О СПЕКТРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ОЦЕНКАХ ФУНКЦИЙ ОТ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Э. Кацнельсон, В. И. Мацаев

В работе [1] Дж. фон Нейман дал определение спектрального множества линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве. Это определение непосредственно переносится на случай оператора в банаховом пространстве.

Определение. *Замкнутое множество σ точек комплексной λ-плоскости называется спектральным множеством оператора A в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, если для любой рациональной функции $f(\lambda)$, удовлетворяющей условию*

$$\sup_{\lambda\in\sigma}|f(\lambda)|\leqslant 1,$$

оператор $f(A)$ определен и выполняется неравенство

$$\|f(A)\|\leqslant 1.$$

Оператор B, удовлетворяющий неравенству $\|B\|\leqslant 1$, как известно называется сжатием. Дж. фон Нейман доказал, что круг $K_1=\{\lambda:|\lambda|\leqslant 1\}$ является спектральным множеством любого сжатия A в гильбертовом пространстве[1]. При доказательстве этого утверждения он существенно использовал некоторые результаты И. Шура [5] о функциях, голоморфных и ограниченных в единичном круге.

Ниже мы исследуем спектральные множества операторов в банаховом пространстве.

Теорема 1. *Для того, чтобы замкнутое множество σ точек комплексной плоскости было спектральным множеством для всех сжатий во всевозможных банаховых пространствах, необходимо и достаточно, чтобы для каждой рациональной функции, удовлетворяющей условию*

$$\sup_{\lambda\in\sigma}|f(\lambda)|\leqslant 1, \tag{1}$$

[1] Как доказал С. Фойяш [2], если для любого сжатия в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ круг K_1 является спектральным множеством, то $\mathfrak{B}$ — гильбертово пространство.

выполнялись условия

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n,\ \lambda\in K_1, \tag{2}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\leqslant 1. \tag{3}$$

Доказательство. Достаточность.
Так как $f(\lambda)$ — рациональная функция и

$$\max_{|\lambda|\leqslant 1}|f(\lambda)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\leqslant 1,$$

то $f(\lambda)$ голоморфна в K_1. Следовательно, для любого сжатия A $f(\lambda)$ будет голоморфной в некотором круге, содержащем спектр оператора A. Поэтому

$$f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n$$

и

$$\|f(A)\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot\|A^n\|\leqslant 1.$$

Необходимость. Рассмотрим банахово пространство c_0 всех числовых последовательностей $x=\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящихся к нулю, с нормой

$$\|x\|=\max_n|\xi_n|.$$

Векторы $e_k=\{\delta_{n,k}\}_{n=0}^{\infty}$ образуют базис пространства c_0. Пусть A оператор в c_0, определенный следующим образом:

$$Ae_k=e_{k+1}\quad(k=0,1,2,\ldots).$$

Нетрудно видеть, что $\|A\|=1$ и спектр оператора A заполняет круг K_1. По условию σ является спектральным множеством оператора A и, следовательно, содержит круг K_1. Поэтому любая рациональная функция, удовлетворяющая (1), разлагается в степенной ряд с радиусом сходимости, большим единицы, и

$$f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n.$$

Оператор $f(A)$ задается в базисе $\{e_k\}$ матрицей

$$\left\|\begin{matrix}a_0&0&0&0&\ldots\\a_1&a_0&0&0&\ldots\\a_2&a_1&a_0&0&\ldots\\a_3&a_2&a_1&a_0&\ldots\\a_4&a_3&a_2&a_1&\ldots\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\;\cdot\;\cdot\end{matrix}\right\|$$

Отсюда

$$\|f(A)\|=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|.$$

Поэтому, если σ — спектральное множество оператора A, то для любой рациональной функции $f(\lambda)$, удовлетворяющей (1), выполняется (2) и (3).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того, чтобы круг* $K_\rho = \{\lambda : |\lambda| \leqslant \rho\}$ *был спектральным множеством для всех сжатий A во всевозможных банаховых пространствах, необходимо и достаточно, чтобы было* $\rho \geqslant 3$.

Доказательство. Необходимость. Функция

$$B_\alpha(\lambda) = \frac{\lambda - \rho\alpha}{\rho - \bar{\alpha}\lambda}$$

голоморфна в круге K_ρ, и

$$\sup_{\lambda \in K_\rho} |B_\alpha(\lambda)| = 1.$$

Разлагая $B_\alpha(\lambda)$ в ряд Тейлора:

$$B_\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(\alpha)} \lambda^k,$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k^{(\alpha)}| = \frac{1 + \rho|\alpha| - 2|\alpha|^2}{\rho - |\alpha|}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{|\alpha| \leqslant 1} \sum_{k=0}^{\infty} |b_k^{(\alpha)}| > 1 \qquad (\rho < 3).$$

В силу теоремы 1 должно быть $\rho \geqslant 3$.

Достаточность. Пусть $\rho \geqslant 3$. Пусть, далее, $f(\lambda)$ голоморфна в круге K_ρ,

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n,$$

и

$$\sup_{\lambda \in K_\rho} |f(\lambda)| \leqslant 1.$$

Как доказал И. Шур [5], существует последовательность функций вида

$$f_N(\lambda) = \prod_{j=0}^{N} B_{\alpha_j, N}(\lambda),$$

сходящаяся к функции $f(\lambda)$ равномерно на любом компакте, лежащем внутри K_ρ. Если $\rho \geqslant 3$, то, как нетрудно показать,

$$\sup_{|\alpha| < 1} \sum_{k=0}^{\infty} |b_k^{(\alpha)}| \leqslant 1.$$

Поэтому, если

$$f_N(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,N} \lambda^k,$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k,N}| \leqslant \prod_{j=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k^{(\alpha_j, N)}| \right) \leqslant 1,$$

а так как
$$\lim_{N\to\infty} a_{k,N} = a_k,$$
то и
$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leqslant 1.$$

Вследствие теоремы 1 достаточность условия доказана и вместе с тем полностью доказана теорема 2.

Пусть A — оператор, рассмотренный при доказательстве необходимости теоремы 1. Нетрудно видеть, что
$$\sup_f \| f(A) \| = \infty,$$
где верхняя грань берется по всем рациональным функциям $f(\lambda)$, удовлетворяющим условию
$$\sup_{K_1} |f(\lambda)| \leqslant 1. \tag{4}$$
Однако для конечномерных сжатий T уже будет
$$\sup \| f(T) \| < \infty$$
и даже можно указать оценку этой верхней грани.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — точки круга K_1, функция $f(\lambda)$ голоморфна в K_1 и удовлетворяет (4). Положим
$$M(f;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n) = \inf_{\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|, \quad \left(a_k = \frac{\varphi^{(k)}0}{k!}\right), \tag{5}$$
где inf берется по всем функциям $\varphi(\lambda)$, голоморфным в K_1 и удовлетворяющим условиям[1]:
$$\varphi(\lambda_j) = f(\lambda_j) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$
Положим
$$M_n = \sup_{f;\ \lambda_j} M(f;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n), \tag{7}$$
где sup берется по всем f, голоморфным в K_1 и удовлетворяющим (4) и по всем точкам $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K_1$.

Теорема 3. *Пусть A — сжатие в n-мерном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ и пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ — спектр оператора A. Если $f(\lambda)$ голоморфна в K_1 и удовлетворяет условию* (4), *то*
$$\| f(A) \| \leqslant M(f;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n).$$
Для любых точек $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ круга K_1 существует такое n-мерное банахово пространство и в нем такое сжатие Λ, что для любой функции $f(\lambda)$, голоморфной в K_1 и удовлетворяющей (4), *выполняется*
$$\| f(\Lambda) \| = M(f;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n).$$

---
[1] В случае, когда не все точки $\{\lambda_j\}$ различны, условие (6) понимается в том смысле, что функция $f(\lambda) - \varphi(\lambda)$ имеет при $\lambda = \lambda_j$ нуль соответствующей кратности. В дальнейшем при доказательствах мы считаем точки λ_j различными. Это, очевидно, не снижает общности рассмотрения.

Доказательство. Пусть $f(\lambda)$ голоморфна в круге K_1 и удовлетворяет (4). Пусть функция

$$\varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k$$

интерполирует функцию $f(\lambda)$ в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и такая, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leqslant M(f; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)+\varepsilon.$$

Так как оператор $f(A)$ определяется лишь значением функции $f(\lambda)$ на спектре $\{\lambda_k\}_1^n$ оператора A, то

$$f(A)=\varphi(A)$$

и

$$\|f(A)\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\cdot\|A\|^k \leqslant M(f; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)+\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|f(A)\| \leqslant M(f; \lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Первая часть теоремы доказана.

Рассмотрим теперь банахово пространство W^+ всех функций вида

$$u(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k\lambda^k \qquad (|\lambda| \leqslant 1),$$

таких, что

$$\|u\|=\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| < \infty.$$

Рассмотрим подпространство $W^+(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, элементами которого являются функции $u(\lambda)\in W^+$, обращающиеся в нуль в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Фактор-пространство $W^+/W^+(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и будет являться искомым банаховым пространством. Действительно, во-первых, оно n-мерное. Во-вторых, оператор умножения на λ в W^+ переводит подпространство $W^+(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ в себя и поэтому он индуцирует некоторый оператор Λ в фактор-пространстве $\mathfrak{B}_n$. Спектр оператора Λ совпадает с множеством $\{\lambda_j\}_1^n$.

Пусть $f(\lambda)$ — функция голоморфная в K_1 и удовлетворяет (4). $f(\Lambda)$ — «оператор умножения на $f(\lambda)$» в $\mathfrak{B}_n = W^+/W^+(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Значение этого оператора на классе, содержащем элемент $e(\lambda)\equiv 1$, есть класс, содержащий элемент $f(\lambda)$. По определению нормы фактор-пространства

$$\|f(\Lambda)e\|=\inf_{\varphi}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|,$$

где inf берется по всем таким функциям $\varphi(\lambda)$,

$$\varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k,$$

которые интерполируют функцию $f(\lambda)$ в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Так как $\|e\| = 1$, то

$$\|f(\Lambda)\| \geqslant \inf \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \equiv M(f; \lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

В силу первой части теоремы

$$\|f(\Lambda)\| = M(f; \lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Теорема доказана.

Укажем явную оценку константы M_n.

Теорема 4. *Имеет место неравенство*

$$M_n \leqslant \pi \cdot n + 1.$$

Доказательство. Пусть λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$—точки круга $|\lambda| < 1$. Докажем, что любая функция $f(\lambda)$, голоморфная в K_1 и удовлетворяющая (4), может быть проинтерполирована в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ функцией

$$B(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \lambda^j,$$

голоморфной в K_1 и удовлетворяющей условию

$$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \leqslant \pi \cdot n + 1.$$

Как доказал И. Шур [5], любая голоморфная в K_1 функция $f(\lambda)$, удовлетворяющая (4), может быть проинтерполирована в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ функцией вида

$$B(\lambda) = c \cdot \prod_{k=1}^{n} B_{\alpha_k}(\lambda) \qquad |c| = 1,$$

где, как и прежде,

$$B_{\alpha_k}(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k \lambda} \qquad (|\alpha_k| < 1).$$

Так как $|B(e^{i\theta})| = 1$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ и $\arg B(e^{i\theta})$ монотонно меняется от 0 до $2\pi \cdot n$, когда θ меняется от 0 до 2π, то

$$\operatorname*{var}_0^{2\pi} B(e^{i\theta}) \equiv \int_0^{2\pi} |B'(e^{i\theta})| \, d\theta = 2\pi n.$$

В силу хорошо известной оценки [4, стр. 455]

$$\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname*{var}_0^{2\pi} B(e^{i\theta}) = \pi \cdot n.$$

Случай, когда некоторые из точек λ_j попадают на границу круга K_1, исчерпывается предельным переходом. Теорема доказана.

Следствие. Пусть A — сжатие в n-мерном банаховом пространстве, $f(\lambda)$ голоморфна в K_1 и удовлетворяет (4). Тогда

$$\|f(A)\| \leqslant M_n < \pi \cdot n + 1,$$

где M_n определено равенством (7).

Теоремы 3 и 4 дают возможность получать оценки норм степеней оператора в n-мерном пространстве, зависящие только от спектрального радиуса и нормы оператора (но не зависящие от нормировки пространства).

Теорема 5. *Пусть A — оператор в n-мерном банаховом пространстве $\mathfrak{B}_n$, ρ — спектральный радиус оператора A. Тогда*

$$\|A^p\| \leqslant M_n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} C_p^j \cdot 2^j \cdot \rho^{p-j} \cdot \|A\|^j. \tag{8}$$

Если же A — оператор в n-мерном гильбертовом пространстве, то

$$\|A^p\| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} C_p^j \cdot 2^j \cdot \rho^{p-j} \|A\|^j. \tag{9}$$

Доказательство. Так как спектральный радиус оператора $B = A \cdot \|A\|^{-1}$ равен $\rho \cdot \|A\|^{-1}$, то оценки (8) и (9) однородны относительно $\|A\|$, и поэтому, не теряя в общности, можем считать $\|A\| = 1$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — точки спектра оператора A. По условию

$$|\lambda_j| \leqslant \rho \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $f(\lambda)$ — любая голоморфная в K_1 функция, интерполирующая функцию $u(\lambda) \equiv \lambda^p$ в точках λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$f(A) = A^p,$$

и чтобы оценить $\|A^p\|$, достаточно оценить на основании теорем 3 и 4

$$m(\rho) = \inf_f \max_{\lambda \in K_1} |f(\lambda)|.$$

Покажем, что

$$m(\rho) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} C_p^j 2^j \cdot \rho^{p-j}.$$

Построим интерполяционный полином Ньютона $P(\lambda)$, интерполирующий функцию $u(\lambda)$ в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} [\lambda_1 \lambda_2 \ , \ldots \ \lambda_{j+1}] (\lambda - \lambda_1) \ \ldots \ (\lambda - \lambda_j),$$

где $[\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_j]$ означает разделенную разность $j-1$-го порядка от функции $u(\lambda)$. Так как $|\lambda_j| \leqslant 1$, то при $\lambda \in K_1$ будет $|\lambda - \lambda_j| \leqslant 2$. Используя известную оценку [3, стр. 42]

$$|[\lambda_1, \ldots, \lambda_j]| \leqslant \frac{1}{(j-1)!} p(p-1) \ \ldots \ (p-j+2) \rho^{p-j+1},$$

получим

$$\max_{\lambda \in K_1} | P(\lambda) | \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} C_p^j \cdot 2^j \rho^{p-j}. \tag{10}$$

Из (10) и из теорем 3 и 4 следует оценка (8), а из (10) и цитированной выше теоремы Дж. фон Неймана — оценка (9). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Нейман. Спектральная теория для общих операторов в унитарном пространстве. Математика (сб. пер.), 4 : 1. Изд-во иностр. лит., 1960.

2. С. Фойяш. О некоторых теоремах Дж. Неймана, касающихся спектральных множеств. Математика (сб. пер.), 4 : 1. Изд-во иностр. лит., 1960.

3. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, М., 1959.

4. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1. Изд-во «Мир», М., 1965.

5. I. Schur. Über Potenzreihen, die in Innern des Einheitkreis beschränkt sind. Journ. für reine und angew. Math., 147 (1917), 205—232.