x) > \delta, \ |x| < 1/\delta \}, \ \delta > 0.$$

В силу непрерывности функции $\rho(x)$ множество A_δ открыто и $A_\delta \uparrow A$ при $\delta \downarrow 0$.

При достаточно малом δ из (13) имеем

$$\operatorname{Co} A_\delta \bigcap (2) M^+(A_\delta) \neq \varnothing. \tag{14}$$

Рассмотрим n-мерный б. д. з. Q с х. ф.

$$\varphi(t;\ Q) = \exp\Big\{ \delta \int\limits_{A_\delta} (e^{i\langle t, x\rangle} - 1)\, dx \Big\}.$$

Легко видеть, что закон Q является компонентой закона P. Спектральная мера Леви закона Q равна $\delta\lambda_n(E \bigcap A_\delta)$. Поэтому $Q \in S(A_\delta, \delta)$, и в силу (14) и теоремы 3 закон Q не принадлежит классу I_{0n}. Следовательно, закон P также не принадлежит I_{0n}. Необходимость в теореме 1 доказана.

Доказательству теоремы 5 предпошлем ряд лемм.

Лемма 1 [5, с. 205]. *Если х. ф. $\varphi(t;\ P)$ одномерного закона P голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} t < R$, $0 \leqslant R \leqslant \infty$, то она удовлетворяет неравенству (свойство хребта)*

$$|\varphi(\xi + i\eta;\ P)| \leqslant \varphi(i\eta;\ P), \ -\infty < \xi < \infty, \ -\infty < \eta < R.$$

Лемма 2 [5, с. 206] *Если х. ф. $\varphi(t;\ P)$ одномерного закона P голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} t < R$, $0 \leqslant R \leqslant \infty$, то функция $b(\eta) = \ln \varphi(i\eta;\ P)$, $-\infty < \eta < R$, является выпуклой. Имеет место неравенство*

$$|\varphi(i\eta;\ P)| \geqslant \exp\{ -C(|\eta| + 1) \}, \quad -\infty < \eta < R,$$

где $C > 0$ — постоянная.

Лемма 3 [5, с. 206]. *Если х. ф. одномерного закона P голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} t < R$, $0 \leqslant R \leqslant \infty$, то в этой же полуплоскости голоморфна и х. ф. любой компоненты закона P.*

Лемма 4. *Пусть функция $f(z)$ одного комплексного переменного голоморфна в полосе $\{ z \in C^1 : -1 \leqslant \operatorname{Im} z < 0 \}$, непрерывна в ее замыкании и удовлетворяет условиям*

$$|f(z)| < C \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z = 0;$$

$$|f(z)| < \frac{C}{|\operatorname{Im} z|} \quad \text{при} \quad -1 \leqslant \operatorname{Im} z < 0.$$

Тогда $|f(z)| \leqslant \mathrm{const}$, $-1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0$.

Доказательство. Для любого $z \in C^1$; $-1 \leqslant \operatorname{Im} z < 0$ определим в прямоугольнике $D(z) = \{ \zeta \in C^1 : |\operatorname{Re}(\zeta - z)| \leqslant 1, \ -1 \leqslant \operatorname{Im} \zeta \leqslant 0 \}$ функцию $\psi(\zeta;\ z) = f(\zeta)[(\zeta - \operatorname{Re} z)^2 - 1]$.

Из условий леммы легко следует, что на границе области $D(z)$ $|\psi(\zeta;\ z)|$ ограничен не зависящей от z постоянной. По принципу максимума модуля это же справедливо везде в прямоугольнике $D(z)$.

С другой стороны, в квадрате $\{\zeta \in C^1 : |\operatorname{Re}(\zeta - z)| \leqslant 1/2, -1 \leqslant \operatorname{Im}\zeta \leqslant 0\}$ имеем $|(\zeta - \operatorname{Re} z)^2 - 1| \geqslant 3/4$, поэтому здесь $|f(\zeta)| = |\psi(\zeta;\ z)| / |(\zeta - \operatorname{Re} z)^2 - 1| \leqslant \mathrm{const}$. В частности, это справедливо при $\zeta = z$. Лемма доказана.

Лемма 5 (Палей — Винер). *Если функция $f(z)$ одного комплексного переменного голоморфна в нижней полуплоскости, непрерывна в ее замыкании и удовлетворяет условиям*

1) $|f(x + iy)| \leqslant Ce^{a|y|}$ (*a — вещественное*, $y \leqslant 0$, $-\infty < x < \infty$),

2) $\int |f(x)|\, dx < \infty$,

то ее преобразование Фурье

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(x)\, e^{-itx} dx$$

обращается в нуль при всех $t > a$.

Лемма 6. *Пусть ω — комплексный заряд в R^1 и пусть его преобразование Фурье $\varphi(t;\ \omega)$ аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость. Предположим, что продолженная функция (будем обозначать ее снова* через $\varphi(t;\ \omega)$) *допускает оценку*

$$|\varphi(t;\ \omega)| \leqslant \frac{C}{|\operatorname{Im} t|} (1 + |t|^2)(1 + \exp\{b |\operatorname{Im} t|\}), \quad \operatorname{Im} t < 0,$$

где b — вещественное число; $c > 0$ — постоянная.

Тогда заряд ω сосредоточен в множестве $(-\infty, \max(0, b)]$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и положим

$$\lambda_\delta(E) = \lambda(E \cap \{x \in R^1 : |x| < \delta\})/2\delta,$$

где λ — лебегова мера в R^1.

Обозначим через ω_δ свертку $\omega_\delta = \omega * \lambda_\delta^{2*}$.

Так как

$$\varphi(t;\ \omega_\delta) = \varphi(t;\ \omega) [\varphi(t;\ \lambda_\delta)]^2 = \varphi(t;\ \omega) \left(\frac{\sin \delta t}{\delta t}\right)^2,$$

то функция $\varphi(t;\ \omega_\delta)$ принадлежит классу $L_2(-\infty, \infty)$, аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость и продолженная функция допускает оценку

$$|\varphi(t;\ \omega_\delta)| < C(1 + \exp\{(b + 2\delta)|\operatorname{Im} t|\}) / |\operatorname{Im} t|, \quad \operatorname{Im} t < 0.$$

Из этой оценки следуют неравенства

$$|\varphi(t;\ \omega_\delta)| < C(1 + \exp\{(b + 2\delta)|\operatorname{Im} t|\}, \quad \operatorname{Im} t < -1; \tag{15}$$

$$|\varphi(t;\ \omega_\delta)| < \frac{C_1}{|\operatorname{Im} t|}, \quad -1 \leqslant \operatorname{Im} t < 0.$$

Кроме того,

$$|\varphi(t;\ \omega_\delta)| < \mathrm{const}, \quad \operatorname{Im} t = 0$$

как преобразование Фурье заряда ω_δ.

Таким образом, применима лемма 4, и для функции $\varphi(t;\ \omega_\delta)$ получаем оценку

$$|\varphi(t;\ \omega_\delta)| < \text{const}, \quad -1 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant 0.$$

Следовательно, неравенство (15) справедливо во всей полуплоскости $\operatorname{Im} t \leqslant 0$, и функция $\varphi(t;\ \omega_\delta)$ удовлетворяет условиям леммы 5 с $a = b + 2\delta$.

Применяя эту лемму, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(t;\ \omega_\delta)\, e^{-itx} dt = 0 \tag{16}$$

при $x > \max(0,\ b) + 2\delta$.

Легко показать, что

$$\omega_\delta\{(-\infty,\ x)\} = \frac{1}{(2\delta)^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \omega\{(-\infty,\ x - y - u)\}\, dy du. \tag{17}$$

После соответствующей замены переменных

$$\omega_\delta\{(-\infty,\ x)\} = \frac{1}{(2\delta^2)}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} dy \int\limits_{y-\delta}^{y+\delta} \omega\{(-\infty,\ u)\}\, du.$$

Из последнего соотношения видно, что функция $\omega_\delta\{(-\infty,\ x)\}$ непрерывно дифференцируема и $\frac{d}{dx}\omega_\delta\{(-\infty,\ x)\}$ является (обратным) преобразованием Фурье функции $\varphi(t;\ \omega_\delta)$.

Используя (16), имеем, что $\frac{d}{dx}\omega_\delta\{(-\infty,\ x)\} = 0$ при $x > \max(0,\ b) + 2\delta$. Это вместе с (17) дает

$$\frac{1}{(2\delta)^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \omega\{(-\infty,\ x - y - u)\}\, dy\, du = \text{const},$$

при $x > \max(0,\ b) + 2\delta$.

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 0$ получаем, что во всех точках непрерывности функции $\omega\{(-\infty,\ x)\}$ из полуинтервала $(\max(0,\ b),\ \infty)$ справедливо

$$\omega(-\infty,\ x) = \text{const}, \tag{18}$$

а так как функция $\omega\{(-\infty,\ x)\}$ непрерывна слева, то равенство (18) имеет место при всех $x \in (\max(0,\ b),\ \infty)$. Лемма доказана.

Лемма 7 [4, с. 59]. *Пусть заряды μ_1 и μ_2 сосредоточены соответственно в множествах A_1 и A_2 типа F_σ. Тогда заряд $\mu = \mu_1 * \mu_2$ сосредоточен в множестве $A = A_1 + A_2$.*

Обозначим через $\Theta(a, b)$ гиперполосу $\Theta(a, b) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : a \leqslant x_n < b\}$ и через $\Theta(a)$ — гиперплоскость $\Theta(a) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_n = a\}$.

Лемма 8. *Пусть свертка $\mu = \mu_1 * \mu_2$ вполне конечных мер μ_1 и μ_2 сосредоточена в множестве A, лежащем в гиперполосе $\Theta(b, \infty)$. Предположим, что существует вектор $\boldsymbol{b} \in \Theta(b)$ такой, что $\mu(\{\boldsymbol{b}\}) > 0$. Тогда меры μ_1 и μ_2 сосредоточены соответственно в множествах $A - \boldsymbol{b}^{(1)}$, $A - \boldsymbol{b}^{(2)}$, где $\boldsymbol{b}^{(1)} + \boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{b}$, причем $\mu_1(\{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^{(1)}\}) > 0$ и $\mu_2(\{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^{(2)}\}) > 0$.*

Доказательство. Сначала отметим, что если E_1, E_2, $E_1 + E_2$ — борелевские множества, то

$$\mu(E_1 + E_2) \geqslant \mu_1(E_1)\mu_2(E_2). \tag{19}$$

Действительно,

$$\mu(E_1 + E_2) = \int \mu_1(E_1 + E_2 - x)\mu_2(dx) \geqslant \int_{E_2} \mu_1(E_1 + E_2 - x)\mu_2(dx) \geqslant$$
$$\geqslant \mu_1(E_1)\mu_2(E_2),$$

ибо из $x \in E_2$ следует $E_1 + E_2 - x \supset E_1$.

Покажем, что меры μ_1 и μ_2 сосредоточены в некоторой гиперполосе $\Theta(a, \infty)$, $a > -\infty$.

Если бы это было не так, например, для меры μ_1, то можно было бы найти последовательность гиперполос $\Theta(c_k, c_k + 1)$, $c_k \to -\infty$ такую, что $\mu_1\{\Theta(c_k, c_k + 1)\} > 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда для любой гиперполосы $\Theta(c, c + 1)$, для которой $\mu_2\{\Theta(c, c + 1)\} > 0$, имели бы

$$\mu\{\Theta(c, c + 1) + \Theta(c_k, c_k + 1)\} \geqslant$$
$$\geqslant \mu_1\{\Theta(c_k, c_{k+1})\}\mu_2\{\Theta(c, c + 1)\} > 0.$$

Но это невозможно, так как $\Theta(c, c + 1) + \Theta(c_k, c_k + 1) = \Theta(c + c_k, c + c_k + 2)$ и $\Theta(c + c_k, c + c_k + 2) \cap \Theta(b, \infty) = \varnothing$ при достаточно большом k.

Обозначим через $\Theta(a_1, \infty)$ гиперполосу, являющуюся пересечением всех гиперполос $\Theta(a, \infty)$, в которых сосредоточена мера μ_1. Очевидно, что μ_1 сосредоточена также в $\Theta(a_1, \infty)$. Соответствующую гиперполосу для меры μ_2 обозначим через $\Theta(a_2, \infty)$. Из леммы 6 следует, что $\Theta(b, \infty) \subset \Theta(a_1, \infty) + \Theta(a_2, \infty) = \Theta(a_1 + a_2, \infty)$. С другой стороны, из неравенства (19) легко получаем $\Theta(a_1 + a_2, \infty) \subset \Theta(b, \infty)$. Поэтому $\Theta(a_1 + a_2, \infty) = \Theta(b, \infty)$ и, значит, $a_1 + a_2 = b$.

Пусть теперь $E \subset \Theta(b)$. Замечая, что $\{x \in R^n: \mu_1(E - x) \neq 0\} \subset \{x \in R^n : x_n \leqslant a_2\}$, получаем

$$\mu(E) = \int_{\Theta(a_2)} \mu_1(E - x)\mu_2(dx), \quad E \subset \Theta(b). \tag{20}$$

Кроме того, при $x \in \Theta(a_2)$ верно включение $E - x \in \Theta(a_1)$.

Множество точек $x_k^{\prime} \in \Theta(a_2)$, для которых $\mu_1(\boldsymbol{b} - x_k) > 0$, не более чем счетно. Специализируя (20) при $E = \{\boldsymbol{b}\}$, получаем

$$\mu(\boldsymbol{b}) = \sum_{D} \mu_1(\{\boldsymbol{b} - x_k\}) \, \mu_2(\{x_k\}) > 0,$$

где

$$D = \{ x_k \in \Theta(a_2) : \mu_1(\{\boldsymbol{b} - x_k\}) > 0, \quad \mu_2\{x_k\} > 0 \},$$

причем множество D не пусто.

Выберем элемент $\boldsymbol{a}^{(2)} \in D$ и обозначим $\boldsymbol{a}^{(1)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^{(2)}$.

Возьмем теперь любое множество E такое, что $E \cap (A - \boldsymbol{a}^{(2)}) = \varnothing$. В силу (19) получаем

$$\mu_1(E) \, \mu_2(\{\boldsymbol{a}^{(2)}\}) \leqslant \mu([E + \boldsymbol{a}^{(2)}] \cap A) = 0,$$

ибо $[E + \boldsymbol{a}^{(2)}] \cap A = \varnothing$. Тем самым доказано, что мера μ_1 сосредоточена на множестве $A - \boldsymbol{a}^{(2)}$. Аналогично доказывается, что мера μ_2 сосредоточена на $A - \boldsymbol{a}^{(1)}$. Остается положить $\boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{a}^{(1)}$.

Приступим к доказательству теоремы 5.

1. Пусть P — закон, удовлетворяющий условиям теоремы 5, и пусть $P = Q * T$, где Q, T — некоторые з. р.

Так как закон P не имеет гауссовой компоненты и мера ν_P вполне конечна, то, не уменьшая общности, можно считать, что выражение для х. ф. $\varphi(t; P)$ имеет вид

$$\varphi(t; P) = \exp\left\{ \int (e^{i<t, x>} - 1) \, \nu_P(dx) \right\}. \tag{21}$$

Запишем

$$\varphi(t; P) = \exp\left\{ \int (e^{i<t, x>} - 1) \, \nu_P(dx) \right\} =$$

$$= e^{-\nu_P(R^n)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \int e^{i<t, x>} \nu_P(dx) \right\}^m =$$

$$= e^{-\nu_P(R^n)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int e^{i<t, x>} \nu_P^{m*}(dx) \right\} =$$

$$= e^{-\nu_P(R^n)} \int e^{i<t, x>} \left\{ \varepsilon_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_P^{m*}}{m!} \right\} (dx).$$

Поэтому

$$P = e^{-\nu_P(R^n)} \left(\varepsilon_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_P^{m*}}{m!} \right), \tag{22}$$

откуда следует, что закон P сосредоточен на множестве

$$\{0\} \cup M^{+}(A), \tag{23}$$

жащем в гиперполосе $\{x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n : x_n \geqslant 0\}$, причем $(\{0\})>0$. Применяя лемму 8, заключаем, что законы Q и T сосредоточены соответственно в множествах $[\{0\}\cup M^+(A)]-\boldsymbol{b}^{(1)}$ и $[\{0\}\cup M^+(A)]-\boldsymbol{b}^{(2)}$, где $\boldsymbol{b}^{(1)}+\boldsymbol{b}^{(2)}=0$, причем $Q(\{\boldsymbol{b}^{(2)}\})>0$, $T(\{\boldsymbol{b}^{(1)}\})>0$.

В дальнейшем будем считать, что $\boldsymbol{b}^{(1)}=\boldsymbol{b}^{(2)}=0$. Это не уменьшит общности нашего исследования, так как вместо законов Q и T можно рассматривать «сдвиги» $Q*\varepsilon_{-b^{(1)}}$, $T*\varepsilon_{-b^{(2)}}$. Очевидно, композиция этих сдвигов тоже равна P, а х. ф. «сдвига» отличается от х. ф. соответствующего ему закона лишь множителем $\exp\{i<t, \boldsymbol{b}^{(i)}>\}$.

Таким образом, законы Q и T в нашем случае сосредоточены в множестве (23), причем $Q(\{0\})>0$, $T(\{0\})>0$.

Так как $\{0\}\cup M^+(A)\subset\{x\in R^n : x_n>0\}$, при фиксированных вещественных $t_1, \ldots, t_{n-1}$ х. ф. $\varphi(t;\ Q)$ и $\varphi(t;\ T)$ голоморфны по t_n в полуплоскости $\{t_n\in C^1 : \operatorname{Im} t_n>0\}$ и непрерывны в ее замыкании.

Для доказательства теоремы достаточно установить, что если

$$Q(\{0\})>Q(R^n\setminus\{0\}), \tag{24}$$

то для распределения Q имеет место представление, указанное в теореме 5 с $\sigma=0$.

Действительно, если $Q(\{0\})\leqslant Q(R^n\setminus\{0\})$, то в силу сосредоточенности меры $Q-Q(\{0\})\varepsilon_0$ на множестве $\{x\in R^n : x_n>0\}$ подберем и зафиксируем $\sigma>0$ столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{R^n\setminus\{0\}} e^{-\sigma x_n}Q(dx)<Q(\{0\}). \tag{25}$$

Рассмотрим n-мерные распределения P_σ, Q_σ, T_σ, определяемые соотношениями

$$P_\sigma(E)=\int\limits_E e^{-\sigma x_n}P(dx)/\int\limits_{R^n} e^{-\sigma x_n}P(dx);$$
$$Q_\sigma(E)=\int\limits_E e^{-\sigma x_n}Q(dx)/\int\limits_{R^n} e^{-\sigma x_n}Q(dx);$$
$$T_\sigma(E)=\int\limits_E e^{-\sigma x_n}T(dx)/\int\limits_{R^n} e^{-\sigma x_n}T(dx)$$

с характеристическими функциями

$$\begin{aligned}\varphi(t;\ P_\sigma)&=\varphi(t+i\sigma e_n;\ P)/\varphi(i\sigma e_n;\ P);\\ \varphi(t;\ Q_\sigma)&=\varphi(t+i\sigma e_n;\ Q)/\varphi(i\sigma e_n;\ Q);\\ \varphi(t;\ T_\sigma)&=\varphi(t+i\sigma e_n;\ T)/\varphi(i\sigma e_n;\ T).\end{aligned} \tag{26}$$

Имеем

$$\varphi(t,\ P_\sigma)=\varphi(t;\ Q_\sigma)\,\varphi(t;\ T_\sigma).$$

Из (25) легко следует, что

$$Q_\sigma(\{0\}) > Q_\sigma(R^n \setminus \{0\}),$$

а из (26) вытекает, что х. ф. $\varphi(t;\ P_\sigma)$ имеет вид (21), где роль меры ν_P играет мера $\nu_{P,\sigma}(E) = \int\limits_E e^{-\sigma x_n}\ \nu_P(dx)$.

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется (24). Запишем

$$\ln\varphi(t;\ Q) = \ln\{Q(\{0\}) + \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} e^{i<t,\ x>} Q(dx)\} =$$

$$= \ln(\{0\}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\,(Q(\{0\}))^m} \left\{ \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} e^{i<t,\ x>} Q\ (dx) \right\}^m. \tag{27}$$

Рассмотрим ряд

$$\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\,(Q(\{0\}))^m} (Q - Q(\{0\})\,\varepsilon_0)^{m*}. \tag{28}$$

Этот ряд, очевидно, сходится абсолютно и равномерно на классе борелевских множеств, и, следовательно, μ является зарядом. Ясно, что заряд μ сосредоточен на множестве $M^+(M^+(A)) = M^+(A)$.

Принимая во внимание, что $\varphi(0;\ Q) = 1$, из (27) и (28) получаем, что

$$\varphi(t;\ Q) = \exp\{\int (e^{i<t,\ x>} - 1)\,\mu(dx)\},\ t \in R^n, \tag{29}$$

в котором заряд μ сосредоточен на $M^+(A)$.

Задача заключается теперь в том, чтобы показать, что заряд μ сосредоточен на множестве $\overline{\mathrm{Co}\,A}$, где $\mathrm{Co}\,A$ — выпуклая оболочка множества A.

2. Введем в рассмотрение опорную функцию $H(e)$ множества $\mathrm{Co}\,A$, определенную на единичной сфере S^n пространства R^n равенством

$$H(e) = \sup_{x\in \mathrm{Co}\,A} < e,\ x >,\ e \in S^n. \tag{30}$$

Требуется установить, что для любого $e \in S^n$ такого, что $H(e) < \infty$, и для любого борелевского множества $E \subset \{x \in R^n : < e,\ x > > H(e)\}$ имеет место $\mu(E) = 0$.

При доказательстве без ограничения общности можно ограничиться рассмотрением случая $e = e_1$, где $e_1 = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$.

3. По определению (30) опорной функции $H(e)$ имеем $H(e_1) = \sup\limits_{x\in \mathrm{Co}\,A} x_1$. Для упрощения записи обозначим $H(e_1)$ через α. Предположим, что $\alpha < \infty$.

Введем обозначения $x' = (x_2, \ldots, x_n) \in R^{n-1}$, $t' = (t_2, \ldots, t_n) \in R^{n-1}$ и

$$\psi(\tau;\ t') = \int\limits_{R^n} (e^{i\tau x_1} e^{i\langle t', x'\rangle} - 1)\, \nu_P(dx), \tag{31}$$

е ν_P — спектральная мера Леви распределения P.

Покажем, что функция $\psi(\tau;\ t')$ аналитически продолжается нижнюю полуплоскость комплексной τ-плоскости и продолженая функция допускает оценку

$$|\psi(\tau;\ t')| \leqslant C(1 + e^{\alpha |\operatorname{Im} \tau|}),\quad \operatorname{Im} \tau \leqslant 0. \tag{32}$$

Действительно, при комплексных τ, для которых $\operatorname{Im} \tau \leqslant 0$, раведливо неравенство

$$\int\limits_{R^n} (e^{-\operatorname{Im} \tau x_1} + 1)\, \nu_P(dx) \leqslant \nu_P(R^n)(1 + e^{\alpha |\operatorname{Im} \tau|}).$$

сюда в силу предположенной конечности значения α опорной ункции $H(e)$ в точке $e = e_1$ следует, что интеграл

$$\int\limits_{R^n} (e^{i\tau x_1} e^{i\langle t', x'\rangle} - 1)\, \nu_P(dx),\quad \operatorname{Im} \tau \leqslant 0,\ t' \in R^{n-1},$$

ходится абсолютно и равномерно на любом компакте в нижней олуплоскости и поэтому $\psi(\tau;\ t')$ является там голоморфной функией, допускающей оценку (32).

4. Так как распределения Q и T являются компонентами распределения P, то при $\tau \in R^1$, $t \in R^{n-1}$ имеет место равенство

$$\varphi(\tau,\ t';\ P) = \varphi(\tau,\ t';\ Q)\, \varphi(\tau,\ t';\ T). \tag{33}$$

Положив здесь $t' = 0$, приходим к соотношению

$$\varphi(\tau;\ P_1) = \varphi(\tau;\ Q_1)\, \varphi(\tau,\ T_1)$$

между х. ф. одномерных распределений P_1, Q_1, T_1, являющихся проекциями на направление вектора e_1 соответственно распределений P, Q, T.

Характеристическая функция $\varphi(\tau;\ P_1)$ в силу (31) и представления Леви для х. ф. $\varphi(t;\ P)$ имеет вид

$$\varphi(\tau;\ P_1) = \varphi(\tau,\ 0;\ P) = \exp\{\psi(\tau;\ 0)\}$$

и по доказанному в предыдущем пункте голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} \tau < 0$. Следовательно, по лемме 3 это же справедливо также для х. ф. $\varphi(\tau;\ Q_1)$, и интеграл $\varphi(i\tau;\ Q_1) = \int\limits_{R^1} e^{-\tau x_1} Q_1(dx_1)$ сходится при любом $\tau \leqslant 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau,\ t';\ Q) = \int\limits_{R^n} e^{i\tau x_1}\ e^{i\langle t', x'\rangle} Q(dx)$,

$\tau \in R^1$, $t' \in R^{n-1}$. Так как при любом $t' \in R^{n-1}$ и любом $\tau \in C^1$, $\operatorname{Im} \tau \leqslant 0$,

$$\left| \int\limits_{R^n} e^{i\tau x_1} e^{i<t',\ x'>} Q(dx) \right| \leqslant \int\limits_{R^n} e^{-\tau x_1} Q_1(dx) < \infty, \tag{34}$$

то х. ф. $\varphi(\tau,\ t';\ Q)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} \tau < 0$. Это же справедливо и для функции $\varphi(\tau,\ t';\ T)$ и в силу единственности аналитического продолжения соотношение (33) имеет место при всех $\tau \in C^1$, $\operatorname{Im} \tau \leqslant 0$, и всех $t' \in R^{n-1}$.

Ввиду того, что $\varphi(\tau,\ t';\ P)$ не обращается в нуль при $\operatorname{Im} \tau \leqslant 0$, $t' \in R^{n-1}$, по (33) там же отлична от нуля и функция $\varphi(\tau,\ t';\ Q)$. Поэтому, обозначая $h(\tau;\ t') \equiv \ln \varphi(\tau,\ t';\ Q)$, где в качестве $\ln \varphi(\tau,\ t';\ Q)$ выбрана главная ветвь, видим, что $h(\tau;\ t')$ голоморфна в нижней полуплоскости комплексной τ-плоскости и $\varphi(\tau,\ t';\ Q) = \exp\{h(\tau;\ t')\}$.

Положим

$$u(r,\ s;\ t') = \operatorname{Re} h(r + is;\ t'),\quad r \in R^1,\ s \leqslant 0,\ t' \in R^{n-1}.$$

5. Покажем, что справедливо неравенство

$$\begin{gathered} 0 \leqslant u(0,\ s;\ 0) - u(r,\ s;\ t') \leqslant C(1 + e^{\alpha|s|}), \\ -\infty < r < \infty,\quad s \leqslant 0;\quad t' \in R^{n-1}. \end{gathered} \tag{35}$$

Из соотношения (33) следует

$$\frac{\varphi(is,\ 0;\ P)}{\varphi(r + is,\ t';\ P)} = \frac{\varphi(is,\ 0;\ Q)}{\varphi(r + is,\ t';\ Q)} \frac{\varphi(is,\ 0;\ T)}{\varphi(r + is,\ t';\ T)}. \tag{36}$$

Используя (34), находим, что

$$|\varphi(r + is,\ t';\ Q)| \leqslant \varphi(is,\ 0;\ Q)$$

и аналогично

$$|\varphi(r + is,\ t';\ T)| \leqslant \varphi(is,\ 0;\ T).$$

Принимая во внимание последние неравенства, из (36) получаем соотношения

$$1 \leqslant \frac{\varphi(is,\ 0;\ Q)}{|\varphi(r + is,\ t';\ Q)|} \leqslant \frac{\varphi(is,\ 0;\ P)}{|\varphi(r + is,\ t';\ P)|},$$

которые перепишем в виде

$$0 \leqslant u(0,\ s;\ 0) - u(r,\ s;\ t') \leqslant \psi(is;\ 0) - \operatorname{Re} \psi(r + is,\ t').$$

Отсюда и из оценки (32) следует требуемое утверждение.

6. Покажем, что при $s \leqslant 0$ справедлива оценка

$$|u(0,\ s;\ 0)| \leqslant C(1 + e^{\alpha|s|})(1 + |s|). \tag{37}$$

По лемме 2 функция $h(is;\ 0)=\ln\varphi(is,\ 0;\ Q)$ является выпуклой по s при $s\leqslant 0$. Поэтому

$$u(0,\ s;\ 0)\equiv h(is;\ 0)\geqslant h(0;\ 0)+s\left.\frac{dh(iy;\ 0)}{dy}\right|_{y=0}\geqslant -C|s|,\quad C>0.$$

Аналогичная оценка справедлива для функции $\ln\varphi(is,\ 0;\ T)$. Имеем теперь

$$u(0,\ s;\ 0)=\ln\varphi(is,\ 0;\ Q)=\ln\varphi(is,\ 0;\ P)-\ln\varphi(is,\ 0;\ T)\leqslant$$
$$\leqslant\ln\varphi(is,\ 0;\ P)+C|S|=\psi(is;\ 0)+C|s|.$$

Воспользовавшись (32) для оценки функции $\psi(is;\ 0)$, получаем требуемое утверждение.

7. Установим справедливость неравенств

$$|h(\tau;\ t')|\leqslant\frac{C(t')}{|\operatorname{Im}\tau|}(1+|\tau|^2)(1+e^{\alpha|\operatorname{Im}\tau|}),\quad -1\leqslant\operatorname{Im}\tau<0;$$
$$|h(\tau;\ t')|\leqslant C(t')(1+|\tau|^2)(1+e^{\alpha|\operatorname{Im}\tau|}),\quad \operatorname{Im}\tau<-1. \tag{38}$$

Из (35), (37) и соотношения

$$|u(r,\ s;\ t')|\leqslant|u(0,\ s;\ 0)|+|u(r,\ s;\ t')-u(0,\ s;\ 0)|$$

находим оценку

$$|u(r,\ s;\ t')|\leqslant C(1+|s|)(1+e^{\alpha|s|}),$$
$$-\infty<r<\infty,\ s\leqslant 0,\ t'\in R^{n-1}. \tag{39}$$

По известной формуле Шварца в круге $|\zeta|<|\operatorname{Im}\tau|$ имеем

$$h(\tau+\zeta;\ t')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(\operatorname{Re}\tau+|\operatorname{Im}\tau|\cos\Theta,\ \operatorname{Im}\tau+|\operatorname{Im}\tau|\sin\Theta;\ t')\times$$
$$\times\frac{|\operatorname{Im}\tau|e^{i\Theta}+\zeta}{|\operatorname{Im}\tau|e^{i\Theta}-\zeta}d\Theta+i\operatorname{Im}h(\tau;\ t').$$

Дифференцируя по ζ и полагая затем $\zeta=0$, получаем

$$h'(\tau;\ t')=\frac{1}{\pi|\operatorname{Im}\tau|}\int\limits_0^{2\pi}u(\operatorname{Re}\tau+|\operatorname{Im}\tau|\cos\Theta,\ \operatorname{Im}\tau+$$
$$+|\operatorname{Im}\tau|\sin\Theta;\ t')e^{-i\Theta}d\Theta,$$

откуда

$$|h'(\tau;\ t')|\leqslant\frac{4}{|\operatorname{Im}\tau|}\max|u(\operatorname{Re}\tau+|\operatorname{Im}\tau|\cos\Theta,\ \operatorname{Im}\tau+$$
$$+|\operatorname{Im}\tau|\sin\Theta;\ t'),\ 0\leqslant\Theta\leqslant 2\pi.$$

Из этого неравенства в силу оценки (39) вытекает, что

$$|h'(\tau;\ t')|\leqslant\frac{C}{|\operatorname{Im}\tau|}(1+e^{\alpha|\operatorname{Im}\tau|})(1+|\operatorname{Im}\tau|),\ \operatorname{Im}\tau<0. \tag{40}$$

Если $-1 \leqslant \operatorname{Im}\tau < 0$, то функция $h(i \operatorname{Im}\tau;\ t')$ ограничена по модулю некоторой зависящей от t' константой.

Воспользовавшись теперь неравенством (40) и соотношением

$$h(\tau;\ t') = \int\limits_{\operatorname{Im}\tau}^{\tau} \frac{d}{d\beta} h(\beta;\ t')\, d\beta + h(i \operatorname{Im}\tau;\ t'),$$

получаем требуемую оценку для $h(\tau;\ t')$ при $-1 \leqslant \operatorname{Im}\tau < 0$.

При $\operatorname{Im}\tau < -1$ из (40) вытекает неравенство

$$|h'(\tau;\ t')| \leqslant C(1 + e^{\alpha|\operatorname{Im}\tau|})(1 + |\operatorname{Im}\tau|).$$

Поэтому из выражения

$$h(\tau;\ t') = \int\limits_{-i}^{\tau} \frac{d}{d\beta} h(\beta;\ t')\, d\beta + h(-i;\ t')$$

находим требуемую оценку для $h(\tau;\ t')$ при $\operatorname{Im}\tau < -1$.

8. Пусть μ — заряд, фигурирующий в представлении (29). Определим в R^1 комплексный заряд $\omega_{t'}$ соотношением

$$\omega_{t'}(E) = \int\limits_{E} \int\limits_{R^{n-1}} e^{i<t',\ x'>} \mu(dx) - \mu(R^n)\, \varepsilon_0.$$

Из (29), (38) и определения функции $h(\tau;\ t')$ следует, что $h(\tau;\ t') \equiv \varphi(\tau;\ \omega_{t'})$ удовлетворяет условиям леммы 6, если в качестве заряда ω и константы b, фигурирующих в условиях этой леммы, принять соответственно $\omega_{t'}$ и $H(e_1)$.

Применяя лемму 6, получаем, что при всех вещественных a и b таких, что $\max(0,\ H(e_1)) < a \leqslant b \leqslant \infty$,

$$\int\limits_{a}^{b} \int\limits_{R^{n-1}} e^{i<t',\ x'>} \mu(dx) = 0. \tag{41}$$

Определим в R^{n-1} заряд μ_1 равенством

$$\mu_1(E) = \int\limits_{a}^{b} \int\limits_{E} \mu(dx).$$

Из (41) следует, что $\int\limits_{R^{n-1}} e^{i<t',\ x'>} \mu_1(dx') = 0$ при всех $t' \in R^{n-1}$.

Отсюда вытекает, что $\mu_1 \equiv 0$.

В силу произвольности чисел a и b в определении заряда μ_1 отсюда следует, что $\mu(E) = 0$ при $E \subset \{x \in R^n : x_1 > \max(0,\ H(e_1))\}$.

Таким образом, доказано, что для любого $e \in S^n$ такого, что $H(e) < \infty$, и любого борелевского множества $E \subset \{x \in R^n : < x,\ e > > \max(0,\ H(e))\}$ $\mu(E) = 0$.

Функция $H^+(e) = \max(0, H(e))$ является опорной функцией множества $\mathrm{Co}(\{0\} \cup A)$, и, следовательно, заряд μ сосредоточен на множестве $\overline{\mathrm{Co}(\{0\} \cup A)}$. С другой стороны, ранее было доказано, что этот заряд сосредоточен в $M^+(A)$. Следовательно, он сосредоточен в $\overline{\mathrm{Co}(\{0\} \cup A)} \cap M^+(A)$. Но известно [4, с. 64], что для любого $A \subset R^n$ множества $\overline{\mathrm{Co}\,A} \cap M^+(A)$ и $\overline{\mathrm{Co}\,(A \cup \{0\})} \cap M^+(A)$ совпадают, и поэтому заряд μ сосредоточен в множестве $\overline{\mathrm{Co}A} \cap M^+(A)$.

Остается показать, что если $E \cap (2)\, M^+(A) = \varnothing$, то $\mu(E) \geqslant 0$. Поскольку заряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\,(Q(\{0\}))^m}\, \tilde{\tilde{Q}}^{m*},$$

сосредоточен на множестве $\bigcup_{m=2}^{\infty} (m)\, M^+(A) = (2)\, M^+(A)$, то из (28) следует, что $\mu(E) \geqslant 0$.

Теорема 5 доказана полностью.

Приступим к доказательству теоремы 7.

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма. [6, с. 763]. *Любая точка, принадлежащая выпуклому, замкнутому, ограниченному множеству из R^n, представима в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ крайних точек этого множества.*

Для доказательства теоремы предположим противное, а именно, что $0 \in \mathrm{Co}\,A$.

Если точка 0 является крайней для $\mathrm{Co}\,A$, то, по определению крайней точки, $0 \in A$, откуда тривиально $0 \in (2)\, M^+(A)$. Значит, в данном случае утверждение теоремы верно.

Предположим теперь, что 0 принадлежит $\mathrm{Co}\,A$, не являясь для $\mathrm{Co}\,A$ крайней точкой.

Рассмотрим набор $B = \{x_1, \ldots, x_{m+1}\} \subset A$ из $m+1$ крайних точек множества $\mathrm{Co}\,A$ такой, что

$$0 = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k = 1 \tag{42}$$

и не существует набора, состоящего из меньшего числа элементов и удовлетворяющего условию (42).

В (42) $m \geqslant 1$, ибо, по предположению, 0 не является крайней точкой для $\mathrm{Co}\,A$.

Выпуклая оболочка $\mathrm{Co}\,B$ множества B является многогранником с вершинами из B. С одной стороны, из (42) следует, что размерность $\mathrm{Co}\,B$ как множества в R^n не превышает m. С другой стороны, если бы размерность $\mathrm{Co}\,B$ была меньше m, то, по лемме, вектор 0 мог бы быть представлен в виде выпуклой комбинации меньшего, чем $m+1$, числа крайних точек из $\mathrm{Co}\,B$ (являющихся также крайними точками для $\mathrm{Co}\, A$). Но это противоречило бы «минимальности» системы B.

Таким образом, размерность множества $\mathrm{Co}\, B$ равна m. Будем считать, что $\mathrm{Co}\, B$ принадлежит m-мерному подпространству из R^n, порожденному векторами $e_j = (\delta_{1j}, \ldots, \delta_{mj}, 0, \ldots, 0)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Отождествим это подпространство с R^m, в котором далее и будем проводить все рассмотрения.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m+1}$ — набор положительных чисел из (43). По известной теореме Кронекера [7, с. 106], система неравенств

$$\alpha_k t\,| < \frac{\alpha_k}{2} \pmod 1, \quad k = 1, 2, \ldots, m+1,$$

имеет сколь угодно большие положительные решения. Значит, можно подобрать положительное число τ с условием

$$\tau > \frac{3}{2} \max_{1 \leqslant k \leqslant m+1} (1/\alpha_k), \tag{43}$$

и соответствующий набор целых чисел $\{p_k\}_{k=1}^{m+1}$ так, чтобы

$$-\frac{\alpha_k}{2} < \alpha_k \tau - p_k < \frac{\alpha_k}{2}, \; k = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{44}$$

Используя (43), из правой части неравенства (44) получаем

$$p_k \geqslant 1, \; k = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{45}$$

Покажем, что вектор $y = \sum\limits_{k=1}^{m+1} p_k x_k$ принадлежит $\mathrm{Co}\, B$.

По построению, множество вершин многогранника $\mathrm{Co}\, B$ содержится в B. Верно и обратное включение, ибо иначе 0 мог бы быть представлен в виде выпуклой комбинации меньшего, чем $m+1$, числа крайних точек из $\mathrm{Co}\, A$.

Пусть λ_j — направляющий орт гиперплоскости в R^m, проходящей через точки $x_k \in B$, $k \neq j$, так что

$$< \lambda_j, \; x_k > = d_j > 0, \; k = 1, 2, \ldots, m+1; \; k \neq j. \tag{46}$$

Тогда многогранник $\mathrm{Co}\, B$ определяется пересечением полупространств в R^m, задаваемых системой неравенств

$$< \lambda_j, \; x > \leqslant d_j, \; j = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{47}$$

Из (46) и (42) следует

$$0 = < \lambda_j, \; 0 > = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k < \lambda_j, \; x_k > = \alpha_j < \lambda_j, \; x_j > + \, d_j (1 - \alpha_j).$$

Отсюда получаем

$$< \lambda_j, \; x_j > = -d_j \left(\frac{1}{\alpha_j} - 1\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{48}$$

Далее, используя (48), (46) и (44), имеем

$$< \lambda_j,\ y > = p_j < \lambda_j,\ x_j > + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m+1} p_k < \lambda_j,\ x_k > =$$

$$= -d_j\left(\frac{1}{\alpha_j}-1\right)p_j + d_j\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m+1} p_k = d_j\left(\sum_{k=1}^{m+1} p_k - \frac{p_j}{\alpha_j}\right) \leqslant$$

$$\leqslant d_j\left[\sum_{k=1}^{m+1}\left(\alpha_k\tau + \frac{\alpha_k}{2}\right) - \frac{1}{\alpha_j}\left(\alpha_j\tau - \frac{\alpha_j}{2}\right)\right] =$$

$$= d_j\left[\left(\tau + \frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{m+1}\alpha_k - \left(\tau - \frac{1}{2}\right)\right] = d_j, \quad j = 1, \ldots, m+1.$$

Таким образом, вектор y удовлетворяет неравенствам (47), иными словами, принадлежит $\mathrm{Co}\,B\ (\subset \mathrm{Co}\,A)$.

С другой стороны, из (45) следует, что $y \in (2)\,M^+(A)$, и, значит, условие (2) не выполняется. Это противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В. Разложения вероятностных законов. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1960. 263 с.
2. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 480 с.
3. Островський Й. В. До теорії розкладань багатовимірних безмежно подільних законів. — «Докл. АН УРСР. Сер. А», 1972, № 11, с. 997—1000.
4. Островский И. В. О разложениях многомерных безгранично делимых законов без гауссовой компоненты. — «Вестник Харьк. ун-та», 1966, № 32. Сер. матем., вып. 8, с. 51—72.
5. Островский И. В. Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов. — «Труды Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова», 1965, т. 79, с. 198—235.
6. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963. 776 с.
7. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953. 396 с.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., «Наука», 1969. 576 с.
9. Cuppens R. Decomposition des fonctions caracteristiques indefiniment dizisibles de plusieurs variables a spectre de Poisson continu. — «Ann. Inst H. Poincare», 1969, a. 5, № 2, p. 123—133.
10. Levy P. Theorie de l'addition des variables aleatoires. Paris, Ed. Gauthier — Villars, 1937. 530 p.
11. Cramer H. Problems in probability theory. — «Ann. math. stat»., 1947, vol. 18, № 2. p. 165—193.