УДК 517

В. П. Захарюта

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ГИЛЬБЕРТОВЫ ШКАЛЫ И ИЗОМОРФИЗМ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. II

Первая часть работы под тем же названием опубликована в выпуске 19 сборника. Во втором сообщении нумерация параграфов продолжается, что позволяет без специальных оговорок ссылаться на пункты, формулы, определения и утверждения из первой части. Список литературы полностью приведен в первой части.

§ 5. Изоморфизм пространств аналитических функций

5.1. В этом параграфе будут доказаны теоремы 4.2, 4.3, 4.4. Достаточные условия изоморфизма получаются в пунктах 5.3—5.6 с помощью предложения 1.1а и лемм 4.1, 4.2 (они будут доказаны позднее, в § 6, 8).

Укажем на существенное различие случаев одного и многих переменных. В $\overline{C^1}$, благодаря теореме двойственности Гротендика — Кете — Себастьяна-и-Сильва (см., например, [29, предложение 1])*, вопрос об изоморфизме пространств $A(K)$ для компактов K эквивалентен вопросу об изоморфизме пространств $A(D)$ для открытых множеств ([29], с. 87]). При $n \geqslant 2$ столь тесная связь между пространствами функций на компактах и открытых множествах не установлена**, поэтому необходимо отдельное рассмотрение этих случаев (см. также § 10).

5.2. Доказательство необходимости в теореме 4.2. Пусть K — компакт на многообразии Штейна Ω размерности n и $A(K) \simeq A(\overline{U^n})$. Тогда существуют гильбертовы пространства H_0 и H_1, удовлетворяющие ядерным плотным вложениям: $H_1 \subset A(K) \subset H_0$ и такие, что

$$A(K) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \operatorname{ind} H^\alpha \tag{1}$$

относительно тождественных вложений, $H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha$. Действительно, это свойство сохраняется при изоморфизме, а для $A(U^n)$ оно выполнено благодаря 4. (13).

Пусть D — произвольная открытая окрестность компакта K. Возьмем какую-либо последовательность окрестностей $\{D_s\}$, удовлетворяющую условиям пункта 2.13, $D_1 \subset\subset D$. Тогда, применяя предложение 2.4 к индуктивным пределам (1) и $A(K) = \lim \operatorname{ind} AC(\overline{D}_s)$, по любому $\alpha > 0$ найдем $s = s(\alpha)$ такое, что

$$H^\alpha \subset AC(\overline{G}_\alpha), \ |x|_{G_\alpha} \leqslant L(\alpha) \| x \|_{H^\alpha}, \ x \in H^\alpha, \tag{2}$$

где $G_\alpha = D_{q(\alpha)}$. С другой стороны, найдется $\beta > 0$ такое, что

$$AC(\overline{D}_1) \subset H^\beta, \ \| x \|_{H^\beta} \leqslant C |x|_{D_1}, \quad x \in A(D_1). \tag{3}$$

Из непрерывного вложения $A(K) \subset H_0$ следует существование констант C_j таких, что

$$\| x \|_{H_0} \leqslant C_j |x|_{D_j}, \ x \in AC(D_j), \ j = 1, \dots \tag{4}$$

Благодаря логарифмической выпуклости норм гильбертовой шкалы (см., например, [38, § 5]) из неравенств 2)—(4) получаем при $\alpha < \beta$

$$|x|_{G_\alpha} \leqslant L(\alpha) \| x \|_{H^\alpha} \leqslant L(\alpha) \left[\| x \|_{H^\beta} \right]^{\frac{\alpha}{\beta}} \left[\| x \|_{H^0} \right]^{1 - \frac{\alpha}{\beta}} \leqslant$$

---

* Аналог такой двойственности имеет место и на одномерных многообразиях Штейна (Тильман, [49]).

** За исключением некоторых частных случаев (см., например, А. Мартино [36], Л. Айзенберг [2]).

$$\leqslant L'(\alpha, j)\left[|x|_{D_1}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\left[|x|_{D_j}\right]^{1-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad x \in A(D_1).$$

Полагая в последнем неравенстве $x^k(z)$ вместо $x(z)$, извлекая корень k-й степени и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим неравенство

$$|x|_{G_\alpha} \leqslant \left[|x|_{D_1}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\left[|x|_{D_j}\right]^{1-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad x \in A(D_1).$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$, приходим к неравенству

$$|x|_{G_\alpha} \leqslant \left[|x|_{D_1}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\left[|x|_K\right]^{1-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad x \in A(D_1).$$

Поэтому, если $x \in A(D_1)$, $|x|_{D_1} \leqslant e^{\frac{1}{c}}$, $|x|_K \leqslant 1$, то $c \ln |x|_{G_\alpha} \leqslant \alpha/\beta$, т. е. $\gamma(D_1, K, z) \leqslant \alpha/\beta$, $z \in G_\alpha$. Так как $\gamma(D, K, z) \leqslant \gamma(D_1, K, z)$ и $K = \bigcap\limits_{\alpha < 0} G_\alpha$, то $\gamma(D, K, z) \leqslant 0$, $z \in K$. Ввиду произвольности окрестности $D \supset K$ это означает, что K — C^n-регулярный компакт. Так как H_1 плотно в любом H^α, а значит, ввиду (1) и в $A(K)$, то из вложения (2) следует, что в качестве окрестности Рунге компакта K можно взять $D_{\bar{s}}$, $\bar{s} \geqslant \bar{s}$ (1). Необходимость доказана.

5.3. Доказательство необходимости в теореме 4.3 проведем по аналогии со случаем $n = 1$ [29, с. 88—90], останавливаясь на специфически многопеременных деталях.

Пусть Ω — многообразие Штейна. Будем считать, что вместо условия $A(\Omega) \simeq A(U^n)$ выполняется заведомо из него вытекающее (см. 4 (13)) требование, что $A(\Omega)$ изоморфно конечному центру какой-либо гильбертовой шкалы.

Поскольку конечный центр шкалы обладает непрерывной невырожденной полунормой и это свойство сохраняется при изоморфизме, то Ω обязано состоять из конечного числа взаимно-внешних связных компонент (ср. [29, § 6]).

Докажем, что Ω — сильно псевдовыпуклое. Поскольку $A(\Omega)$ изоморфно конечному центру гильбертовой шкалы, существуют гильбертовы пространства H_0, H_1 такие, что выполняются непрерывные плотные вложения: $H_1 \subset A(\Omega) \subset H_0$ и $A(\Omega) = \lim\limits_{\alpha \to 1} pr H^\alpha$, $H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha$. Поэтому существует семейство открытых множеств $\{G_\alpha\} : G_\alpha \subset\subset G_\beta$, $0 < \alpha < \beta < 1$, $\bigcup G_\alpha = \Omega$ таких, что

$$|x|_{G_\alpha} \leqslant C_\alpha \|x\|_{H^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{5}$$

Так как вложение $H_1 \subset H_0$, очевидно, вполне непрерывно, то существует общий ортогональный базис в пространствах H^α такой, что $\|e_k\|_{H^\alpha} = \mu_k^\alpha$, $\mu_k = \mu_k(H_0, H_1)$. Учитывая (5), получаем оценки

$$|e_k|_{G_\alpha} \leqslant C_\alpha \mu_k^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{6}$$

Функция

$$\psi(z) = \overline{\lim_{\zeta \to z}}\, \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln|e_k(z)|}{\ln \mu_k} - 1, z \in \Omega,$$

является плюрисубгармонический в Ω, а из оценок (6) следует, что $\psi(z) < 0$, $z \in \Omega$. Покажем, что функция $\psi(z)$ удовлетворяет оставшемуся непроверенным условию определения 3.2. Предположим противное; тогда существует последовательность $\{z_j\} \subset \Omega$, не имеющая предельных точек в Ω, для которой

$$\psi(z_j) \to -\delta < 0. \tag{7}$$

Рассуждая, как в [29, с. 89—90], из (6), (7) получаем существование такой последовательности $c_j \uparrow \infty$, что для любой функции $x \in A(\Omega)$ справедлива оценка

$$x(z_j) = O(c_j), \quad j \to \infty. \tag{8}$$

Согласно известному построению Картана-Туллена (см., например, [12, с. 169]), применимому и к многообразиям Штейна (см. например, [15, с. 331]) существует функция $x \in A(\Omega)$ такая, что для некоторой подпоследовательности $\{j_k\}$ выполняется $x(z_{j_k}) = \alpha_k \to \infty$, все α_k различные. Построим целую функцию $f(\alpha)$, принимающую в точках $\alpha = \alpha_k$ заданные значения kc_{j_k}. Тогда функция $\tilde{x} = f_0 \cdot x \in A(\Omega)$ удовлетворяет равенствам $\tilde{x}(z_{j_k}) = kc_{j_k}$, $k = 1, \ldots$ что противоречит соотношению (8). Полученное противоречие показывает, что функция $\psi(z)$ удовлетворяет условиям определения 3.2, т. е. Ω — сильно псевдовыпуклая область.

5.4. Доказательство теоремы 4.4 и достаточности в теореме 4.2.

Лемма 5.1. *В условиях теоремы* 4.1 $A(D) = \lim\limits_{\alpha \uparrow 1} pr\, H^\alpha \simeq A(U^n)$, $A(\hat{K}_D) = \lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \operatorname{ind} H^\alpha \simeq A(\overline{U^n})$.

Доказательство. В теореме 4.1 получается гильбертова шкала $\{H^\alpha\}$, удовлетворяющая непрерывным вложениям

$$A(F_\alpha) \subset H^\alpha \subset A(D_\alpha) \tag{9}$$

(все обозначения см. в теореме 4.1). Вложение $A(D) \subset A(K)$ предполагает, что D не имеет связных компонент, дизъюнктных с K. Поэтому ввиду сильной псевдовыпуклости множества D и C^n-регулярности компакта K выполняются включения

$$K \subset D_\alpha \subset F_\alpha \subset\subset D,\ D = \bigcup_{\alpha < 1} D_\alpha,\quad \hat{K}_D = \bigcap_{\alpha > 0} D_\alpha.$$

Отсюда, учитывая (9), получаем, что

$$A(D) = \lim_{\alpha < 1} pr\, H^\alpha,\ A(\hat{K}_D) = \lim_{\alpha > 0} \operatorname{ind} H^\alpha.$$

Согласно предложению 4.2 выполняется соотношение

$\ln \mu_s (H_0, H_1) \asymp s^{\frac{1}{n}}$, которое вместо с 4. (13) означает (см. критерий изоморфизма центров шкал п. 2.7)

$$A(D) \simeq A(U^n), \ A(\hat{K}_D) \simeq A(\overline{U^n}).$$

Лемма 5.2. *Пусть X — ядерное пространство, обладающее невырожденной непрерывной нормой, Y — счетно-полное локально выпуклое пространство, $X \subset \mathrm{Y}$ и оператор вложения компактен. Тогда существует гильбертово пространство H, удовлетворяющее непрерывным вложениям $X \subset H \subset \mathrm{Y}$.*

Доказательство. Согласно [38, предложение 3а], топологию в X можно задавать с помощью некоторого набора скалярных произведений $\{(x, y)_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$. Ввиду компактности оператора вложения найдется $\lambda_0 \in \Lambda$ такое, что гильбертов шар $V = \{x \in X : (x, x)_{\lambda_0} \leqslant 1\}$ относительно компактен в Y. Предгильбертово пространство H_V, получающееся, если X наделить скалярным произведением $(x, y)_{\lambda_0}$, компактно и тем более непрерывно вложено в Y. Поскольку ввиду счетной полноты Y оператор вложения H_V в Y можно продолжить по непрерывности на пополнение пространства H_V, то существует гильбертово пространство H, удовлетворяющее непрерывным вложениям $H_V \subset H \subset \mathrm{Y}$. Непрерывность вложения $X \subset H$ очевидна. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 4.4 получается из леммы 5.1, если сначала взять какой-либо C^n-регулярный компакт $K \subset D$, имеющий непустое пересечение с любой связной компонентой множества D, а затем с помощью леммы 5.2 построить гильбертовы пространства H_0, H_1, удовлетворяющие вложениям 4. (1).

Достаточность в теореме 4.2 получается следующим образом. Согласно предложению 2.7, существует многообразие Штейна $\tilde{G}$, являющееся оболочкой голоморфности для G, $K \subset G \subset \tilde{G}$. Построим усиленно псевдовыпуклое открытое множество D: $K \subset D \subset\subset \tilde{G}$, не имеющее связных компонент, дизъюнктных с K. Для этого сначала подберем сильно псевдовыпуклое открытое множество $D' : K \subset D' \subset\subset \tilde{G}$ (его существование вытекает, например, из [52, теорема 5.1.6]), а затем в качестве D возьмем любое из множеств $D'_\alpha = \{z \in D' : \omega(D', K, z) < \alpha\}$, $0 < \alpha < 1$.

Поскольку G — окрестность Рунге компакта K, то $A(G)$ плотно в $A(K)$, следовательно, $A(\tilde{G})$ и тем более $A(D)$ плотно в $A(K)$. Таким образом, D — окрестность Рунге для K, поэтому (см. п. 3.6) $A(\hat{K}_D) \simeq A(K)$. Используя лемму 5.2, построим какие-либо гильбертовы пространства H_i, удовлетворяющие непрерывным вложениям (4.1). Применяя теперь лемму 5.1, получим $A(K) \simeq A(\overset{>}{K}_D) \simeq$ $\simeq (\overline{U^n})$.

5.5. Доказательство достаточности в теореме 4.3. Все включения в следующей лемме означают непрерывные вложения, а G и H с индексами или без них означают гильбертовы пространства.

Лемма 5.3*. *Для того чтобы счетно-гильбертово пространство X с безусловным базисом было изоморфно конечному центру гильбертовой шкалы, необходимо и достаточно, чтобы*

а) $\exists H_0 \supset X | \forall G \supset X \exists_\alpha < 1 | \forall H_1 \subset X \Rightarrow (H_0)^{1-\alpha} (H_1)^\alpha \subset G$;

б) $\forall H_0 \supset X \forall_\alpha < 1 \exists G \supset X | \forall H_1 / X \subset H_1 \subset H_0 \Rightarrow (H_0)^{1-\alpha} (H_1)^\alpha \supset G$.

Необходимость легко получается из интерполяционных свойств гильбертовой шкалы (предложение 2.1).

Достаточность. Пусть $\{x_k\}$ — безусловный базис в X. Тогда ([14, 27], см. также лемму 9.1) существует последовательность гильбертовых пространств $\{G_s\}$ такая, что $\{x_k\}$ — общий ортогональный базис во всех G_s, $G_{s+1} \subset G_s$, $X = \lim pr G_s$. Поэтому

$$\|x\|_{G_s} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 t_{s,k} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = \sum \zeta_k x_k \in X,$$

где

$$t_{s,k} = \|x_k\|^2_{G_s}.$$

Пусть H_0 — гильбертово пространство, существующее в соответствии с условием а). Так как $H_0 \supset X$, найдется s_0 такое, что $H_0 \supset G_{s_0}$. Без ограничения общности будем считать $s_0 = 1$, $t_{1,k} =$ $= 1$, $k = 1, 2, \ldots$

Из условия б) следует существование констант $p = p(\alpha)$ $C_s = C_s(\alpha) < \infty$ таких, что

$$t_{sk}^\alpha \leqslant C_s t_{p,k}. \tag{10}$$

Не ограничивая общности, считаем $C_s(\alpha) \geqslant 1$, $C(\alpha) \uparrow \infty$ при $\alpha \uparrow 1$; $_{s,k} \geqslant 1$, $s = 1, \ldots$. Возьмем последовательность

$$\lambda_s = \left[\frac{1}{2^s C_s(\alpha_s)} \right]^{\frac{1}{\delta}}, \quad s = 2, \ldots, 0 < \alpha < 1, \ \lambda_1 = 1.$$

и положим

$$t_k = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s t_{sk}$$

* В первоначальной формулировке леммы были неточности, на которые обратил наше внимание Б. С. Митягин.

Рассмотрим гильбертово пространство H_1, состоящее из всех $x = \sum \xi_k x_k \in X$ с конечной нормой $\|x\|_{H_1} = (\sum |\xi_k|^2 t_k)^{\frac{1}{2}}$*. Будет доказано, что $X = \lim\limits_{\alpha<1} prH^\alpha$, где

$$H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha} (H_1)^\alpha. \tag{11}$$

Поскольку при любом $s: \|x\|_{G_s} \leqslant \frac{1}{\lambda_s} \|x\|_{H_1}$, то $H_1 \subset X$. Поэтому из условия а) следует, что

$$\forall s \exists \alpha < 1 | H^\alpha \subset G_s. \tag{12}$$

Покажем, что, с другой стороны,

$$\forall \alpha < 1 \exists r | G_r \subset H^\alpha. \tag{13}$$

Возьмем последовательность $\alpha_m \uparrow 1$, $m = 0, 1, \ldots$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \delta$. Тогда из (10) для $\alpha_{m-1} < \alpha \leqslant \alpha_m$ получим

$$t_k^\alpha \leqslant t_k^{\alpha_m} \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{\alpha_m} [t_{s,k}]^{\alpha_m} \leqslant \left(\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^\delta C_s(\alpha_m)\right) \times$$

$$\times\, t_{p(\alpha_m),k} \leqslant \left(\sum \frac{C_s(\alpha_m)}{2^s C_s(\alpha_s)}\right) t_{p(\alpha_m),k}.$$

Отсюда ввиду $C_s(\alpha_m) \leqslant C_s(\alpha_s)$ при $m \leqslant s$ получим

$$t_k^\alpha \leqslant L t_{r,k}, \tag{14}$$

где

$$L = L(\alpha) = \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{C_s(\alpha_m)}{2^s C_s(\alpha_s)}, \quad \alpha_{m-1} < \alpha \leqslant \alpha_m, \right.$$

$$r = r(\alpha) = \{p(\alpha_m), \quad \alpha_{m-1} < \alpha \leqslant \alpha_m, \quad m = 1, \ldots$$

Из $H_0 \supset G_1$ следует (предложение 2.1), что $H^\alpha \supset (G_1)^{1-\alpha} (H_1)^\alpha$, а неравенство (14) означает $(G_1)^{1-\alpha} (H_1)^\alpha \supset G_r$, откуда получаем (13). Соотношения (12), (13) дают (11), что и завершает доказательство леммы.

Продолжим доказательство достаточности в теореме 4.3. Пусть $\{x_k\}$ — базис в $A(\Omega)$. Ввиду ядерности пространство $A(\Omega)$ — счетногильбертово [38, предложение 3] и базис $\{x_k\}$ является безусловным [21; 38, § 4].

Покажем, что для пространства $X = A(\Omega)$ выполняются условия а) и б) леммы 5.3. Возьмем какой-либо C^n-регулярный голоморфно выпуклый компакт $K \subset \Omega$, имеющий непустое пересечение с каждой связной компонентой Ω. Обозначим $D_\alpha = \{z \in \Omega : \omega(\Omega, K, z) < \alpha\}$, $F_\alpha = \{z \in \Omega : \omega(\Omega, K, z) \leqslant \alpha\}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда $K \subset D_\alpha \subset F_\alpha \subset\subset \Omega$, $0 < \alpha < 1$, $\Omega = \bigcup\limits_{\alpha<1} D_\alpha$.

* Конструкция пространства H_1 является модификацией конструкции «тупикового пространства» H_1 в [38, доказательства теорем 10, 11].

Докажем сначала а). В качестве H_0 возьмем какое-либо гильбертово пространство, удовлетворяющее вложениям $A(\Omega) \subset H_0 \subset \subset AC(K)$ существование такого H_0 вытекает из лемм 3.5, 5.2). Тогда для любого $H_1 : H_1 \subset A(\Omega) \subset H_0$, согласно леммам 4.1, выполняются вложения $(H_0)^{1-\alpha}(H_1)^{\alpha} \subset A(D_\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Условие а) выполняется, поскольку для любого $G \supset A(\Omega)$ найдется $\alpha : 0 < \alpha < 1$ такое, что $G \supset A(D_\alpha)$.

Докажем б). Пусть $0 < \alpha < 1$ и $H_0 \supset A(\Omega)$. Тогда существует $\tau : 0 < \tau < 1$ такое, что $H_0 \supset A(F_\tau)$. Пусть теперь H_1 — любое гильбертово пространство, для которого $H_0 \supset H_1 \supset A(\Omega)$. Тогда найдется $\sigma : \tau < \sigma < 1$, для которого $H_0 \supset H_1 \supset A(\overline{D}_\sigma)$. Применяя лемму 4.2 с $D = D_\sigma$, $K = F_\tau$ и учитывая лемму 3.3, получим

$$(H_0)^{1-\alpha}(H_1)^{\alpha} \supset A(F_{\tau(1-\alpha)+\alpha\tau}) \supset A(F_{\tau(1-\alpha)+\alpha}).$$

Теперь в качестве пространства G в условии б) можно взять любое G:

$$A(F_{\sigma(\alpha)}) \supset G \supset A(\Omega), \quad \sigma(\alpha) = \tau(1-\alpha) + \alpha.$$

Итак, пространство $A(\Omega)$ удовлетворяет условиям а), б) леммы 5.3. Поэтому $A(\Omega)$ изоморфно конечному центру некоторой гильбертовой шкалы. Согласно предложению 1.1а, это означает $A(\Omega) \simeq A(U^n)$.

§ 6. Гильбертовы шкалы пространств голоморфных функций (оценки сверху)

Приведем доказательство леммы 4.1 — более легкой части доказательства теоремы 4.1, посвященной оценке шкалы H^α сверху (правым вложениям).

Доказательство леммы 4.1. Пусть $\hat{H}_0$ — подпространство в H_0, получающееся замыканием H_1 в H_0. Тогда существует общий ортогональный базис $\{e_k\}$ в H_1 и $\hat{H}_0$ такой, что $\|e_k\|_{H_0} = 1$, $\|e_k\|_{H_1} = \mu_k \uparrow \infty$, причем ввиду предложения 2.2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-\delta}$ сходится при любом $\delta > 0$. Возьмем последовательность открытых множеств $\{D^{(s)}\} : D = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} D^{(S)}$, $D^{(s)} \subset D^{s+1}$. Из непрерывных вложений 4. (3) вытекает существование констант $C < \infty$, $C_s < \infty$, $C < C_s$ таких, что при любом $k = 1, \ldots$ справедливо

$$|e_k|_K \leqslant C\|e_k\|_{H_0} = C, \quad |e_k|_{D^{(s)}} \leqslant C_s\|e_k\|_{H_1} = C_s\mu_k. \qquad (1)$$

Функция $\psi_{k,s}(z) = \dfrac{\ln|e_k(z)| - \ln C}{\ln C_S\mu_k - \ln C}$ является плюрисубгармонической в $D^{(s)}$ и благодаря (1) удовлетворяет неравенствам $\psi_{k,s}(z) < 1$, $z \in D^{(s)}$, $\psi_{k,s}(z) \leqslant 0$, $z \in K$. Тогда по определению функции ω

выполняются неравенства $\psi_{k,s}(z) \leqslant \omega(D^{(s)}, K, z)$, $z \in D^{(s)}$, откуда следует

$$|e_k|_{D_{s,\alpha}} \leqslant L_s \mu_k^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

где $D_{s,\alpha} = \{z \in D^{(s)} : \omega(D^{(s)}, K, z) < \alpha\}$, $L_s = C^{1-\alpha} C_s^{\alpha}$. Так как K — C^n-регулярный компакт, то по лемме 3.2 при $s \to \infty$ $\omega(D^{(s)}, K, z) \downarrow \omega(D, K, z)$, $z \in D$. Поэтому $D_\alpha = \bigcup_{s=1}^{\infty} D_{s,\alpha}$, $D_{s,\alpha} \subset \subset D_{s+1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Пусть теперь $x \in H^\alpha$, т. е. $x = \Sigma \xi_k e_k \in H_0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \mu_k^{2\alpha} < \infty.$$

Тогда, учитывая (2) и используя предложение 2.3, получим

$$|x|_{D_{s,\alpha-\varepsilon}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \, |e_k|_{D_{s,\alpha-\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant L_s \sum |\xi_k| \mu_k^{\alpha-\varepsilon} \leqslant L_s' \left(\sum |\xi_k|^2 \mu_k^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \mu_k^{-2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant L_s'' \|x\|_{H^\alpha}, \quad L_s'' = L_s''(\varepsilon), \ \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Из этих оценок следует, что для всякого $x \in H^\alpha$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k(z)$ сходится равномерно, по крайней мере внутри открытого множества $D_\alpha = \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{\varepsilon > 0} D_{s,\alpha-\varepsilon}$, и определяет функцию $\hat{x} \in A(D_\alpha)$ такую, что $\hat{x}(z) = x(z)$, $z \in K$. Итак, доказано вложение 4. (4). Его непрерывность содержится в оценках (3). Лемма доказана.

Замечание 6.1. В [25] (см. также [41]) применялся обобщенный принцип максимума для субгармонических функций, что давало более грубые оценки сверху для шкалы H^α.

§ 7. Гильбертовы шкалы пространств аналитических функций на аналитических полиэдрах

7. 1. Пусть Ω — многообразие Штейна размерности n. Всякое отображение $\chi = (\chi_j) \in A(\Omega)^k$ задает семейство множеств:

$$\Delta(\chi, r) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Omega : |\chi_j(z)| < r_j, \ j = 1, \ldots, k\}, \tag{1}$$

$$\tilde{\Delta}(\chi, r) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Omega : |\chi_j(z)| \leqslant r_j, \ j = 1, \ldots, k\}, \tag{2}$$

где полирадиусы $r = (r_j)$ пробегают $\boldsymbol{R}_+^k$.

Будем говорить, что множество Δ — (замкнутый) аналитический полиэдр в Ω, порожденный отображением χ и полирадиусом r, если $\Delta \subset \subset \Omega$ и Δ совпадает с объединением некоторого множества связных компонент множества (1) (соответственно (2)).

7.2. Пусть $\Phi_0 \subset \Phi_1$ — замкнутые аналитические полиэдры в Ω, порожденные одним отображением $\chi \in A(\Omega)^k$ и полирадиусами $r^0 = (r_j^{(0)})$, $r^{(1)} = (r_j^{(1)})$, $r_j^{(0)} < r_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots, k$. Пусть Φ_1 не имеет связных компонент, дизъюнктных с Φ_0.

Пара полирадиусов $r^{(0)}$, $r^{(1)}$ порождает однопараметрическое семейство полирадиусов:

$$r(\alpha) = (r_j(\alpha)), r_j(\alpha) = [r_j^{(0)}]^{1-\alpha}[r_j^{(1)}]^{\alpha}, j = 1, \ldots, k, \ -\infty < \alpha < \infty. \quad (3)$$

Образуем два однопараметрических семейства множеств $\{\Phi_\alpha\}$. $\{\Delta_\alpha\}$, где Φ_α (соответственно Δ_α) совпадает с объединением всех связных компонент множества $\tilde{\Delta}(\chi, r(\alpha))$ (соответственно $\Delta(\chi, r(\alpha))$, имеющих непустое пересечение с Φ_0. Множества Φ_α, Δ_α построены так, что в соответствии с соглашением пункта 2.10 можно говорить об обычных вложениях

$$A(\Phi_\alpha) \subset A(\Delta_\alpha) \subset A(\Phi_\beta) \subset A(\Delta_\beta), \quad -\infty < \beta < \alpha < \infty.$$

Лемма 7.1. *В условиях настоящего пункта существует $q > 1$ такое, что $\Phi_\alpha \subset\subset \Phi$, $\alpha \leqslant q$.*

Действительно, возьмем какое-либо открытое множество D: $\Phi_1 \subset\subset D \subset\subset \Omega$ такое, что ∂D не пересекается с множеством $\tilde{\Delta}(\chi, r^{(1)})$. Обозначим

$$\psi(z) = \sup\left\{\frac{\ln|\chi_j(z)| - \ln r_j^0}{\ln r_j^{(1)} - \ln r_j^{(0)}} : j = 1, \ldots, k\right\}, \quad z \in \Omega.$$

Тогда достаточно взять $q : 1 < q < \inf\{\psi(z) : z \in \partial D\}$.

7.3. Основная цель данного параграфа — в доказательстве следующего утверждения:

Теорема 7.1 *Пусть Φ_i, Δ_i, $i = 0,1$ — аналитические полиэдры в многообразии Штейна Ω, удовлетворяющие условиям пункта 7.2. Пусть H_0, H_1 — гильбертовы пространства, удовлетворяющие непрерывным вложениям*

$$A(\Phi_i) \subset H_i \subset A(\Delta_i), \quad i = 0,1. \quad (4)$$

Тогда выполняются непрерывные вложения

$$A(\Phi_\alpha) \subset H^\alpha = (H_0')^{1-\alpha}(H_1)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5)$$

где Φ_α — полиэдры, построенные в п. 7.2.

Замечание 7.1. Оценка шкалы H^α снизу в этой теореме точна в частном случае, когда в ее условиях а) число функций, задающих полиэдры Φ_i, совпадает с размерностью многообразия Ω: $k = n$ (такие полиэдры называют специальными [15]); б) полиэдр Φ_0 содержит все компоненты множества $\tilde{\Delta}(\chi, r^{(0)})$, входящие в Φ_1 (при этих условиях $\Phi_\alpha = \bar{\Delta}_\alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$). А именно: имеет место

Теорема 7.2. *Пусть выполняются условия теоремы 7.1 и условия а), б) замечания. Тогда выполняются непрерывные вложения $A(\bar{\Delta}_\alpha) \subset H^\alpha \subset A(\Delta_\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.*

Утверждение этой теоремы вытекает из теоремы 7.1, леммы 4.1, если заметить, что при условиях а), б)

$$\omega(\Delta_1, \bar{\Delta}_0, z) = \sup\left\{\frac{\ln|\chi_j(z)| - \ln r_j^{(0)}}{\ln r_j^{(1)} - \ln r_j^{(0)}} : j = 1, \ldots, n\right\}, \quad z \in \Delta_1 \setminus \bar{\Delta}_0,$$

т. е. множества D_α в лемме 4.1 совпадают с Δ_α, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Замечание 7.2. В случае $k > n$ не приходится рассчитывать, что, как в теореме 7.2, шкала H^α будет «расположена» на $\Phi_\alpha \setminus \Delta_\alpha$. В этом убеждает

Пример 7.1. Пусть в условиях теоремы 7.1 $\Omega = \boldsymbol{C}^1$, $\chi = (\chi_1, \chi_2)$, $\chi_1(z) \equiv z$, $\chi_2(z) \equiv z - 1$, $r^{(0)} = (1, 1)$, $r^1 = (2, 2)$. Тогда $\Delta_\alpha = \{z \in \boldsymbol{C}^1 : |z| < 2^\alpha, |z - 1| < 2^\alpha\}$, $\Phi_\alpha = \bar{\Delta}_\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Как следует из [28, теорема 3], справедливы непрерывные вложения $A(\bar{D}_\alpha) \subset H^\alpha \subset A(D_\alpha)$, где D_α — внутренность линии уровня $\{z : |\omega(z)| = R^\alpha\}$ при конформном отображении $\omega : \Delta_1 \setminus \bar{\Delta}_0 \to \{w \in \boldsymbol{C}^1 : 1 < |w| < R\}$. Ясно, что D_α не может совпадать ни с одной из областей Δ_β, $0 < \alpha, \beta < 1$.

Однако грубая оценка теоремы 7.1 позволит получить (§ 8) в некотором смысле наиболее точную оценку снизу для шкалы H^α в теореме 4.1.

Замечание 7.3. Утверждение теоремы 7.1 останется в силе, если вместо (4) потребовать $A(\Phi_i) \subset H_i$, $i = 0,1$, $H_1 \subset H_0$. Действительно, возьмем (лемма 5.2) гильбертовы пространства G_i: $A(\Phi_i) \subset G_i \subset A(\Delta_i)$, $G_i \subset H_i$, $i = 0, 1$. Применяя теорему 7.1 и предложение 2.1, получим

$$A(\Phi_\alpha) \subset G^\alpha = (G_0)^{1-\alpha}(G_1)^\alpha \subset (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha.$$

7.4. Прежде чем перейти к доказательству теоремы 7.1, докажем лемму.

Лемма 7.2. *Пусть U_α — полидиск в $\boldsymbol{C}^n$ с центром в начале и полирадиусами* (3), $-\infty < \alpha < \infty$. *Пусть гильбертовы пространства H_0, H_1 удовлетворяют непрерывным вложениям*

$$A(\bar{U}_i) \subset H_i \subset A(U_i), \quad i = 0, 1. \tag{6}$$

Тогда выполняются непрерывные вложения

$$A(\bar{U}_\alpha) \subset H^\alpha \subset A(U_\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{7}$$

где $H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha$.

Доказательство. Рассмотрим гильбертову шкалу

$$\tilde{H}^\alpha = H(r(\alpha)), \quad -\infty < \alpha < \infty,$$

(определение $H(r)$ см. в п. 4. 5). Тогда выполняются непрерывные вложения

$$A(\bar{U}_\alpha) \subset \tilde{H}^\alpha \subset A(U_\alpha), \quad -\infty < \alpha < \infty. \tag{8}$$

Из вложений (6), (8) вытекают вложения

$$\tilde{H}^{i+\varepsilon} \subset H_i \subset \tilde{H}^{i-\varepsilon}, \ i = 0, \ 1, \ \varepsilon > 0.$$

Отсюда благодаря предложению 2.1 получаем

$$\tilde{H}^{\alpha+\varepsilon} \subset H^\alpha \subset \tilde{H}^{\alpha-\varepsilon}, \ 0 < \alpha < 1, \ \varepsilon > 0. \tag{9}$$

Соотношения (9), (8) дают вложения (7). Лемма доказана.

7.5. Доказательство теоремы. 7.1. Согласно теореме Реммерта — Бишопа — Нарасимхана (см., например, [52, теорема 5.3.9]) существует взаимно-однозначное регулярное собственное отображение $\varphi \in A(\Omega)^{2n+1}$ (определения см. [52, § 5.3]). Пусть $\chi = (\chi_j) \in A(\Omega)^k$ — отображение, определяющее полиэдры Φ_i. Рассмотрим отображение $f = (f_j) \in A(\Omega)^N$ такое, что $f_j = \chi_j$, $j = 1, \ldots, k$; $f_j = \varphi_{j-k}$, $j = k+1, \ldots, N = 2n+k+1$. Очевидно, что отображение f также является взаимно-однозначным, регулярным и собственным. Поэтому f биголоморфно отображает Ω на замкнутое аналитическое подмногообразие $M = f(\Omega)$ в C^N.

Пусть при $j = k+1, \ \ldots, \ N$, $r_j(\alpha) = 2^\alpha R_j$, где $R_j = \sup\{|f_j(z)| : z \in \Phi_q\}$, q определено в лемме 7.1. Тогда $M_\alpha = f(\Delta_\alpha)$ является замкнутым аналитическим подмногообразием следующего полицилиндра в C^N:

$U_\alpha = \{\zeta = (\zeta_j) \in C^N : |\zeta_j| < r_j(\alpha), \ \ j = 1, \ \ldots, \ N\}$. Обозначим $\Psi_\alpha = f(\Phi_\alpha)$.

Пусть $T : A(U_0) \to A(M_0)$ — оператор сужения, $Tx = x/M_0$, $x \in A(U_0)$. Поскольку M_α — замкнутое аналитическое подмногообразие в U_α, $\alpha < q$, то по известной теореме А. Картана, $T(A(U_\alpha)) = A(M_\alpha)$, $0 \leqslant \alpha < q$. Так как, по построению, $\Psi_\alpha = \bigcap_{\varepsilon > 0} M_{\alpha+\varepsilon}$, то и

$$T(A(\overline{U}_\alpha)) = A(\Psi_\alpha), \ 0 \leqslant \alpha < q.$$

Линейный оператор $S : A(M_0) \to A(\Delta_0)$, где $Sx = x \circ f$, $x \in A(M_0)$, изоморфно переводит каждое из пространств $A(M_\alpha)$, $A(\Psi_\alpha)$, $0 \leqslant \alpha < q$, соответственно на $A(\Delta_\alpha)$, $A(\Phi_\alpha)$. Существуют гильбертовы пространства F_i, удовлетворяющие непрерывным вложениям

$$A(\Psi_i) \subset F_i \subset A(M_i), \ \ i = 0, \ 1 \tag{10}$$

такие, что S изометрично отображает F_i на H_i. Поэтому теорема будет доказана, если установить непрерывные вложения

$$A(\Psi_\alpha) \subset F^\alpha = (F_0)^{1-\alpha}(F_1)^\alpha. \tag{11}$$

Построим гильбертовы пространства G_i такие, что: а) выполняются непрерывные вложения $A(\overline{U_i}) \subset G_i \subset A(U_i)$; б) оператор T переводит непрерывно G_i в F_i, $i = 0,1$. Для этого достаточно взять гильбертовы пространства $\tilde{H}_i$, определенные в доказательстве леммы 7.2 (с N вместо n), и определить пространства G_i пополнением $A(U_i)$ по нормам

$$\|x\|_{G_i} = \left[\|x\|^2_{\tilde{H}i} + \|Tx\|^2_{F_i}\right]^{1/2}, \ i = 0, \ 1.$$

Учитывая условие а), применяем лемму 7.2. Получим непрерывные вложения

$$G^\alpha = (G_0)^{1-\alpha}(G_1)^\alpha \supset A(\overline{U}_\alpha),\ 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{12}$$

Согласно предложению 2.1, из свойства б) следует, что оператор T переводит непрерывно G^α в F^α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
Поэтому из (10), (12) получаем, что

$$F^\alpha \supset T(G^\alpha) \supset T(A(\overline{U}_\alpha)) = A(\Psi_\alpha),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Итак, получено вложение

$$A(\Psi_\alpha) \subset F^\alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{13}$$

Осталось доказать его непрерывность, т. е. непрерывность в $A(\Psi_\alpha)$ полуаддитивного функционала $p_\alpha(x) = \|x\|_{F^\alpha}$, который определен на $A(\Psi_\alpha)$ ввиду (13). Поскольку пространство $A(\Psi_\alpha)$ бочечное, достаточно доказать (см., например, [53, с. 635]) полунепрерывность функционала p_α снизу в $A(\Psi_\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Возьмем общий ортогональный базис в H_1, $\hat{H}_0$, где $\hat{H}_0$ — замыкание H_1 в H_0. Пусть $\{e'_k\}$ — биортогональная система линейных непрерывных функционалов в H_0. Ввиду непрерывных вложений $A(\Psi_\alpha) \subset A(\Psi_0) \subset H_0$, $\alpha > 0$, все функционалы e'_k являются непрерывными и в $A(\Psi_\alpha)$. Поэтому все функционалы

$$p_{\alpha,m}(x) = \left(\sum_{k=1}^{m} |e'_k(x)|^2 \|e_k\|^2_{F^\alpha}\right)^{1/2},\ m = 1, \ldots, \text{ непрерывны в } A(\Psi_\alpha).$$

Поскольку $p_\alpha(x) = \sup\limits_{m=1}^{\infty} p_{\alpha,m}(x)$, то p_α — полунепрерывный снизу функционал в $A(\Psi_\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Как отмечалось выше, отсюда следует непрерывность вложений (13). Теорема доказана.

§ 8. Гильбертовы шкалы пространств голоморфных функций (оценки снизу)

8.1. Опираясь на рассмотрения § 7, докажем лемму 4.2 и тем самым завершим доказательство теоремы 4.1 и недостающих звеньев в доказательствах теорем 4.2, 4.3, 4.4.

Доказательство леммы 4.2. По лемме 3.4, существует псевдовыпуклое открытое множество $D' : D \subset\subset D' \subset \Omega$ и непрерывная плюрисубгармоническая в D' функция $v(z)$ такая, что $v(z) = \omega(D, K, z)$, $z \in D$ и $F_1 = \{z \in D' : v(z) \leqslant 1\} \subset\subset D'$. Обозначим при $\alpha > 0$ D_α — объединение всех связных компонент множества $\{z \in D' : v(z) < \alpha\}$, имеющих непустое пересечение с компактом K. Поскольку, по условию, D не содержит компонент, дизъюнктных с K, то благодаря следствию 3.2 при $0 < \alpha \leqslant 1$ $D_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) < \alpha\}$. Подберем $q > 1$ так, чтобы $D_q \subset\subset D'$.

С помощью теоремы Бремермана (предложение 2.11) для любого $\delta > 0$ строим отображение $\chi = \chi^{(\delta)} = (\chi_j) \in A(D')^k$ такое, что

$$v(z) - \delta < \sup \left\{ \frac{1}{C_j} \ln |\chi_j(z)| : j = 1, \ldots, k \right\} < v(z), \ z \in D_q, \quad (1)$$

где $k = k(\delta)$, $C_j = C_j(\delta) > 0$. Пусть $r_j(\alpha) = \exp \alpha C_j$, $j = 1, \ldots, k$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Обозначим $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha^{(\delta)}$ — объединение всех связных компонент множества $\{z \in D' : |\chi_j(z)| \leqslant r_j(\alpha), \ j = 1, \ldots, k\}$, имеющих непустое пересечение с компактом $\hat{K}_D \overset{\text{def}}{=} F_0$. При $1 - \delta < q$ из неравенств (1) вытекают включения

$$F_\alpha \subset\subset \Phi_\alpha^{(\delta)} \subset\subset D_{\alpha+\delta}, \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \quad (2)$$

Из соотношений (2) следует

$$A(F_\alpha) = \lim_{\delta \downarrow 0} \operatorname{ind} A(\Phi_\alpha), \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad (3)$$

относительно тождественных вложений. Благодаря (2) и непрерывным вложениям 4.5 получаем непрерывные вложения $H_i \supset A(\Phi_i^{(\delta)})$, $i = 0, 1$, для любого $\delta : 0 < q - 1$.

Отсюда, применяя теорему 7.1 (с учетом замечания 7.3), приходим к непрерывным вложениям

$$H^\alpha \supset A(\Phi_\alpha^{(\delta)}), \ 0 < \alpha < 1, \ 0 < \delta < q - 1. \quad (4)$$

Утверждение леммы 4.2 вытекает теперь из (3), (4) и теоремы о линейном операторе в индуктивном пределе [45, с. 119].

§ 9. Продолжаемые базисы в пространствах голоморфных функций

1°. Доказательство теоремы 4.5. Возьмем любые гильбертовы пространства H_i, удовлетворяющие непрерывным вложениям 4.(1) (это можно сделать благодаря лемме 5.2). Пусть $\{e_k\}$ — общий ортогональный базис в пространствах H_1, $\hat{H}^0$ ($\hat{H}^0$— замыкание H^1 в H_0) : $\|e_k\|_{H_0} = 1$, $\|e_k\|_{H_1} = \exp a_k \uparrow \infty$. Тогда $\{e_k\}$— базис в пространствах H^α, $0 < \alpha < 1$; при этом $\|e_k\|_{H_\alpha} = \exp \alpha a_k$. Отсюда с помощью леммы 5.1 заключаем, что система $\{e_k\}$ — базис в пространствах $A(D)$ и $A(\hat{K}_D)$. Если D — окрестность Рунге компакта K, то естественное вложение $j(\hat{K}_D, K)$ является изоморфизмом, поэтому $\{e_k\}$ — базис и в $A(K)$. Оценки 4.(7) вытекают из непрерывных вложений 4.(2). Неравенства 4.(8) вытекают из предложения 4.1.

2°. Прежде чем перейти к доказательству теоремы 4.6, докажем лемму. Эта лемма обобщает известный результат о том, что всякий безусловный базис в гильбертовом пространстве эквивалентен ортогональному (Кете, Теплиц [31], Лорх [35], Гельфанд

[16]). В счетно-гильбертовом пространстве аналогичный факт был рассмотрен в [14, 27]. Приводимое здесь доказательство, анонсированное для счетно-гильбертовых пространств в [27], отличается от доказательства Войтинского [14], основанного на усреднении Лорха-Гельфанда (см., также [39]).

Лемма 9.1. *Пусть X — бочечное локально выпуклое пространство, топология в котором задается набором невырожденных гильбертовых норм $\{||x||_p,\ p \in P\}$. Пусть $\{e_k\}$ — безусловный базис в X, $\{e'_k\}$ — биортогональная последовательность непрерывных функционалов. Тогда*

$$||x||_{0,p} = \left(\sum |e'_k(x)|^2 ||e_k||_p^2\right)^{1/2},\quad x \in X,\ p \in P, \tag{1}$$

— система гильбертовых норм, задающая исходную топологию в X.

Доказательство. Как показал Орлич [44]*, из безусловной сходимости ряда Σx_k в гильбертовом пространстве следует $\Sigma ||x_k||^2 < \infty$. Поэтому ввиду безусловности базиса $\{e_k\}$ определены и конечны полунормы (1). Поскольку X — бочечное, а полунормы (1), очевидно, полунепрерывны снизу, то (принцип Орлича—Гельфанда [53,с.635]) они непрерывны в X, т. е.

$$\forall p \exists q \exists C : ||x||_{0,p} \leqslant C ||x||_q,\ x \in X. \tag{2}$$

Пусть X' — сильное сопряженное пространство к X, H'_p — пространство функционалов $x' \in X'$, непрерывных по норме $||x||_p$, с нормой $||x'||'_p = \sup\{|x'(x)| : x \in U_p\}$, где $U_p = \{x \in X : ||x||_p \leqslant 1\}$, U_p^0 — поляра к U_p в X', т. е. единичный шар в H'_p. Ниже покажем, что

$$\forall q \exists r \exists L : ||x'||'_{0,r} \stackrel{\text{def}}{=} (\Sigma |x'(e_k)|^2 \|e'_k\|'^2_r)^{1/2} \leqslant L \|x'\|'_q. \tag{3}$$

Тогда, учитывая, что $1 = |e'_k(e_k)| \leqslant \|e'_k\|'_r \|e_k\|_r$, и применяя неравенство Коши, из (3) получим

$$|x'(x)| \leqslant \Sigma |e'_k(x)| \|e_k\|_r |x'(e_k)| \|e'_k\|'_r \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|_{0,r} \|x'\|'_{0,r} \leqslant L \|x\|_{0,r} \quad \text{для } x' \in U_q^0.$$

Поэтому

$$\|x\|_q = \sup\{|x'(x)| : x' \in U_q^0\} \leqslant L\|x\|_{0,r}. \tag{4}$$

Неравенства (2), (4) означают эквивалентность системы норм $\{\|x\|_p\}$ и (1). Итак, осталось доказать (3).

Определим семейство линейных непрерывных операторов $T_\nu : X' \to X'$, $\nu \subset N$, по формуле $T_\nu x' = \sum_{k \in \nu} x'(e_k) e_k$, $x' \in X'$. Из безусловности базиса $\{e_k\}$ следует, что множество функционалов $\{T_\nu x' : \nu \subset N\}$ точечно ограничено. Ввиду бочечности X это множество сильно ограничено в X', т. е. семейство операторов $\{T_\nu,\ \nu \subset N\}$ точечно ограничено. Отсюда, поскольку X' — квазиполное (как сопряженное к бочечному пространству), получаем

* В [27] этот результат по недоразумению приписывался Мазуру.

[9, с. 166], что ввиду ограниченности множеств U_p^0 ограниченными будут и множества $\{T_\nu x' : x' \in T_p^0, \ \nu \subset N\}$. Поскольку ограниченное семейство функционалов является эквинепрерывным (ввиду бочечности X), то

$$\forall q \exists r \exists L : \|\sum_{k \ni \nu} x'(e_k)\, e_k'\|_r' \leqslant L \|x'\|_q', \ x' \in H_q'. \tag{5}$$

По теореме Банаха-Штейнгауза, (5) означает, что ряд $\Sigma x'(e_k)\, e_k$ сходится безусловно для любого $x' \in H_q'$ по норме $\|x'\|_r'$. Применяя еще раз теорему Орлича [44], получим, что полунормы $|x'\|_{0,r}' = (\Sigma |x'(e_k)|^2 \|e_k'\|_r'^2)^{1/2}$ определены и конечны на H_q'. Ввиду очевидной полунепрерывности снизу полунорм $\|x'\|_{0,r}'$ благодаря принципу Орлича—Гельфанда получаем их непрерывность, т. е. (3). Лемма доказана.

3°. Доказательство теоремы 4.6. Ввиду ядерности пространств $A(D)$, $A(K)$ топологию в них можно задать с помощью гильбертовых норм [38, предложения 3,3a], и базис $\{e_k\}$ является безусловным [21; 38, § 4]. Тогда, согласно лемме 9.1, существует последовательность гильбертовых пространств $H_p : H_p \supset H_{p+1} \supset X, \ p = 1, \ldots,$ такая, что

$$A(D) = \lim pr H_r, \tag{6}$$

$$\|x\|_{H_p} = (\sum |e_k'(x)|^2 \|e_k\|_{H_p}^2)^{1/2}, \ x \in A(D). \tag{7}$$

По той же лемме 9.1, учитывая лемму 5.2, построим гильбертово пространство H_0, удовлетворяющее непрерывным вложениям

$$A(K) \subset H_0 \subset AC(K) \tag{8}$$

и такое, что

$$\|x\|_{H_0} = (\Sigma |e_k'(x)|^2 \|e_k\|_{H_0}^2)^{1/2}, \ x \in A(K). \tag{9}$$

Равенства (7), (9) означают, что $\{e_k\}$ — общий ортогональный базис в H_0, H_p, $p = 1, \ldots$ Поэтому $\{e_k\}$ — базис во всех пространствах $H_p^\alpha = (H_0)^{1-\alpha} (H_p)^\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $p = 1, \ldots$

Из (6) непосредственно следует существование последовательностей $\sigma_p \uparrow 1$, $\tau_p \uparrow 1$ таких, что выполняются непрерывные вложения

$$A(\overline{D}_{\sigma_p}) \subset H_p \subset A(D_{\tau_p}), \ p \geqslant p_0. \tag{10}$$

Применяя леммы 4.1, 4.2, 3.3, из (10) получим непрерывные вложения (по теореме 3.1, функция $\omega(D, K, z)$ непрерывна, поэтому все D_α усиленно псевдовыпуклые:

$$A(F_{\alpha\sigma_p}) \subset H_p^\alpha \subset A(D_{\alpha\tau_p}), \ 0 < \alpha < 1, \ p \geqslant p_0. \tag{11}$$

Пусть $0 < \lambda < 1$. Обозначим $\alpha_p = \lambda/\sigma_p$, $\beta_p = \lambda/\tau_p$, $\lambda_p = \lambda\tau_p/\sigma_p$, $\mu_p = \lambda\sigma_p/\sigma_p$. Возьмем $\tilde{p} \geqslant p_0$ такое, что $\alpha_p < 1$, $\beta_p < 1$ при $p \geqslant \tilde{p}$. Тогда из (11) следуют непрерывные вложения

$$A(F_\lambda) \subset H_p^{\alpha_p} \subset A(D_{\lambda_p}), \tag{12}$$

$$A(F_{\mu_p}) \subset H_p^{\beta_p} \subset (A\,D_\lambda). \tag{13}$$

Поскольку $F_\lambda = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} D_{\lambda_p}$, $D_\lambda = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} F_{\mu_p}$ (здесь опять мы воспользовались непрерывностью функции ω), то из (12), (13) получаем соотношение

$$A(D_\lambda) = \lim pr H_p^{\beta_p};\ A(F_\lambda) = \lim \operatorname{ind} H_p^{\alpha_p}.$$

Отсюда заключаем, что система $\{e_k\}$ — базис в пространствах $A(F_\lambda)$, $A(D_\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, поскольку $\{e_k\}$ — базис во всех пространствах H_p^α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $p = 1, \ldots$ Теорема доказана.

§ 10. Некоторые заключительные соображения и задачи

10.1. Если для компактов теорема 4.2 дает окончательное решение вопроса об изоморфизме 1. (2), то для многообразий Штейна остается нерешенной

Задача 10.1. Является ли условие сильной псевдовыпуклости многообразия Штейна Ω, состоящего из конечного числа связных компонент, достаточным для изоморфизма $A(\Omega) \simeq A(U^n)$, $n = \dim \Omega$?

Укажем довольно широкий класс областей в C^n, для которых эта задача решается в положительном смысле.

Предложение 10.1. *Пусть D — сильно линейно выпуклая область в C^n* (А. Мартино [37, определение 2.2])[1]. *Тогда для изоморфизма $A(D) \simeq A(U^n)$ необходимо и достаточно, чтобы D была сильно псевдовыпуклой.*

Это утверждение вытекает из следующего более общего факта и теоремы 4.2.

Предложение 10.2. *Пусть Ω — многообразие Штейна и существует компакт K на некотором многообразии Штейна Ω_1 такой, что $A(\Omega)^* \simeq A(K)$ (или, что то же, $A(K)^* \simeq A(\Omega)$). Тогда сильная псевдовыпуклость многообразия Ω равносильна C^n-регулярности компакта K в Ω_1. При этом K обладает окрестностью Рунге в Ω_1 тогда и только тогда, когда Ω имеет конечное число связных компонент.*

Из предложения 10.2 следует, что задаче 10.1 эквивалентна

Задача 10.2. Пусть Ω — (сильно псевдовыпуклое) многообразие Штейна. Всегда ли сопряженное пространство $A(\Omega)^*$ изоморфно пространству $A(K)$, где K — компакт на некотором многообразии Штейна?

10.2. **Предложение 10.3.** *Пусть D — произвольная выпуклая область в C^n. Для изоморфизма $A(D) \simeq A(U^n)$ необходимо и достаточно, чтобы D не содержала компексных прямых.*

---

[1] Из-за громоздкости мы не приводим определения; сравнительно простые достаточные условия сильной линейной выпуклости дает Л. А. Айзенберг в [1].

Это утверждение вытекает из предложения 10.1 и следующего факта.

Предложение 10.4. *Для того чтобы выпуклая область $D \subset C^n$ была сильно псевдовыпуклой и достаточно, чтобы D не содержала комплексных прямых.*

Предложение 10.4 можно перефразировать так:

Предложение 10.4а. *Для сильной псевдовыпуклости выпуклой области $D \subset C^n$ необходимо и достаточно, чтобы сечение области любой комплексной прямой* Г *было либо пустым, либо регулярным в* Г.

В связи с этим и предложением 3.3 естественно возникает

Задача 10.3. Являются ли эквивалентными условия: а) D — сильно псевдовыпуклая область в C^n; б) сечение D любой комплексной прямой Г либо пусто, либо регулярно в Г.

10.3. В [41] (вопрос 6.4) поставлена задача: „является ли отсутствие дополнительной оболочки голоморфности у псевдовыпуклой области $D \subset\subset C^n$ достаточным для изоморфизма $A(D) \simeq A(U^n)$. Отрицательный ответ на этот вопрос содержится в нашей работе [29]. Действительно, при $n = 1$ требование отсутствия дополнительной оболочки голоморфности равносильно условию Каратеодори: $\partial D = \partial \overline{D}$. Взяв какую-либо нерегулярную область Каратеодори $D_0 \subset\subset C^1$, по теореме 4 [29] получаем искомый контрпример. В $C^n, n \geqslant 2$ такой пример получится, если взять декартово произведение области на $(n-1)$-мерный полидиск.

10.4. Определение 10.1. *Будем говорить, что относительно компактное псевдовыпуклое открытое множество D на многообразии Штейна Ω размерности n обладает C^n-устойчивостью снаружи, если для любой последовательности открытых множеств $\{D_s\} : D_{s+1} \subset D_s$, $D \subset \bigcap\limits_{s=1}^{\infty} D_s \subset \overline{D}$ справедливо $\omega(D_S, K, z) \to \omega(D, K, z)$, $z \in D$, для любого C^n-регулярного компакта $K \subset\subset D$.*

Предложение 10.5. *Утверждения теорем 4.1, 4.4 останутся в силе, если вместо усиленной псевдовыпуклости множества D требовать его C^n-устойчивость снаружи и сильную псевдовыпуклость.*

Задача 10.4. Пусть D — сильно псевдовыпуклое открытое множество, не имеющее дополнительной оболочки голоморфности. Является ли D C^n-устойчивым снаружи?

10.5. Нам не удалось решить следующую задачу.

Задача 10.5. Пусть K — C^n-регулярный компакт на многообразии Штейна размерности n, D — сильно псевдовыпуклая окрестность $K: D_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) < \alpha\}$, $F_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) \leqslant \alpha\}$. Показать, что $F_\alpha = \overline{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

10.6. Следующая задача тесно примыкает к проблеме А. Н. Колмогорова ([30, с. 52; см. также [11, § 9, теорема 2]) о сущестровании для ε-энтропии компакта A_D^K асимптотики вида (обозначения см. в [30])

$$H_\varepsilon(A_D^K) \sim \tau\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}, \quad \varepsilon \to 0, \tag{1}$$

некоторой константой $\tau = \tau(K, D)$, $K \subset D \subset\subset \mathbf{C}^n$.

Задача 10.6 [24]. Доказать в условиях теоремы 4.5 существование константы σ такой, что $a_k \sim \sigma k^{\frac{1}{n}}$, или, что то же самое, доказать, что в условиях теоремы 4.1

$$\ln \mu_k(H_0, H_1) \sim \sigma k^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

Решение этой задачи позволило бы полностью перенести на случай $n \geqslant 2$ результаты (но не методы) В. Д. Ерохина об щем базисе и асимптотике (1) для аналитических функций юго переменного [22].

Укажем на важный частный случай, в котором с помощью ремы 7.2 удается получить решение этой задачи.

Предложение 10.6. (ср. 4. (12)). *В условиях теоремы* 7.2 *полняется соотношение* (2) *с*

$$\sigma = \left[\frac{n!\ln\frac{r_1^{(1)}}{r_1^0}\ldots\ln\frac{r_n^{(1)}}{r_n^0}}{\varkappa}\right]^{1/n}, \tag{3}$$

где $\varkappa$ — кратность отображения $\varkappa\,|\,\Delta_1 : \Delta_1 \to \mathbf{C}^n$, или, что то же самое, общее число нулей отображения $\varkappa$ в Δ_1 (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность).

Следствие 10.1 (ср. [11, § 9]). *В условиях предложения* 10.6 *справедлива асимптотическая формула*

$$H_\varepsilon(A_{\Delta_1}^{\overline{\Delta}_0}) \sim \frac{2}{(n+1)\sigma^n}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}, \quad \varepsilon \to 0,$$

где σ вычисляется по формуле (3).

Поступила 12 октября 1972 г.