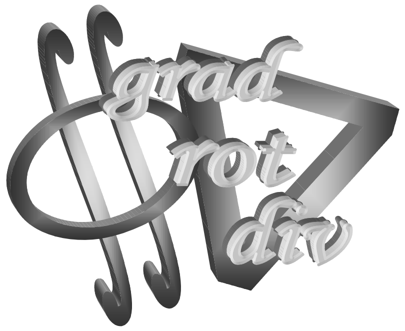


С.Н. Зиненко

Векторный и тензорный анализ

Элементы дифференциальной геометрии и их приложения к механике

(теория к задачам)

2014

1. Естественный трехгранник кривой

Теория

1° ***Трехгранник кривой.*** *На параметрическое уравнение гладкой кривой*

$$L=\left\{\,\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\quad 0\le t\le T\,\right\}$$

где ***производная*** $\vec{\boldsymbol r}\,'(t)\ne\vec{\boldsymbol 0}$ *- непрерывна, можно смотреть, как на уравнение движения материальной точки с плавно меняющейся* ***скоростью*** $\vec{\boldsymbol v}=\vec{\boldsymbol r}\,'(t)$, *не останавливаясь ни на мгновение* $\vec{\boldsymbol v}\ne\vec{\boldsymbol 0}$. *К моменту времени* t *точка проходит расстояние*

$$l=l(t)=\int\limits_0^t\left|\vec{\boldsymbol r}\,'(s)\right|ds=\left[\,\vec{\boldsymbol v}=\vec{\boldsymbol r}\,'\;\Rightarrow\;v=|\,\vec{\boldsymbol v}\,|=|\,\vec{\boldsymbol r}\,'\,|\,\right]=\int\limits_0^t v(s)\,ds$$

Среди всех возможных параметризаций $\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t)$ *кривой (по одной и той же траектории можно двигаться с различной по величине скоростью* $v=?$*) наиболее удобна для выяснения ее геометрических особенностей* ***естественная*** *параметризация, когда роль параметра играет длина дуги* $l=l(t)=t$ *(двигаясь с единичной скоростью* $v=\left|\,\vec{\boldsymbol v}(t)\right|\equiv 1$*)*

Теорема

> *Для того,*
> *1) чтобы параметризация* $\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t)$ *была* ***естественной***
> $\Leftrightarrow$
> *1) чтобы* $\left|\vec{\boldsymbol r}\,'(t)\right|\equiv 1$

В отличие от произвольной параметризации

$$\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t)\quad\Rightarrow\quad\vec{\boldsymbol r}\,'=\vec{\boldsymbol r}\,'(t)\quad\Rightarrow\quad\vec{\boldsymbol r}\,''=\vec{\boldsymbol r}\,''(t)\quad\ldots$$

в случае ***естественной*** *примем обозначения*

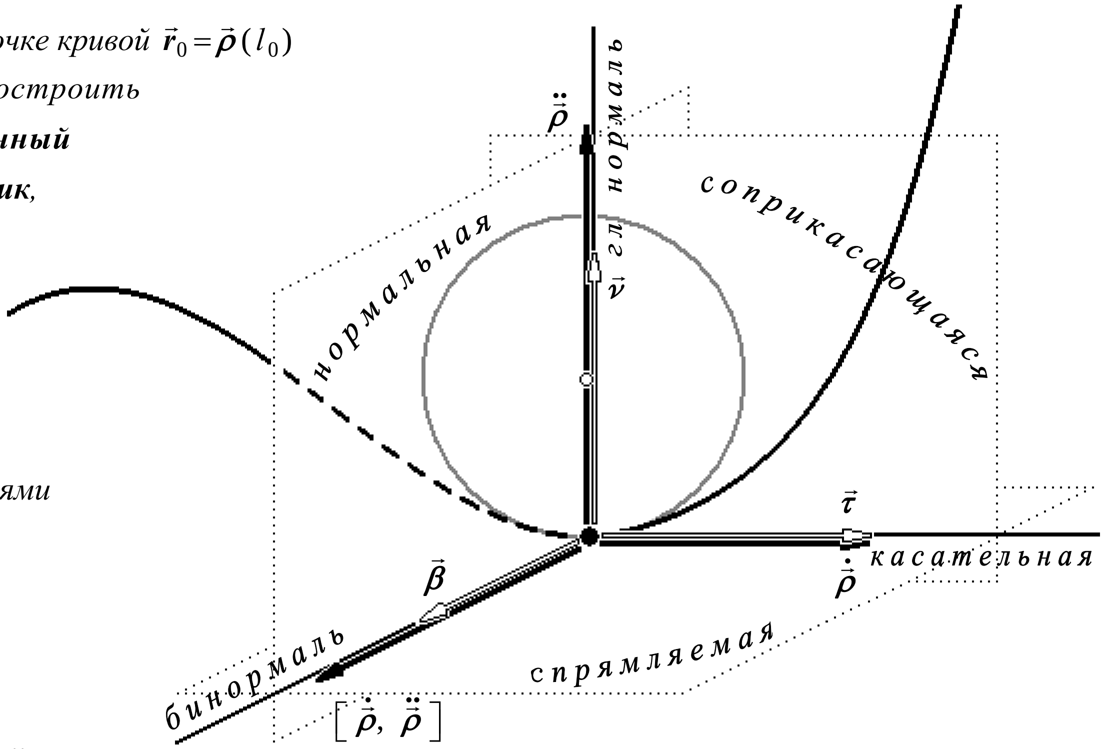
$$\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol\rho}(l)\quad\Rightarrow\quad\dot{\vec{\boldsymbol r}}=\dot{\vec{\boldsymbol\rho}}(l)\quad\Rightarrow\quad\ddot{\vec{\boldsymbol r}}=\ddot{\vec{\boldsymbol\rho}}(l)\quad\ldots$$

Следствие

> *Пусть*
> *1) параметризация* $\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol\rho}(l)$ *- естественная* $\left(\,|\,\dot{\vec{\boldsymbol\rho}}\,|\equiv 1\,\right)$
> $\Rightarrow$
> *1)* $\dot{\vec{\boldsymbol\rho}}(l)\perp\ddot{\vec{\boldsymbol\rho}}(l)\quad\Leftrightarrow\quad\left(\dot{\vec{\boldsymbol\rho}},\,\ddot{\vec{\boldsymbol\rho}}\right)=0$

Замечание. *При движении по кривой с единичной по величине скоростью* $\vec{v} = \dot{\vec{\rho}}\,(l)$ *ускорение* $\vec{w} = \ddot{\vec{\rho}}\,(l)$ *ортогонально скорости* $\vec{w} \perp \vec{v}$ *, т.е. в любой момент времени* $t = l$ *движение материальной точки по кривой напоминает движение по окружности с постоянной по величине скоростью с центростремительным ускорение* $\vec{w} \perp \vec{v}$

В любой точке кривой $\vec{r}_0 = \vec{\rho}\,(l_0)$ *можно построить* ***естественный трехгранник****,* ***ребра*** *и* ***грани*** *которого задаются направлениями*



- $\vec{\tau} = \dot{\vec{\rho}}$

- $\vec{\nu} \uparrow\uparrow \ddot{\vec{\rho}}$

- $\vec{\beta} \uparrow\uparrow [\,\dot{\vec{\rho}}, \ddot{\vec{\rho}}\,]$

Замечание. *Разложению в ряд Тейлора при достаточно малых смещениях* l

$$\vec{\rho}(l_0+l)=\vec{\rho}(l_0)+\tfrac{1}{1!}\,\dot{\vec{\rho}}(l_0)\,l+\tfrac{1}{2!}\,\ddot{\vec{\rho}}(l_0)\,l^2+\tfrac{1}{3!}\,\dddot{\vec{\rho}}(l_0)\,l^3+\ldots$$

можно придать следующую физическую интерпретацию

- в ***нулевом*** *приближении материальная точка* ***покоится***

$$\vec{\rho}(l_0+l)\approx\vec{\rho}(l_0)=\vec{r}_0$$

- в ***первом*** *приближении точка* ***движется прямолинейно и равномерно*** *по касательной* $\vec{\tau}$

$$\vec{\rho}(l_0+l)\approx\vec{\rho}(l_0)+\tfrac{1}{1!}\,\dot{\vec{\rho}}(l_0)\,l=\vec{r}_0+\vec{\tau}\,l$$

- во ***втором*** *приближении точка* ***движется по плоской кривой*** *(параболе)*

$$\vec{\rho}(l_0+l)\approx\vec{\rho}(l_0)+\tfrac{1}{1!}\,\dot{\vec{\rho}}(l_0)\,l+\tfrac{1}{2!}\,\ddot{\vec{\rho}}(l_0)\,l^2=\vec{r}_0+\vec{\tau}\,l+\frac{1}{2d}\,\vec{\nu}\,l^2 \qquad \left(d=\frac{1}{|\ddot{\vec{\rho}}|}\right)$$

лежащей в плоскости векторов $\vec{\tau}=\dot{\vec{\rho}}$, $\vec{\nu}\uparrow\uparrow\ddot{\vec{\rho}}$, *т.е. в соприкасающейся плоскости, что в свою очередь (во втором приближении) совпадает с движением по так называемой* ***соприкасающейся окружности*** *с центром* $\left(\vec{r}_0+d\,\vec{\nu}\right)$ *и радиусом* d

$$\vec{r}=\left(\vec{r}_0+d\,\vec{\nu}\right)+d\left(\vec{\tau}\sin\frac{l}{d}-\vec{\nu}\cos\frac{l}{d}\right)\approx\vec{r}_0+\vec{\tau}\,l+\frac{1}{2d}\,\vec{\nu}\,l^2$$

Далее*. В случае произвольной параметризации* $\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{\rho}(l(t))$ *имеем*

$$\vec{r}\,'=\dot{\vec{\rho}}\cdot l', \qquad \vec{r}\,''=\dot{\vec{\rho}}\cdot l''+\ddot{\vec{\rho}}\cdot l'^2$$

откуда вытекает, что векторы $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$ *всегда лежат в соприкасающейся плоскости, так что последовательность построения естественного трехгранника кривой в произвольной ситуации может быть следующая*

- $\vec{\tau}\uparrow\uparrow\vec{r}\,' \quad\Rightarrow$

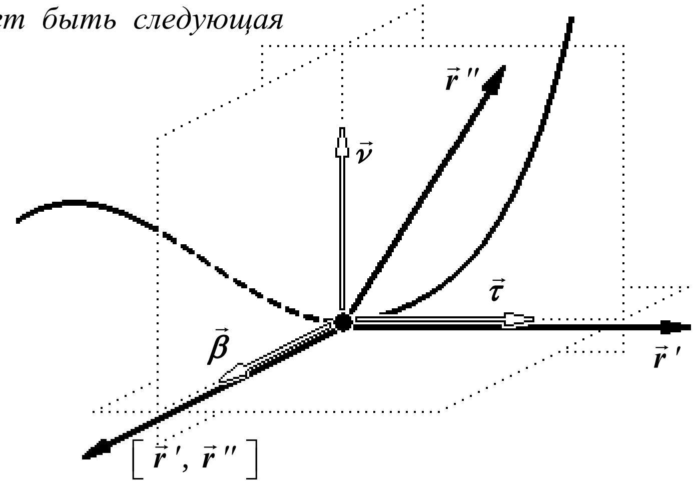
касательная *и*
нормальная *плоскость*

- $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right] \quad\Rightarrow$

бинормаль *и*
соприкасающаяся *плоскость*

- $\vec{\nu}\uparrow\uparrow\left[\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right],\vec{r}\,'\right] \quad\Rightarrow$

главная нормаль *и*
спрямляемая *плоскость*



Замечание*. Из представления векторов* $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$, *в частности, вытекает, что скорость*

$$\vec{v}=\vec{r}\,'=\dot{\vec{\rho}}\cdot l'=\vec{\tau}\cdot v \qquad (v=l')$$

всегда направлена по касательной $\vec{v}\uparrow\uparrow\vec{\tau}$ *к траектории, а ускорение*

$$\vec{w}=\vec{r}\,''=\dot{\vec{\rho}}\cdot l''+\ddot{\vec{\rho}}\cdot l'^2=\vec{\tau}\cdot v'+\vec{\nu}\cdot\frac{v^2}{d}=\vec{w}_{\parallel}+\vec{w}_{\perp}$$

может быть разложено на две составляющие (касательную и нормальную)
Последнее позволяет представить движение точки в любой момент t *как сложение двух*

- *прямолинейное (но неравномерное) по касательной* $\vec{\tau}$ *с изменяющейся по величине скоростью* $|\vec{v}|=v \Rightarrow v'\neq 0$ *и тангенциальным ускорением* $\vec{w}_{\parallel}\parallel\vec{\tau} \Rightarrow \left|\vec{w}_{\parallel}\right|=w_{\parallel}=v'$
- *равномерное (но криволинейное) по окружности радиуса* d *с постоянной по величине скоростью* $|\vec{v}|=v$ *и центростремительным ускорением* $\vec{w}_{\perp}\perp\vec{\tau} \Rightarrow \left|\vec{w}_{\perp}\right|=w_{\perp}=\dfrac{v^2}{d}$

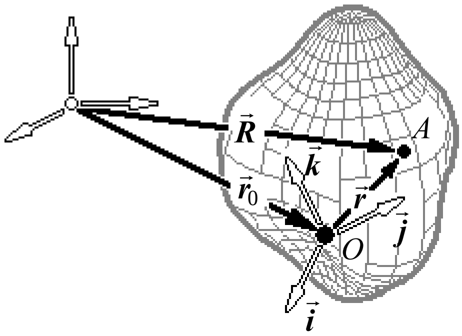
2^o ***Тензор угловой скорости.*** *Движение точки O по кривой с сопровождающим ее естественным трехгранником можно рассматривать как частный случай подвижной системы координат с движущимся началом отсчета $O(t)$ $(\equiv \vec{r}_0(t))$ и вращающимся базисом $\left\{ \vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t) \right\}$. В свою очередь задание движения координатного триэдра $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}(t)$ равносильно заданию движения **твердого** тела (расстояния между точками тела **сохраняются**), с которым жестко связана движущаяся система координат Радиус-векторы произвольной точки A твердого тела в неподвижной и подвижной системах координат обозначим через $\vec{R}(t)$ и $\vec{r}(t)$. Очевидно,*

$$\vec{R}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \left(\vec{i}(t)x + \vec{j}(t)y + \vec{k}(t)z \right)$$

где координаты $x,\ y,\ z \equiv const$ (условие неподвижности точки A относительно движущейся системы координат). Следовательно, скорость точки A разлагается на две составляющие

$$\vec{v}(t) = \vec{R}\,'(t) = \vec{r}_0\,'(t) + \vec{r}\,'(t) = \vec{r}_0\,'(t) + \left(\vec{i}\,'(t)x + \vec{j}\,'(t)y + \vec{k}\,'(t)z \right) = \vec{v}_n(t) + \vec{v}_в(t)$$

Различают два частных случая движения



a) ***поступательное***

$$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k} \equiv \overrightarrow{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{r}_0\,'(t) = \vec{v}_0(t) = \vec{v}_n(t)$$

b) ***вращательное*** *(вокруг неподвижной точки O)*

$$\vec{r}_0 \equiv \overrightarrow{const} \ \Rightarrow\ \vec{v}(t) = \vec{i}\,'(t)x + \vec{j}\,'(t)y + \vec{k}\,'(t)z = \vec{v}_в(t)$$

Тройка векторов-производных

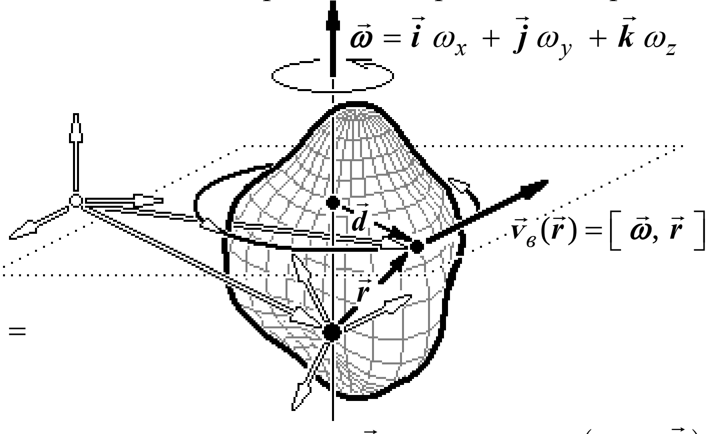
$$\Omega = \left[\ \vec{i}\,'\ \ \vec{j}\,'\ \ \vec{k}\,'\ \right]$$

*полностью определяющая **вращение**, образует **тензор угловой скорости**. Составив из столбцов-координат векторов $\left\{ \vec{i}\,',\ \vec{j}\,',\ \vec{k}\,' \right\}$ матрицу, найдем компоненты тензора Ω в ортонормированном базисе $\left\{ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k} \right\}$*

$$\Omega = \left[\ \vec{i}\,'\ \ \vec{j}\,'\ \ \vec{k}\,'\ \right] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} (\vec{i}\,', \vec{i}) \\ (\vec{i}\,', \vec{j}) \\ (\vec{i}\,', \vec{k}) \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} (\vec{j}\,', \vec{i}) \\ (\vec{j}\,', \vec{j}) \\ (\vec{j}\,', \vec{k}) \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} (\vec{k}\,', \vec{i}) \\ (\vec{k}\,', \vec{j}) \\ (\vec{k}\,', \vec{k}) \end{array}} \end{array} \right] \\ \begin{array}{ccc} \backslash\backslash \quad & \quad \backslash\backslash \quad & \quad \backslash\backslash \\ \vec{i}\,' \quad & \quad \vec{j}\,' \quad & \quad \vec{k}\,' \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \left(= -\Omega^* \right), \qquad \left[\begin{array}{l} \omega_x = \left(\vec{j}\,', \vec{k} \right) \\ \omega_y = \left(\vec{k}\,', \vec{i} \right) \\ \omega_z = \left(\vec{i}\,', \vec{j} \right) \end{array} \right.$$

Для выяснения физического смысла компонент тензора Ω построим вектор

Тогда



$$\vec{v}_в = \vec{i}\,'x + \vec{j}\,'y + \vec{k}\,'z =$$

$$= \left[\ \vec{i}\,'\ \ \vec{j}\,'\ \ \vec{k}\,'\ \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \left(= \Omega \cdot \vec{r} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left[\vec{\omega}, \vec{r} \right] \left(= \left[\vec{\omega}, \vec{d} \right] \right) \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \vec{v}_в \perp \vec{\omega} \perp \vec{d} \\ \left| \vec{v}_в \right| = \left| \vec{\omega} \right| \cdot \left| \vec{d} \right| \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \vec{\omega} \perp \left(\vec{v}_в \perp \vec{d} \right) \\ \omega = \dfrac{v_в}{d} \end{array} \right.$$

*Следовательно, твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, в любой момент времени вращается вокруг мгновенной оси вращения $\vec{e}_{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ с угловой скоростью $\omega = |\vec{\omega}|$ Вектор $\vec{\omega}$ называется **вектором угловой скорости** твердого тела.*

В общем случае, движение твердого тела поступательно-вращательное

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_в = \vec{v}_0 + \left[\,\vec{\omega},\, \vec{r}\,\right]$$

Теорема

$\vec{\omega}$ **-** *не зависит от выбора базиса* $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$

Действительно, если $\vec{\omega}_1$ *и* $\vec{\omega}_2$ *угловые скорости, построенные по двум разным базисам, то линейная скорость* $\vec{v}$ *произвольной точки с радиус-вектором* $\vec{r}$ *равна*

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left[\,\vec{\omega}_1,\, \vec{r}\,\right] = \vec{v}_0 + \left[\,\vec{\omega}_2,\, \vec{r}\,\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\,\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2,\, \vec{r}\,\right] = \vec{0} \quad \forall \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$$

Теорема

$\vec{\omega}$ **-** *не зависит от выбора точки* $\boldsymbol{O}$*, к которой отнесено вращение*

Действительно, если $\vec{\omega}_1$ *и* $\vec{\omega}_2$ *угловые скорости, построенные по двум разным началам* $\boldsymbol{O}_1$ *и* $\boldsymbol{O}_2$*, движущихся со скоростями* $\vec{v}_1$ *и* $\vec{v}_2$*, то линейная скорость* $\vec{v}$ *произвольной точки, имеющей относительно* $\boldsymbol{O}_1$ *и* $\boldsymbol{O}_2$ *радиус-векторы* $\vec{r}_1$ *и* $\vec{r}_2$*, равна*

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_1 + \left[\,\vec{\omega}_1,\, \vec{r}_1\,\right] \\ \vec{v} = \vec{v}_2 + \left[\,\vec{\omega}_2,\, \vec{r}_2\,\right] = \overbrace{\vec{v}_1 + \left[\,\vec{\omega}_1,\, \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,\right]}^{\vec{v}_2 \;//} + \left[\,\vec{\omega}_2,\, \vec{r}_2\,\right] = \overbrace{\vec{v}_1 + \left[\,\vec{\omega}_1,\, \vec{r}_1\,\right]}^{\vec{v} \;//} - \left[\,\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2,\, \vec{r}_2\,\right] \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\left[\,\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2,\, \vec{r}_2\,\right] = \vec{0} \quad \forall \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$$

Таким образом, можно говорить о семействе параллельных осей вращения. Среди них в любой момент времени имеется ***единственная****, точки которой смещаются вдоль нее (в частности,* ***покоятся****), называемая* ***мгновенной осью вращения****.*

Теорема

Произвольное движение твердого тела – ***винтовое****,*
т.е. в любой момент времени точки твердого тела движутся по винтовым линиям, вращаясь вокруг мгновенной оси вращения и смещаясь вдоль нее.

Разложим скорость произвольно выбранного в теле начала координат на составляющие

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}, \qquad \vec{v}_{||} \parallel \vec{\omega}, \qquad \vec{v}_{\perp} \perp \vec{\omega}$$

Полагая

$$\vec{r}_{\omega} = \frac{1}{|\vec{\omega}|^2}\left[\,\vec{\omega},\, \vec{v}_{\perp}\,\right]$$

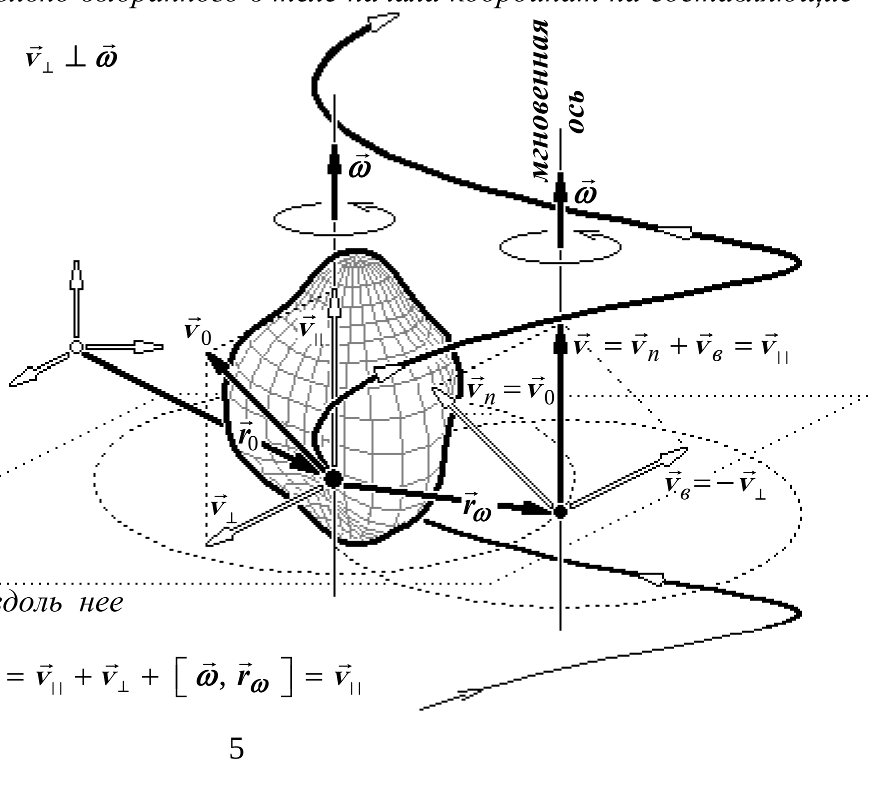
так что

$$\vec{v}_{\perp} = -\left[\,\vec{\omega},\, \vec{r}_{\omega}\,\right]$$

приходим к прямой $\parallel \vec{\omega}$

$$\left[\,\vec{\omega},\, \vec{r} - \vec{r}_{\omega}\,\right] = \vec{0}$$

точки которой скользят вдоль нее



$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_в = \vec{v}_0 + \left[\,\vec{\omega},\, \vec{r}\,\right] = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp} + \left[\,\vec{\omega},\, \vec{r}_{\omega}\,\right] = \vec{v}_{||}$$

2. Кривизна и кручение кривой

Теория

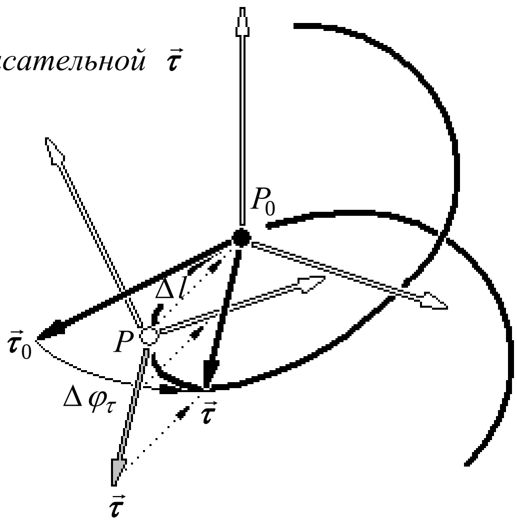
*1° **Кривизной** кривой L в точке P_0 называется*

$$k_\tau = \lim_{P\to P_0} \frac{\Delta\varphi_\tau}{\Delta l}$$

где $\Delta\varphi_\tau$ - угол поворота единичного вектора касательной $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ при переходе от точки P_0 к точке P,

а Δl - длина дуги $\overset{\frown}{P_0P}$

Радиусом кривизны называется $d_\tau = k_\tau^{-1}$



Теорема *(о кривизне)*

$$\boxed{k_\tau = |\,\ddot{\vec{\boldsymbol{\rho}}}\,| = \frac{\left|\left[\,\vec{\boldsymbol{r}}\,',\ \vec{\boldsymbol{r}}\,''\,\right]\right|}{|\,\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}}$$

Теорема *(геометрический смысл кривизны)*

Для того,
1) чтобы кривая L была отрезком прямой
$\Leftrightarrow$
1) чтобы кривизна $k_\tau \equiv 0$

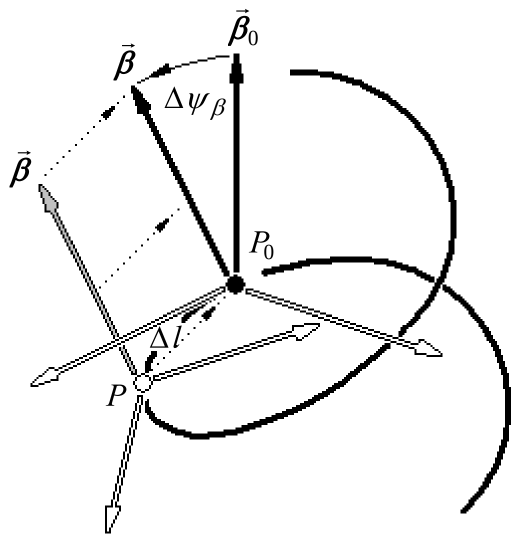
*2° **Кручением** кривой L в точке P_0 называется*

$$k_\beta = \lim_{P\to P_0} \frac{\Delta\psi_\beta}{\Delta l}$$

где $\Delta\psi_\beta$ - угол поворота единичного вектора бинормали $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ при переходе от точки P_0 к точке P,

а Δl - длина дуги $\overset{\frown}{P_0P}$

Радиусом кручения называется $d_\beta = |\,k_\beta^{-1}\,|$



Теорема *(о кручении)*

$$\boxed{k_\beta = \frac{\left(\dot{\vec{\boldsymbol{\rho}}},\ \ddot{\vec{\boldsymbol{\rho}}},\ \dddot{\vec{\boldsymbol{\rho}}}\right)}{k_\tau^2} = \frac{\left(\vec{\boldsymbol{r}}\,',\ \vec{\boldsymbol{r}}\,'',\ \vec{\boldsymbol{r}}\,'''\right)}{k_\tau^2\,|\,\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^6}}$$

Теорема *(геометрический смысл кручения)*

Для того,
1) чтобы кривая L была плоской
$\Leftrightarrow$
1) чтобы кручение $k_\beta \equiv 0$

3° Формулы Френе

Теорема

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} = & k_\tau \vec{\nu} \\ \dot{\vec{\nu}} = -k_\tau \vec{\tau} + k_\beta \vec{\beta} \\ \dot{\vec{\beta}} = & -k_\beta \vec{\nu} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} \\ \dot{\vec{\nu}} \\ \dot{\vec{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_\tau & 0 \\ -k_\tau & 0 & k_\beta \\ 0 & -k_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} = [\vec{\omega}, \vec{\tau}] \\ \dot{\vec{\nu}} = [\vec{\omega}, \vec{\nu}] \\ \dot{\vec{\beta}} = [\vec{\omega}, \vec{\beta}] \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = k_\beta \vec{\tau} + k_\tau \vec{\beta}$$

Следствие

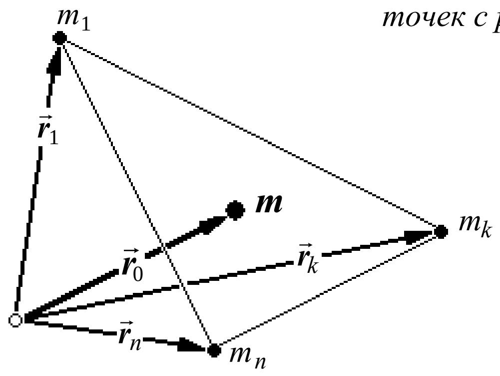
1) $\dot{\vec{\tau}} = k_\tau \vec{\nu}$ *- касательная* $\vec{\tau}$ *вращается вокруг мгновенного положения бинормали* $\vec{\beta}$ *(в соприкасающейся плоскости) с угловой скоростью* $k_\tau > 0$

2) $\dot{\vec{\beta}} = -k_\beta \vec{\nu}$ *- бинормаль* $\vec{\beta}$ *вращается вокруг мгновенного положения касательной* $\vec{\tau}$ *(в нормальной плоскости) с угловой скоростью* $k_\beta \gtrless 0$ *(если* $k_\beta > 0$*, то кривая напоминает “правый винт”, если* $k_\beta < 0$*, то “левый винт”)*

3) естественный трехгранник, ввинчиваясь вдоль кривой правым (левым) винтом, вращается как твердое тело с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}$*, величина которой* $\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{k_\tau^2 + k_\beta^2}$ *называется полной кривизной кривой в точке* P

3. Центр инерции

Теория



Центром инерции (центром масс) *системы материальных точек с радиус-векторами* $\vec{r}_k$ *и массами* m_k *называется точка*

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{\boldsymbol{m}} \sum_k \vec{r}_k\, m_k, \qquad \boldsymbol{m} = \sum_k m_k$$

в которой удобно сосредоточить всю массу $\boldsymbol{m}$ *В случае "сплошного" тела* V *с плотностью* $\rho(\vec{r})$ *точки* $\vec{r}$ *имеют "массу"* $dm = \rho(\vec{r})dV$ *, так что*

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{\boldsymbol{m}} \iiint_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV, \qquad \boldsymbol{m} = \iiint_V \rho(\vec{r})dV$$

Соответственно, в случае материальной поверхности S *или кривой* L, *получим*

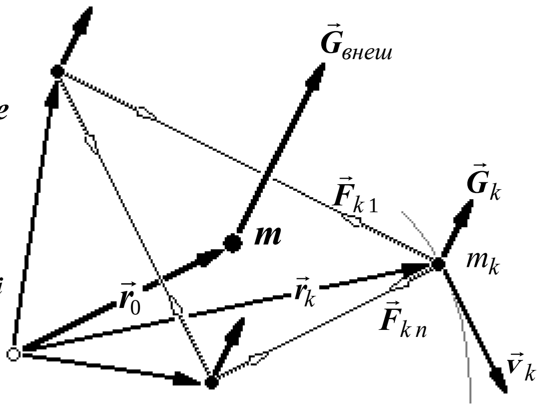
$$\vec{r}_0 = \frac{1}{\boldsymbol{m}} \iint_S \vec{r}\rho(\vec{r})dS, \quad \boldsymbol{m} = \iint_S \rho(\vec{r})dS \qquad \vec{r}_0 = \frac{1}{\boldsymbol{m}} \int_L \vec{r}\rho(\vec{r})dL, \quad \boldsymbol{m} = \int_L \rho(\vec{r})dL$$

4. Тензор инерции

Теория

1° *Твердое тело рассматривается как система материальных точек с радиус-векторами* $\vec{\boldsymbol r}_k$ *и массами* m_k, *движущихся со скоростями* $\vec{\boldsymbol r}_k' = \vec{\boldsymbol v}_k$ *под действием сил* $\vec{\boldsymbol F}_k$ *Согласно* **2**$\underline{^{ему}}$ *закону Ньютона*

$$m_k\ \vec{\boldsymbol v}_k' = \vec{\boldsymbol F}_k$$



Силы $\vec{\boldsymbol F}_k$ *разложим на* ***внутренние*** *и* ***внешние***

$$\vec{\boldsymbol F}_k = \sum_{\boldsymbol i \neq k} \vec{\boldsymbol F}_{k\boldsymbol i} + \vec{\boldsymbol G}_k$$

где $\vec{\boldsymbol F}_{k\boldsymbol i}$ *- сила, с которой на точку* $\vec{\boldsymbol r}_k$ *действует* $\vec{\boldsymbol r}_{\boldsymbol i}$
Согласно **3**$\underline{^{му}}$ *закону Ньютона*

$$\vec{\boldsymbol F}_{k\boldsymbol i} = -\vec{\boldsymbol F}_{\boldsymbol i k} \parallel \left(\vec{\boldsymbol r}_k - \vec{\boldsymbol r}_{\boldsymbol i}\right)$$

так что ***равнодействующая*** *и* ***суммарный момент внутренних*** *сил равны* ***нулю***

$$\vec{\boldsymbol F}_{внут} = \sum_k \sum_{\boldsymbol i \neq k} \vec{\boldsymbol F}_{k\boldsymbol i} = \sum \left(\vec{\boldsymbol F}_{k\boldsymbol i} + \vec{\boldsymbol F}_{\boldsymbol i k} \right) = \vec{\boldsymbol 0}$$

$$\vec{\boldsymbol N}_{внут} = \sum_k \sum_{\boldsymbol i \neq k} \left[\vec{\boldsymbol r}_k, \vec{\boldsymbol F}_{k\boldsymbol i} \right] = \sum \left(\left[\vec{\boldsymbol r}_k, \vec{\boldsymbol F}_{k\boldsymbol i} \right] + \left[\vec{\boldsymbol r}_{\boldsymbol i}, \vec{\boldsymbol F}_{\boldsymbol i k} \right] \right) = \sum \left[\vec{\boldsymbol r}_k - \vec{\boldsymbol r}_{\boldsymbol i}, \vec{\boldsymbol F}_{k\boldsymbol i} \right] = \vec{\boldsymbol 0}$$

Таким образом, внутренние силы, удерживая точки на неизменном расстоянии $\left|\vec{\boldsymbol r}_k - \vec{\boldsymbol r}_{\boldsymbol i}\right| = const_{k\boldsymbol i}$, *не влияют на движение твердого тела как целого.*

*2° **Поступательное** движение твердого тела однозначно описывается **линейной** скоростью **центра масс**, с которой совпадают линейные скорости остальных точек*

$$\vec{v}_k = \vec{v}_0 = \vec{r}_0'$$

и характеризуется

*- **импульсом** (количеством движения)*

$$\vec{P} = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k m_k \vec{v}_0 = \boldsymbol{m}\, \vec{v}_0$$

*- **кинетической энергией***

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_k m_k\left(\vec{v}_k, \vec{v}_k\right) = \tfrac{1}{2}\sum_k m_k\left(\vec{v}_0, \vec{v}_0\right) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{m}\left(\vec{v}_0, \vec{v}_0\right) = \tfrac{1}{2}\left(\vec{P}, \vec{v}_0\right)$$

Имеют место

***Теорема** (законы сохранения **поступательного** движения)*

> *1)* $\vec{G}_{внеш} = \sum_k \vec{G}_k = \vec{0}$ *- **равнодействующая внешних** сил равна **нулю***
>
> $\Rightarrow$
>
> *1)* $$\left[\begin{array}{l} \vec{P}\,' = \sum_k m_k \vec{v}_k' = \sum_k \vec{F}_k = \sum_k \vec{G}_k = \vec{G}_{внеш} = \vec{0} \\ T\,' = \sum_k m_k\left(\vec{v}_k', \vec{v}_k\right) = \left(\sum_k m_k \vec{v}_k', \vec{v}_0\right) = \left(\vec{P}\,', \vec{v}_0\right) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \vec{P} = \overrightarrow{const} \\ T = const \end{array}\right.$$

Следствие

> *При свободном движении твердого тела его центр инерции движется прямолинейно и равномерно*
>
> $$\vec{0} = \vec{P}\,' = \boldsymbol{m}\,\vec{v}_0' \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_0 = \overrightarrow{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

*3° **Вращательное** движение твердого тела однозначно описывается **угловой** скоростью, через которую выражаются линейные скорости всех точек*

$$\vec{v}_k = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_k\right]$$

и характеризуется

*- **моментом импульса** (кинетическим моментом)*

$$\vec{L} = \sum_k m_k\left[\vec{r}_k, \vec{v}_k\right] = \sum_k m_k\left[\vec{r}_k, \left[\vec{\omega}, \vec{r}_k\right]\right]$$

*- **кинетической энергией***

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_k m_k\left(\vec{v}_k, \vec{v}_k\right) = \tfrac{1}{2}\sum_k m_k\left(\left[\vec{\omega}, \vec{r}_k\right], \left[\vec{\omega}, \vec{r}_k\right]\right) = \tfrac{1}{2}\left(\vec{L}, \vec{\omega}\right)$$

Имеют место

***Теорема** (законы сохранения **вращательного** движения)*

> *1)* $\vec{N}_{внеш} = \sum_k \left[\vec{r}_k, \vec{G}_k\right] = \vec{0}$ *- **суммарный момент внешних** сил равен **нулю***
>
> $\Rightarrow$
>
> *1)* $$\left[\begin{array}{l} \vec{L}\,' = \sum_k m_k\Big(\overset{\vec{0}}{\overset{//}{\left[\vec{r}_k', \vec{v}_k\right]}} + \left[\vec{r}_k, \vec{v}_k'\right]\Big) = \sum_k\left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right] = \sum_k\left[\vec{r}_k, \vec{G}_k\right] = \vec{N}_{внеш} = \vec{0} \\ T\,' = \sum_k m_k\left(\vec{v}_k', \vec{v}_k\right) = \sum_k m_k\left(\vec{v}_k', \left[\vec{\omega}, \vec{r}_k\right]\right) = \left(\vec{L}\,', \vec{\omega}\right) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \vec{L} = \overrightarrow{const} \\ T = const \end{array}\right.$$

Для выяснения характера свободного вращения твердого тела введем в рассмотрение

3°* *Тензор инерции

Зависимость кинетического момента $\vec{L}$ *от угловой скорости* $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = \sum_k m_k \left[\vec{r}_k, \left[\vec{\omega}, \vec{r}_k \right] \right] = \sum_k m_k \Big(\vec{\omega} \left(\vec{r}_k, \vec{r}_k \right) - \vec{r}_k \left(\vec{\omega}, \vec{r}_k \right) \Big) = ? \bullet \vec{\omega}$$

- ***линейна***. *Тем самым, задается* ***линейный оператор***

$$\mathbf{J} \bullet = \sum_k m_k \left[\vec{r}_k, \left[\bullet , \vec{r}_k \right] \right] = \sum_k m_k \Big(\bullet \left(\vec{r}_k, \vec{r}_k \right) - \vec{r}_k \left(\bullet, \vec{r}_k \right) \Big)$$

получивший название ***тензора инерции***.

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \vec{L} = \mathbf{J}\vec{\omega} \\ \\ T = \frac{1}{2} \left(\mathbf{J}\vec{\omega}, \vec{\omega} \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{L}, \vec{\omega} \right) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \vec{L}' = \vec{N}_{внеш} \\ \\ T' = \left(\vec{L}', \vec{\omega} \right) \end{array} \right.$$

Сравнивая! *с динамическими характеристиками поступательного движения*

$$\left[\begin{array}{l} \vec{P} = \mathbf{M}\vec{v} \\ \\ T = \frac{1}{2} \left(\mathbf{M}\vec{v}, \vec{v} \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{P}, \vec{v} \right) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \vec{P}' = \vec{G}_{внеш} \\ \\ T' = \left(\boldsymbol{P}', \vec{v} \right) \end{array} \right.$$

видно, что тензор инерции $\mathbf{J}$ *при вращении играет роль аналогичную массе тела* $\mathbf{M} = \boldsymbol{m}\mathbf{I}$ *(мера инертности) при поступательном движении. Впитывая в себя геометрию распределения масс, тензор инерции* $\mathbf{J}$ *характеризует инертные свойства тела при его вращении, когда нас интересует не просто* ***масса***, *а и ее* ***удаление*** *от точки вращения.*

Замечание. *Тензор инерции* $\mathbf{J}$ *зависит от выбора неподвижной точки вращения в твердом теле и потому говорят о тензоре инерции твердого тела в данной точке* $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\vec{r})$

4° *Фиксируя некоторый ортонормированный базис* $\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$, *найдем компоненты тензора инерции, на которые удобно смотреть, как на координаты* $\mathbf{J}$ *в выбранном базисе*

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \sum_k m_k \left(\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \right) - \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \left(\omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k \right) \right) =$$

$$= \sum_k m_k \begin{bmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -y_k x_k & z_k^2 + x_k^2 & -y_k z_k \\ -z_k x_k & -z_k y_k & x_k^2 + y_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{J}\vec{\omega}$$

так что

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} = \sum_k m_k \begin{bmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -y_k x_k & z_k^2 + x_k^2 & -y_k z_k \\ -z_k x_k & -z_k y_k & x_k^2 + y_k^2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{J} = \mathbf{J}^*$$

Полагая $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{e}} \cdot \omega$, *построим* ***момент инерции*** *тела относительно оси вращения* $\vec{\boldsymbol{e}}$

$$J_{\vec{e}} = \left(\mathbf{J}\vec{e},\, \vec{e} \right) = \sum_k m_k \left(\left[\vec{e}, \vec{r}_k \right], \left[\vec{e}, \vec{r}_k \right] \right) = \sum_k m_k \left| \left[\vec{e}, \vec{d}_k \right] \right|^2 = \sum_k m_k d_k^2 \quad \Rightarrow \quad T = \tfrac{1}{2} J_{\vec{e}}\, \omega^2$$

где $d_k = \left| \vec{d}_k \right|$ *- расстояние от точки* $\vec{r}_k$ *до оси вращения (стр. 5).*

Момент инерции характеризует распределение масс вокруг выделенной оси и дает представление о том, насколько далеко масса тела удалена от оси вращения

Следовательно, диагональные компоненты J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} *- это* ***моменты инерции*** *тела относительно осей координат* Ox, Oy, Oz.

Внедиагональные компоненты $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, $J_{zx} = J_{xz}$ *называются* ***центробежными моментами*** *тела относительно соответствующей пары осей*

Замечание. *В случае "сплошного" тела* V *с плотностью* $\rho(\vec{r})$ *(поверхности* S, *кривой* L*) каждая точка* $\vec{r}$ *имеет "массу"* $dm = \rho(\vec{r})dV \quad \left(= \rho(\vec{r})dS, \ = \rho(\vec{r})dL \right)$, *так что*

$$\mathbf{J}\,\bullet = \iiint\limits_V \left[\vec{r}, \left[\,\bullet\, , \vec{r} \right] \right] \rho(\vec{r})dV \quad \left(= \iint\limits_S \left[\vec{r}, \left[\,\bullet\, , \vec{r} \right] \right] \rho(\vec{r})dS, \quad = \int\limits_L \left[\vec{r}, \left[\,\bullet\, , \vec{r} \right] \right] \rho(\vec{r})dL \right)$$

В частности,

$$J_{\vec{e}} = \iiint\limits_V d_{\vec{e}}^2(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$J_{xx} = \iiint\limits_V \underbrace{\left(y^2 + z^2 \right)}_{= d_{Ox}^2} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \qquad J_{yy} = \ldots\ , \qquad J_{zz} = \ldots$$

$$J_{xy} = -\iiint\limits_V x\,y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = J_{yx}, \qquad J_{xz} = J_{zx} = \ldots\ , \qquad J_{yz} = J_{zy} = \ldots$$

5° *Оператор инерции* $\mathbf{J}$ – ***симметричный*** *(более того, положительный)*

$$\left(\mathbf{J}\vec{\boldsymbol{\omega}}_1,\ \vec{\boldsymbol{\omega}}_2 \right) = \left(\vec{\boldsymbol{\omega}}_1,\ \mathbf{J}\vec{\boldsymbol{\omega}}_2 \right), \quad \left(\mathbf{J}\vec{\boldsymbol{\omega}},\ \vec{\boldsymbol{\omega}} \right) = 2T > 0$$

так что существует ортонормированный базис из собственных векторов $\left\{ \vec{e}_k \right\}$ $(k = 1,2,3)$

$$\mathbf{J}\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_k = \left(\mathbf{J}\vec{e}_k,\, \vec{e}_k \right) = J_k > 0$$

Направления $\left\{ \vec{e}_k \right\}$ *получили названия* ***главных*** *осей инерции. Соответствующие собственные значения* $\lambda_k = J_k$ *– это моменты инерции относительно главных осей инерции (****главные моменты****).*

6° *С тензором инерции* $\mathbf{J}$ *удобно связать так называемый* ***эллипсоид инерции*** *тела в точке вращения*

$$\left(\mathbf{J}\vec{\boldsymbol{\omega}},\ \vec{\boldsymbol{\omega}} \right) = 1$$

позволяющий геометрически представить ("увидеть" ?!) тензор, и имеющий в системе координат из главных осей $\left\{ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3 \right\}$ *канонический вид*

$$J_1\,\omega_1^2 + J_2\,\omega_2^2 + J_3\,\omega_3^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\omega_1^2}{\frac{1}{\sqrt{J_1}}^2} + \frac{\omega_2^2}{\frac{1}{\sqrt{J_2}}^2} + \frac{\omega_3^2}{\frac{1}{\sqrt{J_3}}^2} = 1$$

Следовательно, главные оси эллипсоида инерции одновременно и главные оси инерции тела, а их длины обратно пропорциональны $\sqrt{J_k}$.

Замечание. *Если тело вытянуто вдоль некоторой оси, то момент инерции относительно этой оси мал (малы расстояния* d_k *от точек до оси), так что эллипсоид инерции тоже вытянут вдоль этой оси. Следовательно, эллипсоид инерции, жестко связанный с твердым телом в данной точке, повторяет некоторые его основные черты. В частности, если имеется проходящая через неподвижную точку* O *ось симметрии, при повороте вокруг которой тело совмещается с собой, то и эллипсоид должен совместиться, что возможно, если это одна из его осей, т.е. главная ось инерции. Более того, поскольку трехосный эллипсоид может совместиться с собой лишь при повороте на угол* π, *то при меньших углах это возможно только в случае эллипсоида вращения*

7° *Если суммарный момент внешних сил* $\vec{\boldsymbol{N}}_{внеш} = \vec{\boldsymbol{0}}$, *например, на тело действует только сила реакции связи* $\vec{\boldsymbol{G}}_{k_0} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, *приложенная к точке вращения* $\vec{\boldsymbol{r}}_{k_0} = \vec{\boldsymbol{0}}$, *удерживая ее в неподвижном состоянии, то кинетический момент и кинетическая энергия сохраняются*

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \mathbf{J}\,\vec{\boldsymbol{\omega}} = \overrightarrow{\boldsymbol{const}}\,, \qquad\qquad T = \tfrac{1}{2}\big(\,\mathbf{J}\,\vec{\boldsymbol{\omega}},\ \vec{\boldsymbol{\omega}}\,\big) = \tfrac{1}{2}\big(\,\vec{\boldsymbol{L}},\ \vec{\boldsymbol{\omega}}\,\big) = const$$

Геометрическое истолкование полученным законам сохранения дал французский ученый XIX века Пуансо.

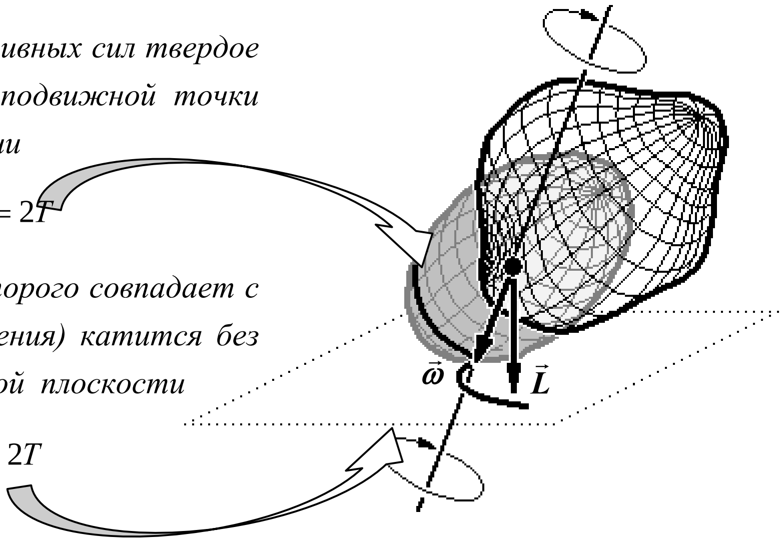
Теорема

В отсутствии внешних активных сил твердое тело вращается вокруг неподвижной точки так, что эллипсоид инерции

$$\big(\,\mathbf{J}\,\vec{\boldsymbol{\omega}},\ \vec{\boldsymbol{\omega}}\,\big) = 2T$$

(геометрический центр которого совпадает с неподвижной точкой вращения) катится без скольжения по неподвижной плоскости

$$\big(\,\vec{\boldsymbol{L}},\ \vec{\boldsymbol{\omega}}\,\big) = 2T$$



Следствие

Стационарное вращение вокруг неподвижной оси $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \overrightarrow{\boldsymbol{const}}$ *возможно только в случае, если это одна из главных осей инерции.*

В частности,

Следствие

Свободное вращение твердого тела вокруг неподвижной оси возможно лишь вокруг одной из центральных главных осей инерции (проходящих через центр масс тела)