ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О РОСТЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. Гольдберг, И. В. Островский

Теоремы, рассматриваемые в этой статье, можно назвать теоремами типа Фрагмена — Линделёфа и теоремами типа Вимана.

В классических исследованиях Фрагмена и Линделёфа изучалась связь между ростом во внутренности и ростом на сторонах некоторого угла функции, голоморфной внутри угла и непрерывной на сторонах. Из теоремы Фрагмена — Линделёфа вытекает, что, если порядок роста внутри угла равен $\rho < \pi\alpha^{-1}$, где α — раствор угла, то порядок роста на сторонах не может быть меньше ρ. Для целой функции порядка $\rho < {}^1/_2$ отсюда следует, что на каждом луче $\arg z = \mathrm{const}$ порядок целой функции необходимо равен ρ. Это обстоятельство, впервые отмеченное А. Виманом [1], было им позднее [2] существенно уточнено:

Пусть $f(z)$ — целая функция. Обозначим $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $\mu(r, f) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$*. Тогда, если порядок $f(z)$ $\rho < 1$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mu(r, f)}{\ln M(r, f)} \geqslant \cos \pi\rho. \tag{0.1}$$

Для случая функции, голоморфной в угле (не уменьшая общности, можно считать его раствор равным π), теорема, в некотором смысле аналогичная указанной теореме Вимана, была получена А. Дингхасом [3]:

Пусть функция $f(z)$ голоморфна при $Im\, z > 0$, непрерывна при $Im\, z \geqslant 0$ и пусть

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \widetilde{M}(r)}{\ln r} < 1 \quad \Big(\widetilde{M}(r) = \max_{\substack{|z|\leqslant r\\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0}} |f(z)|\Big).$$

Положим

$$\lambda(r) = \frac{1}{2}\,(\overset{+}{\ln}|f(r)| + \overset{+}{\ln}|f(-r)|),^{**}$$

$$b(r) = \int_0^\pi \overset{+}{\ln}|f(re^{i\varphi})| \sin\varphi\, d\varphi.$$

Если $\lim\limits_{r\to\infty} b(r) = \infty$, то имеет место соотношение

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\lambda(r)}{b(r)} \geqslant \frac{1-\rho^2}{2}.$$

---

* Те же обозначения сохраним и для случая, когда $f(z)$ мероморфная функция.

** По определению $\overset{+}{\ln} x = \ln x$ при $1 \leqslant x < \infty$ и $\overset{+}{\ln} x = 0$ при $-\infty < x \leqslant 1$. Обычно определяют $\overset{+}{\ln} x$ только для $x > 0$, но нам будет удобнее определить $\overset{+}{\ln} x$ и для $x \leqslant 0$.

В § 1 настоящей статьи мы рассматриваем функции, мероморфные при $Im\, z > 0$ и непрерывные* при $Im\, z \geqslant 0$. Следующий результат типичен для § 1.

Положим

$$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \overset{+}{\ln} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

$$N(r) = \int_0^r n(t)\, d \ln t,$$

где $n(t)$ — число полюсов функции $f(z)$ в полукруге $Im\, z > 0$, $|z| < t$, $\overline{m}(r) = \max\{1,\ m(r)\}$, $\overline{b}(r) = \max\{1,\ b(r)\}$

Если *а*) $\varliminf\limits_{r\to\infty} r^{-1} b(r) = 0$; *б*) существует такое число ρ, $0 \leqslant \rho < 1$, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{\lambda(r) + N(r)}{r^{1+\rho+\varepsilon}}\, dr < \infty, \int_1^{\infty} \frac{\lambda(r) + N(r)}{r^{1+\rho-\varepsilon}}\, dr = \infty;$$

в) $\lim\limits_{r\to\infty} rb(r) = \infty$, то при $\rho > 0$ имеют место соотношения

$$\left(\sec\frac{\pi\rho}{2} - 1\right) \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{m(r)} + \frac{1}{\pi\rho}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\rho}{2} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\lambda(r)}{m(r)} \geqslant 1, \tag{0.2}$$

$$\frac{2\pi\rho^2}{1-\rho^2} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{b(r)} + \frac{2}{1-\rho^2} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\lambda(r)}{b(r)} \geqslant 1. \tag{0.3}$$

При дополнительном требовании $\varlimsup\limits_{r\to\infty} b^{-1}(r) N(r) < \infty$ эти соотношения имеют место и при $\rho = 0$**.

Если дополнительно к *а*) и *б*), потребовать, чтобы $n(r) \not\equiv 0$ и $0 < \rho < 1$, то неравенства (0.2), (0.3) справедливы и без требования *в*). В этом последнем случае, чтобы избежать деления на 0, можно заменить в (0.2) и (0.3) $m(r)$ на $\overline{m}(r)$, $b(r)$ на $\overline{b}(r)$, но, очевидно, это не усиливает результат, так как при $n(r) \not\equiv 0$ $N(r) \to \infty$ и (0.2), (0.3) нетривиальны только при $m(r) \to \infty$ и соответственно $b(r) \to \infty$.

Соотношения (0.2), (0.3) характеризуют связь между ростом функции «в среднем» внутри полуплоскости, ростом её вдоль вещественной оси и расположением её полюсов. При $n(r) \equiv 0$ они несколько усиливают цитированный выше результат Дингхаса.

Метод Дингхаса существенно использует голоморфность функции, поэтому при доказательстве нашей теоремы, сформулированной выше, а также других, более точных теорем из § 1, мы идём другим путём, а именно: используем одну теорему (теорему 1.1), дающую обобщение метода, с помощью которого Д. Пойа [4] (см. также [5], стр. 302) доказывал (0.1).

В § 1 мы получаем также некоторые новые оценки дефектов для функций, мероморфных в конечной плоскости и ограниченных на вещественной оси, в том числе для произведений Бляшке.

---

* Непрерывные в обобщенном смысле, а именно, в любой точке $Im z \geqslant 0$ непрерывна либо сама функция $f(z)$, либо $1/f(z)$.

** При $\rho = 0$ $\dfrac{1}{\pi\rho}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi\rho}{2} = 1/2$. В дальнейшем мы в подобных случаях будем раскрывать неопределенность, не оговаривая этого особо.

Во втором параграфе рассматриваются мероморфные в конечной плоскости функции $f(z)$ нулевого рода. Пусть ρ — порядок $f(z)$, λ — нижний порядок. Мы вводим новую величину $\tilde{\lambda}$, характеризующую определённым образом нижнюю плотность нулей и полюсов $f(z)$. Для $\tilde{\lambda}$ справедливо следующее неравенство:

$$\lambda \leqslant \tilde{\lambda} \leqslant \frac{\lambda}{1-\rho+\lambda} \leqslant \rho \leqslant 1.$$

С помощью $\tilde{\lambda}$ формулируется ряд теорем, из которых отметим следующую.

Если $f(z)$ — мероморфная функция нулевого рода, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\,\mu(r, f)}{T(r, f)} \geqslant \frac{\pi\tilde{\lambda}}{\sin \pi\tilde{\lambda}} [\cos \pi\tilde{\lambda} - 1 + \delta(\infty, f)]\,^* \tag{0.4}$$

и, если $\tilde{\lambda} \leqslant {}^1/_2$ и при $r \to \infty$ $M(r, f) \to \infty$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mu(r, f)}{\ln M(r, f)} + \pi\tilde{\lambda} \sin \pi\tilde{\lambda} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, f)}{\ln M(r, f)} \geqslant \cos \pi\tilde{\lambda}. \tag{0.5}$$

Из (0.4) следует, что, если $\delta(\infty, f) > 1 - \cos \pi\tilde{\lambda}$, то существует последовательность окружностей $|z| = r_k \to \infty$, на которой $f(z)$ равномерно стремится к ∞, в силу чего ∞ является единственным дефектным значением $f(z)$. Это — усиление результата одного из авторов настоящей статьи [6], [7]. Из (0.5) для случая, когда $f(z)$ — целая функция (здесь $0 \leqslant \tilde{\lambda} \leqslant 1$), получается следующее усиление теоремы Вимана (0.1), принадлежащее Б. Чельбергу [8]:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mu(r, f)}{\ln M(r, f)} \geqslant \cos \pi\tilde{\lambda}. \tag{0.6}$$

У. Хейман [9] высказал гипотезу, что в (0.6) можно заменить $\tilde{\lambda}$ на λ и снять требование, чтобы целая функция была нулевого рода, оставив, таким образом, только требование $\lambda < 1$. Нам не удалось выяснить вопрос, можно ли в (0.6), а также в (0.4), (0.5) и др. соотношениях из § 2 заменить $\tilde{\lambda}$ на λ, а также снять условие, чтобы $f(z)$ имела нулевой род. Заметим только, что, как показал один из авторов [10], для некоторых классов мероморфных функций (например, для функций, у которых все нули лежат в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \eta$, все полюсы — в угле $|\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \eta$, $\frac{\pi}{2} > \eta > 0$) из $\lambda < 1$ уже следует наличие рода нуль.

Результаты § 2 получаются с помощью метода Данжуа [11], усовершенствованного Валироном [12] и Чельбергом [8] и несколько обобщённого и усиленного нами. Этот метод более прост, чем метод Пойа, на котором основаны результаты § 1, и часто даёт более глубокие результаты, однако он в общем случае не применим к изучению функций, мероморфных в полуплоскости.

---

* $\delta(a, f)$ — неванлинновский дефект $f(z)$ в точке a, по определению, $\delta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, a)}{T(r, f)}$. В нашей работе будет использоваться также валироновский дефект $f(z)$ в точке a, $\Delta(a, f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{m(r, a)}{T(r, f)}$.

Заметим, что всюду в работе, записывая $\sum\limits_1^\infty$, $\prod\limits_1^\infty$, мы не исключаем возможности наличия конечного числа слагаемых или множителей, или их полного отсутствия. Пусть $F(r)$ — некоторая неотрицательная функция на $r \in (0, \infty)$, интегрируемая в собственном смысле на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$. Если существует такое конечное число σ, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_1^\infty F(r)\, r^{-1-\sigma-\varepsilon}\, dr < \infty, \quad \int\limits_1^\infty F(r)\, r^{-1-\sigma+\varepsilon}\, dr = \infty,$$

то условимся называть σ предельным показателем сходимости функции $F(r)$. Если $F(r)$ — монотонно возрастающая функция, то ее порядок равен предельному показателю сходимости ([13], стр. 221), в общем случае этого утверждать нельзя.

§ 1

Пусть функция $f(z)$ мероморфна при $Im\, z > 0$ и непрерывна при $Im\, z \geqslant 0$; обозначим через $r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ ее полюсы, лежащие внутри $Im\, z > 0$. Помимо указанных во введении величин $\lambda(r)$, $m(r)$, $b(r)$, $\overline{m}(r)$, $\overline{b}(r)$, $N(r)$, характеризующих поведение $f(z)$, введем ещё величину

$$C(r, \alpha) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\frac{\varphi_\nu \alpha}{2} \sin\frac{(\pi-\varphi_\nu)\alpha}{2} \cdot \overset{+}{\ln}\frac{r}{r_\nu}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

При $\alpha = 1$

$$C(r, 1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\varphi_\nu \cdot \overset{+}{\ln}\frac{r}{r_\nu}.$$

Очевидно, что величина $C(r, \alpha)$ по сравнению с

$$N(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overset{+}{\ln}\frac{r}{r_\nu}$$

более сложным образом характеризует распределение полюсов $f(z)$ учитывая не только их модули, но и аргументы. Легко видеть, что

$$C(r, \alpha) \leqslant 2\sin^2\frac{\pi\alpha}{4} N(r) \quad (0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant r < \infty). \tag{1.1}$$

Так как при $0 < \lambda < \mu \leqslant 1$ функция $\dfrac{\sin\varphi\lambda}{\sin\varphi\mu}$ возрастает по φ в интервале $(0, \pi)$, то, как легко видеть, имеет место соотношение

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \leqslant \frac{C(r, \lambda)}{C(r, \mu)} \leqslant \left(\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}\right)^2. \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что при любых $0 < \alpha \leqslant 1$ $C(r, \alpha)$ имеют одинаковый порядок и тип. Из (1.2) вытекает, что интегралы

$$\int\limits_0^\infty \frac{C(r, 1)}{r^{\rho+1}}\, dr \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty \frac{C(r, \alpha)}{r^{\rho+1}}\, dr \quad (\rho > 0,\ 0 < \alpha < 1)$$

сходятся или расходятся одновременно, т. е. все $C(r, \alpha)$ имеют одинаковый предельный показатель сходимости. Отметим, что сходимость (расходимость) этих интегралов эквивалентна сходимости (расходимости) ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \varphi_\nu}{r_\nu^\rho}.$$

Функции $C(r, \alpha)$ будут постоянно фигурировать в основных теоремах этого параграфа. Но прежде чем перейти к этим теоремам, докажем одну, которая явится основой большинства доказательств в § 1.

Теорема 1.1. *Пусть комплекснозначные функции $K_1(r, s)$ и $K_2(r, s)$ от действительного аргумента r и комплексного аргумента $s = \sigma + i\tau$ определены и непрерывны как функции двух переменных при $0 \leq r < +\infty$, $|s| < s_0$ и удовлетворяют следующим условиям:*

1°. При любом фиксированном r $K_i(r, s)$ голоморфны по s в круге $|s| < s_0$, причем частные производные от $K^i(r, s)$ по s любого порядка непрерывны при $r \in [0, \infty)$, $|s| < s_0$;

2°. $K_i(r, \sigma) \geq 0$ при $0 \leq r < +\infty$, $-s_0 < \sigma < +s_0$;

3°. Для всякого числа ε, $0 < \varepsilon < s_0$ и δ, $0 < \delta < 1$ можно найти такое $\eta > 0$, что при вещественных h, $|h| < \eta$, имеют место неравенства

$$(1 - \delta) K_i(r, \sigma) \leq K_i(r, \sigma + h) \leq (1 + \delta) K_i(r, \sigma),$$

где $-\varepsilon < \sigma < \varepsilon$, $0 \leq r < \infty$, $i = 1,2$.

4°. Для всякого ε, $0 < \varepsilon < s_0$, существует постоянная $C = C(\varepsilon)$ такая, что при $|s| \leq \varepsilon$, $0 \leq r < \infty$ имеют место неравенства

$$|K_i(r, s)| \leq C K_i(r, \sigma) \quad (i = 1,2).$$

5°. Для всякого σ, $-s_0 < \sigma < +s_0$, функция $K_1(r, \sigma) + K_2(r, \sigma)$ имеет предельный показатель сходимости, равный 0;

6°. При $0 < \sigma < s_0$ выполняется равенство

$$\int_0^\infty \frac{K_1(r, \sigma)}{r^{1+\sigma}}\, dr = \int_0^\infty \frac{K_2(r, \sigma)}{r^{1+\sigma}}\, dr. \tag{1.3}$$

Тогда

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{K_2(r, 0)}{K_1(r, 0)} \geq 1 \geq \varliminf_{r \to \infty} \frac{K_2(r, 0)}{K_1(r, 0)}. \tag{1.4}$$

(Замечание: В силу 3° в условии 5° можно требовать, чтобы функция $K_1(r, \sigma) + K_2(r, \sigma)$ имела предельный показатель сходимости, равный 0, хотя бы при одном σ, $-s_0 < \sigma < s_0$, так как отсюда уже следует, что это имеет место при всех σ, $-s_0 < \sigma < s_0$).

Доказательство. Так как функции $K_1(r, s)$ и $K_2(r, s)$ совершенно равноправны, ясно, что достаточно доказать левую половину неравенства (1.4).

Применяя теорему Морера и с помощью условий 1°, 4°, 5° убедившись в возможности перестановки порядка интегрирования в

$$\oint_\Gamma ds \int_0^\infty \frac{K_i(r, s)}{r^{1+s}}\, dr,$$

где Γ — замкнутый спрямляемый контур в полукруге S: $\{Re\, s > 0, |s| < s_0\}$, получаем, что интегралы

$$\int_0^\infty \frac{K_i(r, s)}{r^{1+s}} dr, \ i = 1,2$$

являются голоморфными функциями от s в полукруге S. Следовательно, в силу 6° всюду в $s \in S$ выполняется

$$\int_0^\infty \frac{K_1(r, s)}{r^{1+s}} dr = \int_0^\infty \frac{K_2(r, s)}{r^{1+s}} dr. \tag{1.5}$$

Рассмотрим функцию

$$F_a(s) = -\int_0^a \frac{K_1(r, s) - K_2(r, s)}{r^{1+s}} dr, \ a > 0,$$

которая, как легко видеть, голоморфна в круге $|s| < s_0$. Из (1.5) вытекает, что в правой половине этого круга — полукруге S — для $F_a(s)$ справедливо представление

$$F_a(s) = \int_a^\infty \frac{K_1(r, s) - K_2(r, s)}{r^{1+s}} dr. \tag{1.6}$$

Предположим, что утверждение нашей теоремы неверно. Тогда для некоторого γ, $0 < \gamma < {}^1/_{16}$ и всех r, больших некоторого $b \geqslant 1$, справедливо соотношение

$$K_1(r, 0) > (1 + 8\gamma) K_2(r, 0). \tag{1.7}$$

Покажем, что это ведёт к противоречию.

Представим функцию $F_b(s)$ в $|s| < s_0$ в виде

$$F_b(s) = -\int_0^b \frac{\varphi_1(r, s) + \varphi_2(r, s)}{r^{1+s}} dr =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\beta} [\varphi_1(e^t, s) + \varphi_2(e^t, s)] e^{-st} dt,$$

где $\varphi_1(r, s) = K_1(r, s) - (1 + 4\gamma) K_2(r, 0)$, $\varphi_2(r, s) = (1 + 4\gamma) K_2(r, 0) - K_2(r, s)$, $\beta = \ln b$.

Из (1.7) и условия 3° следует, что существует настолько малое η, $0 < \eta < s_0$, что при $-\eta \leqslant \sigma \leqslant \eta$ будут выполняться неравенства

$$\varphi_1(r, \sigma) \geqslant 2\gamma K_1(r, \sigma); \ \varphi_2(r, \sigma) \geqslant 2\gamma K_2(r, \sigma). \tag{1.8}$$

Идея дальнейших рассуждений заключается в следующем. Возьмём σ, $0 \leqslant \sigma < \eta$, и выберем некоторое h, $0 < \sigma < h < \eta$. Если бы в обеих частях соотношения [ср. (1.6)]

$$F_b(\sigma) = \int^\infty \frac{\varphi_1(r, \sigma) + \varphi_2(r, \sigma)}{r^{1+\sigma}} dr \tag{1.9}$$

можно было бы заменить σ на $\sigma - h$, то мы сразу бы получили нужное противоречие, так как $F_b(\sigma - h)$ — конечная величина в силу голоморфности $F_b(s)$ в круге $|s| < \eta$, а в силу (1.8) и условия 5°

$$\int_b^\infty \frac{\varphi_1(r, \sigma - h) + \varphi_2(r, \sigma - h)}{r^{1+\sigma-h}} dr \geq 2\gamma \int_b^\infty \frac{K_1(r, \sigma - h) + K_2(r, \sigma - h)}{r^{1+\sigma-h}} dr = \infty.$$

Однако мы не имеем права делать в (1.9) такой «сдвиг аргумента», так как мы можем утверждать справедливость представления (1.9) только для $0 < \sigma < s_0$. Можно было бы применить к обеим сторонам (1.9) дифференциальный оператор

$$e^{-hD} = 1 - \frac{D}{1!} h + \frac{D^2}{2!} h^2 - \frac{D^3}{3!} h^3 + \ldots, \ D = \frac{d}{d\sigma},$$

который в применении к функциям $\psi(\xi)$, голоморфным в круге $|\xi - \sigma| \leqslant h$, равносилен оператору сдвига аргумента влево на h, так как

$$e^{-hD} \psi(\sigma) = 1 + \frac{\psi'(\sigma)}{1!}(-h) + \frac{\psi''(\sigma)}{2!}(-h)^2 + \ldots = \psi(\sigma - h).$$

Однако технические трудности, возникающие при обосновании возможности применения оператора e^{-hD} в правой части (1.9) под знаком интеграла, заставляют нас выбрать обходный путь и применить к обеим сторонам (1.9) операторы $\left(1 - \frac{hD}{m}\right)^m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ («стремящиеся» при $m \to \infty$ к e^{-hD}), а затем совершить предельный переход при $m \to \infty$.

Предварительно докажем следующую простую лемму.

Лемма. *Для любых* $\varepsilon \in (0, s_0)$ *и* $q \in \left(0, \frac{s_0 - \varepsilon}{2}\right)$ *при* $|s| < \varepsilon$ *имеет место оценка*

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial s^m} K_i(r, s)\right| \leqslant L \frac{m!}{q^m} K_i(r, \sigma),$$

где $i = 1, 2;$ $m = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leqslant r < \infty;$ *постоянная* L *зависит только от* ε.

Доказательство. По формуле Коши имеем

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m} K_i(r, s) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_C \frac{K_i(r, \xi)}{(\xi - s)^{m+1}} d\xi,$$

где C — окружность с центром в точке $s = \sigma + i\tau$ и радиусом q. Отсюда следует, что

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial s^m} K_i(r, s)\right| \leqslant \frac{m!}{q^m} \max_{\xi \in C} |K_i(r, \xi)|.$$

Для оценки правой части этого неравенства воспользуемся условиями 3°, 4°. Тогда получим

$$\max_{\xi \in C} |K_i(r, \xi)| \leqslant L' \max_{\sigma - q \leqslant \xi \leqslant \sigma + q} K_i(r, \xi) \leqslant L'' K_i(r, \sigma),$$

где постоянные L' и L'' зависят только от ε. Лемма доказана.

Применим теперь оператор $\left(1 - \frac{hD}{m}\right)^m$, $\left(D = \frac{d}{d\sigma}, 0 < h < \min\left(\eta, \frac{s_0 - \eta}{2}\right)\right.$, $m = 1, 2, \ldots$) к левой стороне соотношения $(0 < \sigma < s_0)$

$$F_b(\sigma) = \int_\beta^\infty [\varphi_1(e^t, \sigma) + \varphi_2(e^t, \sigma)] e^{-\sigma t} dt. \tag{1.10}$$

В силу голоморфности функции $F_b(s)$ в круге $|s| < s_0$ $(\eta < s_0)$ легко получим оценку $(0 < \sigma \leqslant \eta)$

$$\left|\left(1-\frac{hD}{m}\right)^m F_b(\sigma)\right| = \left|\sum_{k=0}^{m} C_m^k\left(\frac{-h}{m}\right)^k F_b^{(k)}(\sigma)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}\,|F_b^{(k)}(\sigma)| \leqslant M < \infty. \tag{1.11}$$

В силу леммы наш оператор можно применять под знаком интеграла в правой стороне (1.10). Мы имеем

$$\left(1-\frac{hD}{m}\right)^m \{[\varphi_1(e^t, \sigma)+\varphi_2(e^t, \sigma)]\,e^{-\sigma t}\} =$$

$$= e^{-\sigma t}\left(1+\frac{ht-hD}{m}\right)^m [\varphi_1(e^t, \sigma)+\varphi_2(e^t, \sigma)] =$$

$$= e^{-\sigma t}\sum_{k=0}^{m} C_m^k\left(1+\frac{ht}{m}\right)^{m-k}\left(\frac{-h}{m}\right)^k \frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}[\varphi_1(e^t, \sigma)+\varphi_2(e^t, \sigma)].$$

Отсюда получаем $(\varphi_i = \varphi_i(e^t, \sigma),\ i = 1,\ 2;\ 0 < \sigma \leqslant \eta)$

$$\left|\left(1-\frac{hD}{m}\right)^m \{[\varphi_1+\varphi_2]\,e^{-\sigma t}\}\right| \geqslant e^{-\sigma t}\left(1+\frac{ht}{m}\right)^m(\varphi_1+\varphi_2) -$$

$$- e^{-\sigma t}\left(1+\frac{ht}{m}\right)^m \sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^k}{k!}\left|\frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}(\varphi_1+\varphi_2)\right| \geqslant \tag{1.12}$$

$$\geqslant e^{-\sigma t}\left(1+\frac{ht}{m}\right)^m\left[\varphi_1+\varphi_2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^k}{k!}\left(\left|\frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}K_1(e^t, \sigma)\right|+\left|\frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}K_2(e^t, \sigma)\right|\right)\right].$$

С помощью леммы, где положено $\varepsilon = \eta$, $q = \frac{s_0-\eta}{2}$, получим оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^k}{k!}\left(\left|\frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}K_1(e^t, \sigma)\right|+\left|\frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}K_2(e^t, \sigma)\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^k}{k!}\cdot L\cdot\frac{k!}{q^k}\right)[K_1(e^t, \sigma)+K_2(e^t, \sigma)] = \tag{1.13}$$

$$= L\,\frac{h}{q-h}\,(K_1(e^t, \sigma)+K_2(e^t, \sigma)).$$

Из неравенств (1.12) и (1.13) следует, что $h > 0$ можно выбрать настолько малым, что при $0 < \sigma < h$ будет иметь место соотношение

$$\left|\left(1-\frac{hD}{m}\right)^m \{(\varphi_1+\varphi_2)\,e^{-\sigma t}\}\right| \geqslant$$

$$\geqslant e^{-\sigma t}\left(1+\frac{ht}{m}\right)^m \gamma\,(K_1(e^t, \sigma)+K_2(e^t, \sigma)). \tag{1.14}$$

Очевидно, так выбранное h (мы фиксируем его до конца доказательства) не зависит от t, m и $\sigma \in (0, \eta)$. Из (1.10), (1.11), (1.14) следует неравенство

$$M \geqslant \gamma\int_{R}^{\infty}[K_1(e^t, \sigma)+K_2(e^t, \sigma)]\left(1+\frac{ht}{m}\right)^m e^{-\sigma t}\,dt, \tag{1.15}$$

где M и γ не зависят от $m = 1, 2, \ldots$ и $\sigma \in (0, \eta)$. Пусть теперь ω — произвольное число $\beta < \omega < \infty$. Тогда из (1.15) и условия 2° следует, что

$$\int_{\beta}^{\omega} [K_1(e^t, \sigma) + K_2(e^t, \sigma)] \left(1 + \frac{ht}{m}\right)^m e^{-\sigma t}\, dt \leqslant M/\gamma.$$

Устремляя к ∞ вначале m, а затем ω, получим

$$\int_{\beta}^{\infty} [K_1(e^t, \sigma) + K_2(e^t, \sigma)]\, e^{-(\sigma - h)t}\, dt =$$

$$= \int_{b}^{\infty} \frac{K_1(r, \sigma) + K_2(r, \sigma)}{r^{1+\sigma-h}}\, dr \leqslant \frac{M}{\gamma}, \tag{1.16}$$

т. е. интеграл в (1.16) сходится при всех σ, $0 < \sigma < \eta$. Однако при $0 < \sigma < h$ этот интеграл должен расходиться в силу условия 5°. Полученное противоречие доказывает теорему.

Перейдем теперь к приложениям теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна при $\operatorname{Im} z > 0$, непрерывна при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\varliminf\limits_{r \to \infty} r^{-1} b(r) = 0$;

б) *функция $\lambda(r) + C(r, 1)$ имеет предельный показатель сходимости ρ, $0 \leqslant \rho < 1$;*

в) $\lim\limits_{r \to \infty} r b(r) = \infty$.

Тогда при $\rho > 0$ имеют место соотношения

$$\varlimsup_{r \to \infty} m^{-1}(r) \left\{ \sec \frac{\pi\rho}{2} C(r, \rho) + \frac{1}{\pi\rho} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{2} \lambda(r) \right\} \geqslant 1, \tag{1.17}$$

$$\varlimsup_{r \to \infty} b^{-1}(r) \left\{ \frac{2\pi\rho^2}{1 - \rho^2} C(r, 1) + \frac{2}{1 - \rho^2} \lambda(r) \right\} \geqslant 1. \tag{1.18}$$

При дополнительном требовании $\varlimsup\limits_{r \to \infty} \dfrac{C(r, 1)}{b(r)} < \infty$ эти соотношения имеют место и при $\rho = 0$.

Если дополнительно к а) *и* б) *потребовать, чтобы $f(z)$ имела по крайней мере один полюс в $\operatorname{Im} z > 0$ и $0 < \rho < 1$, то неравенства* (1.17) *и* (1.18), *в которых вместо* $m(r)$ и $b(r)$ *стоят* $\overline{m}(r)$ *и* $\overline{b}(r)$, *справедливы и без требования* в).

Заметим, что неравенства (0.2), (0.3), являются непосредственными следствиями (1.17) и (1.18) в силу (1.1).

Теорема 1.2 легко может быть получена из следующего утверждения.

Теорема 1.3. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $\operatorname{Im} z > 0$, непрерывна при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и удовлетворяет условиям* а), б) *из теоремы* 1.2, *то при любом $\varepsilon > 0$ найдутся две последовательности $r_k \to \infty$ и $\rho_k \to \infty$ такие, что*

$$m(r_k) \leqslant (1 + \varepsilon) \left(\sec \frac{\pi\rho}{2} C(r_k, \rho) + \frac{1}{\pi\rho} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{2} \lambda(r_k) \right) + \\ + \varepsilon\vartheta(\rho) C(r_k, 1) + O\left(\frac{1}{r_k}\right), \tag{1.19}$$

$$b(\rho_k) \leqslant (1 + \varepsilon) \left(\frac{2\pi\rho^2}{1 - \rho^2} C(\rho_k, 1) + \frac{2}{1 - \rho^2} \lambda(\rho_k) \right) + \\ + \varepsilon\vartheta(\rho) C(\rho_k, 1) + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right), \tag{1.20}$$

где $\vartheta(\ ) = 1$ при $\rho = 0$ и $\vartheta(\rho) = 0$ при $\rho \neq 0$.

Чтобы получить отсюда теорему 1.2, заметим, что $m(r) \geqslant (2\pi)^{-1} b(r)$, поэтому соотношение $\lim_{r\to\infty} rb(r) = \infty$ влечет соотношение $\lim_{r\to\infty} rm(r) = \infty$, а соотношение $\overline{\lim_{r\to\infty}}\, b^{-1}(r)\, C(r, 1) < \infty$ — соотношение $\overline{\lim_{r\to\infty}}\, m^{-1}(r)\, C(r, 1) < \infty$.

Теперь достаточно разделить (1.19) на $m(r_k)$, (1.20) — на $b(\rho_k)$, перейти к пределу при $r_k \to \infty$ и $\rho_k \to \infty$, а затем устремить ε к нулю. Если $f(z)$ имеет в $Imz > 0$ хотя бы один полюс, то $C(r, \rho) \to \infty$ при $r \to \infty$ $(\rho > 0)$, и поэтому из (1.19), (1.20) следует, что для всех достаточно больших r_k и ρ_k

$$m(r_k) < (1 + 2\varepsilon)\left(\sec\frac{\pi\rho}{2} C(r_k, \rho) + \frac{1}{\pi\rho}\operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{2}\lambda(r_k)\right),$$

$$b(\rho_k) < (1 + 2\varepsilon)\left(\frac{2\pi\rho^2}{1-\rho^2} C(\rho_k, 1) + \frac{2}{1-\rho^2}\lambda(\rho_k)\right).$$

Кроме того, так как правые части этих равенств стремятся к ∞, то слева для всех достаточно больших r_k и ρ_k можно заменить $m(r_k)$ и $b(\rho_k)$ соответственно на $\overline{m}(r_k)$ и $\overline{b}(\rho_k)$, после чего последнее утверждение теоремы 1.2 получается без труда.

Из теоремы 1.3 можно получить и другие варианты теоремы 1.2. Например, очевидно, что условие в) можно заменить условием г) $\lambda(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. При доказательстве справедливости (1.17) можно в) заменить на в′) $rm(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ и т. д.

Перейдём теперь к доказательству теоремы 1.3.

В силу условий а) и б) и известной теоремы Р. Неванлинна ([14], стр. 31) * имеем соотношение

$$\overset{+}{\ln}|f(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\sin\varphi\,\overset{+}{\ln}|f(t)|}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi}\,dt + \sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\left|\frac{re^{i\varphi}-r_\nu e^{-i\varphi_\nu}}{re^{i\varphi}-r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\sin\varphi\, u(t)}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi}\,dt +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\left|\frac{re^{i\varphi}-r_\nu e^{-i\varphi_\nu}}{re^{i\varphi}-r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right| + O\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= I(r,\varphi) + \ln|B(re^{i\varphi})| + O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{1.21}$$

---

* Эту теорему можно формулировать так. Если функция $f(z)$ мероморфна при $Imz > 0$, непрерывна при $Imz \geqslant 0$ и, кроме того,

α) $\underline{\lim}_{r\to\infty}\, r^{-1} b(r) < \infty$,

β) $\int_1^\infty [\lambda(r) + C(r, 1)]\, r^{-2}\, dr < \infty$,

то существует предел $\eta = \lim_{r\to\infty} r^{-1} b(r)$ и имеет место представление

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r\sin\varphi\ln|f(t)|}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi}\,dt + \frac{2}{\pi}\eta r\sin\varphi +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\left|\frac{re^{i\varphi}-r_\nu e^{-i\varphi_\nu}}{re^{i\varphi}-r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right| - \sum_{\mu=1}^{\infty}\ln\left|\frac{re^{i\varphi}-\rho_\mu e^{-i\psi_\mu}}{re^{i\varphi}-\rho_\mu e^{i\psi_\mu}}\right|,$$

где $r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ — полюсы $f(z)$, $\rho_\mu e^{i\psi_\mu}$ — нули $f(z)$.

здесь $r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ — полюсы $f(z)$, и $u(t)=0$ при $|t|<1$, $u(t)=\overset{+}{\ln}|f(t)|$ при $|t|\geqslant 1$. Проинтегрируем обе стороны (1.21) по φ в пределах от 0 до π, тогда, обозначая

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi I(r,\varphi)\,d\varphi = m(r,I),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \ln|B(re^{i\varphi})|\,d\varphi = m(r,B),$$

$$\chi(r) = m(r,I) + m(r,B),$$

получим

$$m(r) \leqslant \chi(r) + O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{1.22}$$

Введя вспомогательную функцию

$$\lambda^*(t) = \frac{1}{2}[u(t)+u(-t)] = \begin{cases} 0, & |t|<1 \\ \lambda(t), & |t|\geqslant 1, \end{cases}$$

получим

$$m(r,I) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{r\sin\varphi\, u(t)}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi}\,d\varphi dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{r\sin\varphi\, u(-t)}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi}\,d\varphi dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{r\sin\varphi\lambda^*(t)}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi}\,d\varphi dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\infty \lambda^*(t)\, r\sin\varphi\left\{\frac{1}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2+t^2+2rt\cos\varphi}\right\} d\varphi dt. \tag{1.23}$$

Используя равенства (их нетрудно получить с помощью теории вычетов, см. также [15], стр. 158, № 3.158)

$$\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r^\xi(r^2+t^2-2rt\cos\varphi)} = \frac{\pi\sin(\pi-\varphi)\xi}{t^{\xi+1}\sin\pi\xi\cdot\sin\varphi},$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r^\xi(r^2+t^2+2rt\cos\varphi)} = \frac{\pi\sin\varphi\xi}{t^{\xi+1}\sin\pi\xi\cdot\sin\varphi}$$

$(0<\varphi<\pi,\ 0<\xi<1)$, легко получим, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{m(r,I)}{r^{1+\xi}}\,dr = \frac{1}{\pi\xi}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda^*(r)}{r^{1+\xi}}\,dr. \tag{1.24}$$

С помощью контурного интегрирования можно убедиться в справедливости равенства *

$$\int_0^\infty \ln\left|\frac{re^{i\varphi}-r_\nu e^{-i\varphi_\nu}}{re^{i\varphi}-r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right|\frac{dr}{r^{1+\xi}}=\begin{cases}\dfrac{2\pi\sin(\pi-\varphi_\nu)\,\xi\cdot\sin\varphi\xi}{r_\nu^\xi\cdot\xi\cdot\sin\pi\xi} & (0<\varphi\leqslant\varphi_\nu<\pi)\\[2mm] \dfrac{2\pi\sin(\pi-\varphi)\,\xi\cdot\sin\varphi_\nu\xi}{r_\nu^\xi\cdot\xi\cdot\sin\pi\xi} & (0<\varphi_\nu\leqslant\varphi<\pi).\end{cases} \tag{1.25}$$

Интегрируя обе части этого соотношения по φ от 0 до π и замечая, что

$$\frac{1}{r_\nu^\xi\cdot\xi^2}=\int_0^\infty \overset{+}{\ln}\frac{r}{r_\nu}\frac{dr}{r^{1+\xi}},$$

получим

$$\int_0^\infty\int_0^\pi \ln\left|\frac{re^{i\varphi}-r_\nu e^{-i\varphi_\nu}}{re^{i\varphi}-r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right|\frac{dr\,d\varphi}{r^{1+\xi}}= \tag{1.26'}$$

$$=\frac{2\pi}{\cos\frac{\pi\xi}{2}}\int_0^\infty\left\{2\sin\frac{\varphi_\nu\xi}{2}\sin\frac{(\pi-\varphi_\nu)\,\xi}{2}\overset{+}{\ln}\frac{r}{r_\nu}\right\}\frac{dr}{r^{1+\xi}}.$$

Выбирая теперь ξ так, что $\rho<\xi<1$, и суммируя по $\nu=1, 2, 3, \ldots$, приходим к равенству

$$\int_0^\infty\frac{m(r, B)}{r^{1+\xi}}\,dr=\frac{1}{\cos\frac{\pi\xi}{2}}\int_0^\infty\frac{C(r, \xi)}{r^{1+\xi}}\,dr \quad (\rho<\xi<1). \tag{1.26}$$

Из (1.24) и (1.26) следует, что

$$\int_0^\infty\frac{\chi(r)}{r^{1+\xi}}\,dr=\int_0^\infty\left[\sec\frac{\pi\xi}{2}C(r, \xi)+\frac{1}{\pi\xi}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{2}\lambda^*(r)\right]\frac{dr}{r^{1+\xi}},$$

откуда, прибавляя к обеим частям $\int_0^\infty \vartheta(\rho)\,C(r, 1)\frac{dr}{r^{1+\xi}}$, получим

$$\int_0^\infty\frac{\chi(r)+\vartheta(\rho)\,C(r, 1)}{r^{1+\xi}}\,dr=$$

$$=\int_0^\infty\left[\sec\frac{\pi\xi}{2}C(r, \xi)+\frac{1}{\pi\xi}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{2}\lambda^*(r)+\vartheta(\rho)\,C(r, 1)\right]\frac{dr}{r^{1+\xi}}. \tag{1.27}$$

Обозначим теперь

$$\psi(r)=\int_0^\pi I(r, \varphi)\sin\varphi\,d\varphi+\int_0^\pi\ln|B(re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi.$$

---

* Полезно предварительно записать

$$\int_0^\infty\ln\left|\frac{re^{i\varphi}-r_\nu e^{-i\varphi_\nu}}{re^{i\varphi}-r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right|\frac{dr}{r^{1+\xi}}=Re\int_0^\infty\ln\left(\frac{ze^{i\varphi}-r_\nu e^{-i\varphi_\nu}}{ze^{i\varphi}-r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right)\frac{dz}{z^{1+\xi}},\quad Imz=0,$$

затем последний интеграл взять по частям и только после этого применять теорию вычетов.

Умножив обе стороны (1.21) и (1.25) на $\sin\varphi$ и проинтегрировав по φ от 0 до π, аналогично предыдущему, получим

$$b(r) \leqslant \psi(r) + O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{1.28}$$

$$\int_0^\infty \frac{\psi(r) + \vartheta(\rho) C(r, 1)}{r^{1+\xi}} dr =$$

$$= \int_0^\infty \left\{\frac{2\pi\xi^2}{1-\xi^2} C(r, 1) + \frac{2}{1-\xi^2} \lambda^*(r) + \vartheta(\rho) C(r, 1)\right\} \frac{dr}{r^{1+\xi}}. \tag{1.29}$$

Теперь применим теорему 1.1. Положим

$$K_1(r, s) = r^{-\rho}\{\chi(r) + \vartheta(\rho) C(r, 1)\},$$

$$K_2(r, s) = r^{-\rho}\left\{\sec\frac{\pi(s+\rho)}{2} C(r, s+\rho) + \frac{1}{\pi(s+\rho)} \operatorname{tg}\frac{\pi(s+\rho)}{2} \lambda^*(r) + \vartheta(\rho) C(r, 1)\right\}$$

Очевидно, $K_1(r, s)$ удовлетворяет условиям 1°—4° теоремы 1.1. С помощью (1.2) нетрудно проверить, что $K_2(r, s)$ также удовлетворяет* условиям 1°—4°. В силу условия б) теоремы 1.2 и (1.27)** удовлетворяются условия 5°, 6° теоремы 1.1. Применение левого неравенства в (1.4) дает нам соотношение

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\sec\frac{\pi\rho}{2} C(r, \rho) + \frac{1}{\pi\rho} \operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{2} \lambda^*(r) + \vartheta(\rho) C(r, 1)}{\chi(r) + \vartheta(\rho) C(r, 1)} \geqslant 1,$$

откуда в силу (1.22) следует (1.19).

Аналогично доказывается (1.20). Мы полагаем

$$K_1(r, s) = r^{-\rho}\{\psi(r) + \vartheta(\rho) C(r, 1)\},$$

$$K_2(r, s) = r^{-\rho}\left\{\frac{2\pi(s+\rho)^2}{1-(s+\rho)^2} C(r, 1) + \frac{2}{1-(s+\rho)^2} \lambda^*(r) + \vartheta(\rho) C(r, 1)\right\},$$

проверяем, используя условие б), теоремы 1.2 и (1.29), выполнение условий теоремы 1.1 и затем с помощью левой части неравенства (1.4) и неравенства (1.28) получаем (1.20).

Теорема 1.3 и, следовательно, теорема 1.2 доказаны.

Пусть теперь $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ — функция, мероморфная во всей конечной плоскости и такая, что

$$\varliminf_{r\to\infty} r^{-1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln} |f(re^{i\varphi})| \, |\sin\varphi| \, d\varphi = 0. \tag{1.30}$$

Пусть $r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ — полюсы функции $f(z)$, $0 < r_\nu < \infty$, $-\pi < \varphi_\nu \leqslant \pi$. Обозначим

$$\tilde{C}(r, \alpha) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\frac{|\varphi_\nu|\alpha}{2} \cdot \sin\frac{(\pi - |\varphi_\nu|)\alpha}{2} \overset{+}{\ln}\frac{r}{r_\nu}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1$$

* Необходимость введения члена $\vartheta(\rho) C(r, 1)$ диктуется как раз тем обстоятельством, что функция $r^{-\rho}\left\{\sec\frac{\pi(s+\rho)}{2} C(r, s+\rho) + \frac{1}{\pi(s+\rho)} \operatorname{tg}\frac{\pi(s+\rho)}{2} \lambda^*(r)\right\}$ при $\rho=0$, вообще говоря, в точке $s=0$ не удовлетворяет условию 3° теоремы 1.1.

** В (1.27) надо сделать подстановку $\xi = \sigma + \rho$, $0 < \sigma < 1 - \rho = s_0$.

и предположим, что предельный показатель сходимости функции $\lambda(r)+\tilde{C}(r,1)$ равен σ, $0\leqslant\sigma<1$. Сделанные нами предположения дают возможность записать для $f(z)$ соотношения (1.22), (1.27) и (1.28), (1.29) отдельно для верхней и нижней полуплоскостей. Складывая затем каждое соотношение для верхней полуплоскости с аналогичным соотношением для нижней полуплоскости, будем иметь

$$m(r,f)\leqslant\chi(r)+\chi^{-}(r)+O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{1.22'}$$

$$\int_0^\infty\frac{\chi(r)+\chi^{-}(r)+\vartheta(\sigma)\tilde{C}(r,1)}{r^{1+\xi}}\,dr=$$

$$=\int_0^\infty\left[\sec\frac{\pi\xi}{2}\tilde{C}(r,\xi)+\frac{2}{\pi\xi}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{2}\lambda^*(r)+\vartheta(\sigma)\tilde{C}(r,1)\right]\frac{dr}{r^{1+\xi}}$$

$$b(r,f)\leqslant\psi(r)+\psi^{-}(r)+O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{1.28'}$$

$$\int_0^\infty\frac{\psi(r)+\psi^{-}(r)+\vartheta(\sigma)\tilde{C}(r,1)}{r^{1+\xi}}\,dr=$$

$$=\int_0^\infty\left[\frac{2\pi\xi^2}{1-\xi^2}\tilde{C}(r,1)+\frac{4}{1-\xi^2}\lambda^*(r)+\vartheta(\sigma)\tilde{C}(r,1)\right]\frac{dr}{r^{1+\xi}},$$

$$(\sigma<\xi<1),$$

где приняты обозначения

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\ln}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

$$b(r,f)=\int_0^{2\pi}\overset{+}{\ln}|f(re^{i\varphi})|\,|\sin\varphi|\,d\varphi.$$

Величины $\chi^{-}(r)$ и $\psi^{-}(r)$ строятся по тому же правилу, что и $\chi(r)$ и $\psi(r)$, но интеграл берется в пределах от $-\pi$ до 0 (в случае $\psi^{-}(r)$ вместо $\sin\varphi$ пишем $|\sin\varphi|$).

Применяя теперь теорему 1.1 один раз с

$$K_1(r,s)=r^{-\sigma}\{\chi(r)+\chi^{-}(r)+\vartheta(\sigma)\tilde{C}(r,1)\},$$

$$K_2(r,s)=r^{-\sigma}\left\{\sec\frac{\pi(s+\sigma)}{2}\tilde{C}(r,s+\sigma)+\frac{2}{\pi(s+\sigma)}\operatorname{tg}\frac{\pi(s+\sigma)}{2}\lambda^*(r)+\right.$$
$$\left.+\vartheta(\sigma)\tilde{C}(r,1)\right\},$$

а другой раз с

$$K_1(r,s)=r^{-\sigma}\{\psi(r)+\psi^{-}(r)+\vartheta(\sigma)\tilde{C}(r,1)\},$$

$$K_2(r,s)=r^{-\sigma}\left\{\frac{2\pi(s+\sigma)^2}{1-(s+\sigma)^2}\tilde{C}(r,1)+\frac{4}{1-(s+\sigma)^2}\lambda^*(r)+\vartheta(\sigma)\tilde{C}(r,1)\right\},$$

получим соотношения

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\sec\frac{\pi\sigma}{2}\widetilde{C}(r,\sigma)+\frac{2}{\pi\sigma}\operatorname{tg}\frac{\pi\sigma}{2}\lambda^*(r)+\vartheta(\sigma)\widetilde{C}(r,1)}{\chi(r)+\chi^-(r)+\vartheta(\sigma)\widetilde{C}(r,1)}\geqslant 1$$

и

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\frac{2\pi\sigma^2}{1-\sigma^2}\widetilde{C}(r,1)+\frac{4}{1-\sigma^2}\lambda^*(r)+\vartheta(\sigma)\widetilde{C}(r,1)}{\psi(r)+\psi^-(r)+\vartheta(\sigma)\widetilde{C}(r,1)}\geqslant 1.$$

Используя теперь неравенства (1.22′) и (1.28′), приходим к следующей теореме.

Теорема 1.4. *Пусть функция* $f(z)\not\equiv\mathrm{const}$ *мероморфна при* $|z|<\infty$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\varliminf\limits_{r\to\infty} r^{-1}b(r,f)=0$;

б) *функция* $\lambda(r)+\widetilde{C}(r,1)$ *имеет предельный показатель сходимости* σ, $0\leqslant\sigma<1$.

Тогда при любом $\varepsilon>0$ *найдутся две последовательности* $r_k\to\infty$ *и* $\rho_k\to\infty$ *такие, что*

$$m(r_k,f)\leqslant(1+\varepsilon)\left(\sec\frac{\pi\sigma}{2}\widetilde{C}(r_k,\sigma)+\frac{2}{\pi\sigma}\operatorname{tg}\frac{\pi\sigma}{2}\lambda(r_k)\right)+ \\ +\varepsilon\vartheta(\sigma)\widetilde{C}(r_k,1)+O\left(\frac{1}{r_k}\right); \tag{1.31}$$

$$b(\rho_k,f)\leqslant(1+\varepsilon)\left(\frac{2\pi\sigma^2}{1-\sigma^2}\widetilde{C}(\rho_k,1)+\frac{4}{1-\sigma^2}\lambda(\rho_k)\right)+ \\ +\varepsilon\vartheta(\sigma)\widetilde{C}(\rho_k,1)+O\left(\frac{1}{\rho_k}\right). \tag{1.32}$$

Если разделить обе части (1.31) на $m(r_k,f)$, обе части (1.32) на $b(\rho_k,f)$, перейти к пределу при $r_k\to\infty$ и $\rho_k\to\infty$, а затем устремить $\varepsilon\to 0$, то получим следующий результат.

Теорема 1.5. *Если функция* $f(z)\not\equiv\mathrm{const}$ *мероморфна при* $|z|<\infty$, *удовлетворяет условиям* а), б) *теоремы* 1.4 *и условию* в) $\lim\limits_{r\to\infty} rb(r,f)=\infty$ *теоремы* 1.2, *то при* $\sigma>0$ *имеют место соотношения*

$$\varlimsup_{r\to\infty} m^{-1}(r,f)\left\{\sec\frac{\pi\sigma}{2}\widetilde{C}(r,\sigma)+\frac{2}{\pi\sigma}\operatorname{tg}\frac{\pi\sigma}{2}\lambda(r)\right\}\geqslant 1, \tag{1.33}$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} b^{-1}(r,f)\left\{\frac{2\pi\sigma^2}{1-\sigma^2}\widetilde{C}(r,1)+\frac{4}{1-\sigma^2}\lambda(r)\right\}\geqslant 1. \tag{1.34}$$

При дополнительном требовании $\varlimsup\limits_{r\to\infty} b^{-1}(r,f)\widetilde{C}(r,1)<\infty$ *эти соотношения имеют место и при* $\sigma=0$.

Если дополнительно к а) и б) потребовать, чтобы $f(z)$ имела по крайней мере один невещественный полюс и $0<\sigma<1$, то неравенства (1.33) и (1.34), в которых вместо $m(r,f)$ и $b(r,f)$ стоят $\overline{m}(r,f)=\max\{1, m(r,f)\}$ и $\overline{b}(r,f)=\max\{1, b(r,f)\}$, справедливы и без требования в).

Разделим теперь обе части (1.31) на $T(r_k,f)$ и перейдем к пределу при $r_k\to\infty$. Если учесть, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\widetilde{C}(r,1)}{T(r,f)}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)}{T(r,f)}\leqslant 1<\infty,$$

то, устремляя $\varepsilon \to 0$, получим следующую оценку для величины неванлинновского дефекта $\delta(\infty, f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{m(r, f)}{T(r, f)}$:

$$\delta(\infty, f) \leqslant \sec \frac{\pi\sigma}{2} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\widetilde{C}(r, \sigma)}{T(r, f)} + \frac{2}{\pi\sigma} \operatorname{tg} \frac{\pi\sigma}{2} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\lambda(r)}{T(r, f)}. \qquad (1.35)$$

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.6. *Если функция $f(z)$ мероморфна в конечной плоскости и удовлетворяет условиям* а) *и* б) *теоремы 1.4, то для ее неванлинновского дефекта в ∞ справедлива оценка* (1.35).

Отметим, что условия этой теоремы автоматически выполняются для всякой мероморфной функции порядка $\rho < 1$. Так как $\sigma \leqslant \rho$, а правая часть (1.35) — неубывающая функция σ при $0 \leqslant \sigma < 1$, то из (1.35) следует, что для всякой функции $f(z)$ порядка $\rho < 1$

$$\delta(\infty, f) \leqslant \sec \frac{\pi\rho}{2} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\widetilde{C}(r, \rho)}{T(r, f)} + \frac{2}{\pi\rho} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{2} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\lambda(r)}{T(r, f)}, \qquad (1.35')$$

В силу соотношения $\widetilde{C}(r, \rho) \leqslant 2 \sin^2 \frac{\pi\rho}{4} N(r, f)$ из (1.35′) получаем, что

$$\delta(\infty, f) \leqslant \sec \frac{\pi\rho}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi\rho}{4} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{N(r, f)}{T(r, f)} + \frac{2}{\pi\rho} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{2} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\lambda(r)}{T(r, f)} =$$

$$= \left(\sec \frac{\pi\rho}{2} - 1\right)(1 - \delta(\infty, f)) + \frac{2}{\pi\rho} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{2} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\lambda(r)}{T(r, f)},$$

откуда вытекает оценка

$$\delta(\infty, f) \leqslant 1 - \cos \frac{\pi\rho}{2} + \frac{2}{\pi\rho} \sin \frac{\pi\rho}{2} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\lambda(r)}{T(r, f)}. \qquad (1.36)$$

Частным случаем (1.36) является следующая оценка $\delta(\infty, f)$ для функции, ограниченной на вещественной оси:

$$\delta(\infty, f) \leqslant 1 - \cos \frac{\pi\rho}{2}. \qquad (1.36')$$

Эта оценка была впервые установлена О. Тейхмюллером [16], который также показал, что в ней может иметь место и знак равенства.

Если дополнительно предположить, что все полюсы $f(z)$ расположены в углах $|\arg z| \leqslant \theta$, $|\pi - \arg z| \leqslant \theta$ $\left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, то из (1.35′) можно получить более точную оценку дефекта, чем (1.36′), а именно

$$\delta(\infty, f) \leqslant 1 - \cos \frac{\pi\rho}{2} \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \rho. \qquad (1.37)$$

Действительно, мы имеем

$$\widetilde{C}(r, \rho) = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \frac{|\varphi_\nu| \rho}{2} \sin \frac{(\pi - |\varphi_\nu|) \rho}{2} \overset{+}{\ln} \frac{r}{r_\nu} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sin \frac{\theta\rho}{2} \sin \frac{(\pi - \theta)\rho}{2} N(r, f).$$

Следовательно, в силу (1.35')

$$\delta(\infty, f) \leqslant \sec\frac{\pi\rho}{2} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\widetilde{C}(r, \rho)}{T(r, f)} \leqslant 2\sec\frac{\pi\rho}{2}\sin\frac{(\pi-\theta)\rho}{2}\sin\frac{\theta\rho}{2}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, f)}{T(r, f)} =$$
$$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\rho\cdot\sec\frac{\pi\rho}{2}-1\right)(1-\delta(\infty, f)),$$

откуда сразу получается (1.37).

Если рассматривать произведения Бляшке для верхней полуплоскости, т. е. функции

$$B(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{z}{a_\nu}}{1-\dfrac{z}{\bar{a}_\nu}},\ a_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu},\ 0<\varphi_\nu<\pi,\ r_\nu\to\infty,\ \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\varphi_\nu}{r_\nu}<\infty,$$

то мы сможем получить более сильные результаты, чем для более широкого класса мероморфных функций, ограниченных на вещественной оси, так как при $Im z = 0$ $|B(z)| \equiv 1$, $\lambda(r) \equiv 0$. Предположим, что для $B(z)$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln C(r, 1)}{\ln r} = \sigma < 1. \tag{1.38}$$

Мы можем повторить все рассуждения, связанные с доказательством теорем 1.2 и 1.3, но при этом получаются существенные упрощения. Так как $|B(z)| \equiv 1$ при $Im z = 0$, то вместо (1.22) получим

$$m(r) = \chi(r) = m(r,\ B), \tag{1.22''}$$

а вместо (1.28) —

$$b(r) = \psi(r) = b(r,\ B). \tag{1.28''}$$

Излишним становится условие a) теоремы 1.2 или соответствующее условие (1.30), которые использовались нами исключительно для обоснования (1.21). Наконец, (1.22'') и (1.28'') позволяют нам использовать в соответствующем месте не только левое неравенство в (1.4), но и правое. В результате получаем пару соотношений:

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{C(r, \sigma)+\vartheta(\sigma)C(r, 1)}{m(r, B)+\vartheta(\sigma)C(r, 1)} \leqslant \cos\frac{\pi\sigma}{2} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{C(r, \sigma)+\vartheta(\sigma)C(r, 1)}{m(r, B)+\vartheta(\sigma)C(r, 1)},$$
$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{C(r, 1)}{b(r, B)+\vartheta(\sigma)C(r, 1)} \leqslant \frac{1-\sigma^2}{2\pi\sigma^2+\vartheta(\sigma)} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{C(r, 1)}{b(r, B)+\vartheta(\sigma)C(r, 1)}.$$

Из этих соотношений непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1.7. *Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке для верхней полуплоскости, удовлетворяющее условию* (1.38). *Тогда при* $0<\sigma<1$ *справедливы неравенства*

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{C(r,\ \sigma)}{m(r,\ B)} \leqslant \cos\frac{\pi\sigma}{2} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{C(r,\ \sigma)}{m(r,\ B)}, \tag{1.17'}$$
$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{C(r,\ 1)}{b(r,\ B)} \leqslant \frac{1-\sigma^2}{2\pi\sigma^2} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{C(r,\ 1)}{b(r,\ B)}. \tag{1.18'}$$

При $\sigma = 0$ *имеет место*

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m(r,\ B)}{C(r,\ 1)} = \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{b(r,\ B)}{C(r,\ 1)} = 0. \tag{1.18''}$$

Из (1.17′) при $0 < \sigma < 1$ легко следуют

$$\delta(\infty, B) \leqslant \sec\frac{\pi\sigma}{2} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{C(r, \sigma)}{T(r, B)}, \tag{1.35''}$$

$$\Delta(\infty, B) \geqslant \sec\frac{\pi\sigma}{2} \varliminf_{r\to\infty} \frac{C(r, \sigma)}{T(r, B)}. \tag{1.35'''}$$

При $\sigma = 0$ из (1.18″) с учетом $T(r, B) \geqslant C(r, 1)$ следует $\delta(\infty, B) = 0$.

Если дополнительно предположить, что для всех точек $a_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ или $0 < \varphi_\nu \leqslant \theta$, или $\pi - \theta \leqslant \varphi_\nu < \pi \left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, то в силу

$$C(r, \sigma) \leqslant 2\sin\frac{\theta\sigma}{2}\sin\frac{(\pi-\theta)\sigma}{2} N(r, B)$$

из (1.35″) получаем

$$\delta(\infty, B) \leqslant 1 - \cos\frac{\pi\sigma}{2}\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sigma. \tag{1.37'}$$

Если же предположить, что все a_ν лежат в угле $\left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} - \theta$ $\left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)^*$, то в силу

$$C(r, \sigma) \geqslant 2\sin\frac{\theta\sigma}{2}\sin\frac{(\pi-\theta)\sigma}{2} N(r, B)$$

из (1.35‴) получаем

$$\Delta(\infty, B) \geqslant 1 - \cos\frac{\pi\sigma}{2}\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sigma. \tag{1.37''}$$

В частности, если все полюсы a_ν лежат на лучах $\arg z = \theta$ и $\arg z = \pi - \theta$ $\left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, то из (1.37′) и (1.37″) вытекает, что

$$\delta(\infty, B) \leqslant 1 - \cos\frac{\pi\sigma}{2}\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sigma \leqslant \Delta(\infty, B).$$

Замечание. В (1.35″) и (1.37′) можно считать, что σ равно ρ — порядку произведения Бляшке, ибо, если $\sigma < \min(\rho, 1)$, то, как мы сейчас покажем, всегда будем иметь $\delta(\infty, B) = 0$. Действительно, предположив, что $\delta(\infty, B) > 0$, мы имели бы для всех достаточно больших r

$$T(r, B) < \frac{2}{\delta(\infty, B)} m(r, B).$$

Выберем теперь σ' так, что $\sigma < \sigma' < \min(\rho, 1)$. В силу (1.26) должен сходиться интеграл

$$\int_1^\infty \frac{m(r, B)}{r^{1+\sigma'}}\, dr, \tag{1.39}$$

а, следовательно, и интеграл

$$\int_1^\infty \frac{T(r, B)}{r^{1+\sigma'}}\, dr.$$

* Легко видеть, что при таком предположении σ совпадает с порядком произведения Бляшке $B(z)$.

Отсюда вытекает, что порядок $T(r, B)$ не превышает $\sigma' < \rho$. Мы пришли к противоречию.

Отметим, что из результатов Хеймана [17] следует, что $\delta(\infty, B) = 0$, если только $\varlimsup\limits_{r\to\infty} r^{-1} T(r, B) > 0$. Отметим также, что из сходимости (1.39) следует, что вне множества r сколь угодно малой верхней плотности $m(r, B) = O(r^{\sigma'})$. Поэтому, если выполняется (1.38), то для любого $\sigma' > \sigma$ для всех $r > 0$, исключая, быть может, множество сколь угодно малой верхней плотности, справедливо $m(r,B) = O(r^{\sigma'})$.

§ 2

В этом параграфе будут рассматриваться трансцендентные мероморфные функции $f(z)$ рода нуль. Мы предположим, что $f(0) = 1$; это не отразится на общности тех теорем, которые здесь будут доказаны. Тогда можно записать

$$f(z) = \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\mu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right)}.$$

Обозначим

$$\mathrm{H}(r) = N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \overset{+}{\ln} \frac{r}{|a_\mu|} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overset{+}{\ln} \frac{r}{|b_\nu|},$$

$$\widetilde{\mathrm{H}}(r) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{|a_\mu|}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{|b_\nu|}\right),$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} = \rho, \qquad \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} = \lambda,$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mathrm{H}(r)}{\ln r} = \rho_{\mathrm{H}}, \quad \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln \mathrm{H}(r)}{\ln r} = \lambda_{\mathrm{H}},$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \widetilde{\mathrm{H}}(r)}{\ln r} = \tilde{\rho}, \quad \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln \widetilde{\mathrm{H}}(r)}{\ln r} = \tilde{\lambda}.$$

Очевидно, что $\frac{1}{2}\mathrm{H}(r) \leqslant T(r, f) \leqslant \widetilde{\mathrm{H}}(r)$. Хорошо известно, что $\rho = \rho_{\mathrm{H}} = \tilde{\rho}$. Оказывается, для нижних порядков равенство имеет место не всегда, в общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для мероморфной функции рода нуль имеют место следующие соотношения**

$$0 \leqslant \lambda_{\mathrm{H}} \leqslant \lambda \leqslant \tilde{\lambda} \leqslant \frac{\lambda_{\mathrm{H}}}{1 - \rho + \lambda_{\mathrm{H}}} \leqslant \rho \leqslant 1, \tag{2.1}$$

при этом в любом месте (2.1) *возможен знак равенства.*

---

* Если $f(z)$ — мероморфная функция рода $p > 0$, то тем же методом можно доказать неравенство

$$0 \leqslant \lambda_{\mathrm{H}} \leqslant \lambda \leqslant \begin{cases} \dfrac{\lambda_{\mathrm{H}} - p(\rho - \lambda_{\mathrm{H}})}{1 - \rho + \lambda_{\mathrm{H}}} & \text{при } p \leqslant \lambda_{\mathrm{H}} \leqslant \rho \\ p & \text{при } 0 \leqslant \lambda_{\mathrm{H}} \leqslant p. \end{cases}$$

Здесь нетривиально только неравенство

$$\tilde{\lambda} \leqslant \frac{\lambda_H}{1-\rho+\lambda_H}. \tag{2.1'}$$

Очевидно, для доказательства этого неравенства достаточно рассматривать случай, когда $f(z)$—целая функция с отрицательными нулями. Тогда

$$\tilde{H}(r) = \ln M(r, f) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{r}{|a_\mu|}\right) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \left\{\ln\left(1+\frac{r}{|a_\mu|}\right) - \ln\left(1+\frac{r}{|a_{\mu+1}|}\right)\right\} =$$

$$= r\int_0^\infty \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right)dt}{t(t+r)} \leqslant \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t}\,dt + r\int_r^\infty \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t^2}\,dt = r\int_r^\infty \frac{H(t)}{t^2}\,dt$$

(последнее равенство получено интегрированием второго интеграла по частям). Так как случай $\lambda_H = \rho$ и $\rho = 1$ тривиальны, можем считать, что $\lambda_H < \rho < 1$. Возьмем произвольные числа α и β такие, что $\lambda_H < \beta < \rho < \alpha < 1$; тогда всегда можно выбрать последовательность $r_k \to \infty$ такую, что

$$H\left(r_k^{\frac{1}{1-\alpha+\beta}}\right) < r_k^{\frac{\beta}{1-\alpha+\beta}}$$

и при $r > r_1$ $H(r) < r^\alpha$. Тогда $\left(r'_k = r_k^{\frac{1}{1-\alpha+\beta}}\right)$

$$\tilde{H}(r_k) \leqslant r_k \int_{r_k}^{r'_k} \frac{H(t)}{t^2}\,dt + r_k \int_{r'_k}^{\infty} \frac{H(t)}{t^2}\,dt \leqslant r_k r_k'^{\beta} \int_{r_k}^{r'_k} \frac{dt}{t^2} + r_k \int_{r'_k}^{\infty} t^{\alpha-2}dt \leqslant$$

$$\leqslant r_k'^{\beta} + \frac{1}{1-\alpha} r_k'^{\beta} = \frac{2-\alpha}{1-\alpha} r_k^{\frac{\beta}{1-\alpha+\beta}}.$$

Отсюда следует

$$\tilde{\lambda} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln \tilde{H}(r)}{\ln r} \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha+\beta}$$

и, так как α можно выбрать сколь угодно близко к ρ, а β — к λ_H, то справедливо (2.1').

Построим теперь пример целой функции, для которой будет выполняться

$$0 < \lambda_H < \lambda = \tilde{\lambda} = \frac{\lambda_H}{1-\rho+\lambda_H} < \rho < 1. \tag{2.2}$$

Для этого возьмем функцию

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{r_k}\right)^{[r_k^\rho]}, \quad r_1 = 2, \quad r_{k+1} = r_k^\alpha, \quad \alpha > 1.$$

Так как $\tilde{H}(r) = \ln M(r, g)$, то $\lambda = \tilde{\lambda}$. Очевидно, порядок $g(z)$ равен ρ.

Далее

$$\mathrm{H}(r_{k+1})=\sum_{\nu=1}^{k}[r_\nu^\rho]\ln\frac{r_{k+1}}{r_\nu}\leqslant(\alpha-1)r_k^\rho\ln r_k+\sum_{\nu=1}^{k-1}[r_\nu^\rho]\ln\frac{r_{k+1}}{r_\nu}\leqslant(\alpha-1)r_k^\rho\ln r_k+$$

$$+r_{k-1}^\rho\ln r_{k+1}\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(\frac{r_\nu}{r_{k-1}}\right)^\rho\leqslant r_k^\rho\left[(\alpha-1)\ln r_k+\bar{o}(1)\right],$$

отсюда

$$\lambda_{\mathrm{H}}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln\mathrm{H}(r)}{\ln r}\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln\mathrm{H}(r_{k+1})}{\ln r_{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\mathrm{H}(r_{k+1})}{\alpha\ln r_k}\leqslant\frac{\rho}{\alpha}. \tag{2.3}$$

С другой стороны, при $2r_k\leqslant r\leqslant 2r_{k+1}=2r_k^\alpha$

$$\widetilde{\mathrm{H}}(r)=\sum_{k=1}^{\infty}[r_k^\rho]\ln\left(1+\frac{r}{r_k}\right)\geqslant[r_k^\rho]\ln\left(1+\frac{r}{r_k}\right)+[r_{k+1}^\rho]\ln\left(1+\frac{r}{r_{k+1}}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\max\left(r_k^\rho\ln\left(1+\frac{r}{r_k}\right),\quad r_{k+1}^\rho\cdot\frac{r}{3r_{k+1}}\right)-o(\ln r_k),$$

$$\frac{\ln\widetilde{\mathrm{H}}(r)}{\ln r}\geqslant\max\left\{\frac{\rho\ln r_k}{\ln r},\quad 1-(1-\rho)\alpha\frac{\ln r_k}{\ln r}\right\}-o(1)\geqslant$$

$$\geqslant\min_{2r_k\leqslant r\leqslant 2r_k^\alpha}\max\left\{\frac{\rho\ln r_k}{\ln r},\ 1-(1-\rho)\alpha\frac{\ln r_k}{\ln r}\right\}-o(1)=\frac{\rho}{\rho+\alpha(1-\rho)}-o(1).$$

Отсюда в силу (2.3)

$$\tilde{\lambda}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln\widetilde{\mathrm{H}}(r)}{\ln r}\geqslant\frac{\rho}{\rho+\alpha(1-\rho)}\geqslant\frac{\lambda_{\mathrm{H}}}{1-\rho+\lambda_{\mathrm{H}}},$$

что вместе с (2.1′) даёт

$$\tilde{\lambda}=\frac{\lambda_{\mathrm{H}}}{1-\rho+\lambda_{\mathrm{H}}},\quad\lambda_{\mathrm{H}}=\frac{\rho}{\alpha},\quad 1<\alpha<\infty, \tag{2.4}$$

а это показывает возможность выполнения (2.2).

Чтобы построить пример целой функции, для которой выполняется

$$0<\lambda_{\mathrm{H}}=\lambda<\tilde{\lambda}=\frac{\lambda_{\mathrm{H}}}{1-\rho+\lambda_{\mathrm{H}}}<\rho<1, \tag{2.5}$$

достаточно рассмотреть целую функцию

$$g_1(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{z}{r_k}\right)^{[r_k^\rho]}\right\},\quad r_1=2,\quad r_{k+1}=r_k^\alpha,\quad\alpha>1.$$

Легко видеть, что $N(r,0,g_1)\equiv N(r,0,g)$ и $\widetilde{\mathrm{H}}(r,g_1)=\widetilde{\mathrm{H}}(r,g)$, следовательно, порядок $g_1(z)$ равен ρ и для неё также справедливы равенства (2.4). Но для функции $g_1(z)$

$$N(r,\ 0,\ g_1)\leqslant T(r,\ g_1)\leqslant \ln M(r,\ g_1)=\sum_{r_k<r}\ln\left\{1+\left(\frac{r}{r_k}\right)^{[r_k^\rho]}\right\}+$$
$$+\sum_{r_k\geqslant r}\ln\left\{1+\left(\frac{r}{r_k}\right)^{[r_k^\rho]}\right\}\leqslant\sum_{r_k<r}[r_k^\rho]\ln\frac{r}{r_k}+\sum_{k=1}^{n(r)}\ln\left\{1+\left(\frac{r_k}{r}\right)^{[r_k^\rho]}\right\}+$$
$$+\sum_{k=n(r)+1}^{\infty}\ln\left\{1+\left(\frac{r}{r_k}\right)^{[r_k^\rho]}\right\}\leqslant N(r,\ 0,\ g_1)+\sum_{k=1}^{n(r)}\frac{r_k}{r_{n(r)}}+\sum_{k=n(r)+1}^{\infty}\frac{r_{n(r)+1}}{r_k}=$$
$$=N(r,\ 0,\ g_1)+O(1),$$

следовательно, $\lambda=\lambda_H$ и (2.5) выполняется.

Пример целой функции, для которой

$$0<\lambda_H=\lambda=\tilde{\lambda}<\frac{\lambda_H}{1-\rho+\lambda_H}<\rho<1, \tag{2.6}$$

тоже нетрудно указать. Возьмем дифференцируемую на $[1,\ \infty]$ функцию $\omega(x)$ такую, что

$$\varliminf_{x\to\infty}\omega(x)=\frac{1}{\rho},\quad \varlimsup_{x\to\infty}\omega(x)=\frac{1}{\lambda_H},\quad \lim_{x\to\infty}\omega'(x)\,x\ln x=0.$$

Пусть

$$g_2(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_k}\right),\quad r_k=k^{\omega(k)}.$$

Такие функции изучал Ж. Валирон ([18], стр. 232). Если $\rho(r)=\omega^{-1}(x)$, где x определяется из уравнения $r=x^{\omega(x)}$, то

$$\varliminf_{r\to\infty}\rho(r)=\lambda_H,\quad \varlimsup_{r\to\infty}\rho(r)=\rho,\quad \lim_{r\to\infty}\rho'(r)\,r\ln r=0,$$

$n\left(r,\ \frac{1}{g_2}\right)\sim r^{\rho(r)}$ и вне кружков $|z-r_k|<r_k^{-\varepsilon}$, ε — фиксированное положительное число, имеет место асимптотическая формула

$$\ln g_2(re^{i\varphi})\sim r^{\rho(r)}\frac{\pi e^{i\varphi\rho(r)}}{\sin[\pi\rho(r)]},$$

выполняющаяся при $r\to\infty$ равномерно относительно φ. Нетрудно убедиться, что

$$H(r)\sim\frac{1}{\rho(r)}r^{\rho(r)}$$

и

$$\tilde{H}(r)=\ln M(r,\ g_2)\sim\frac{\pi}{\sin[\pi\rho(r)]}r^{\rho(r)},$$

следовательно, $\lambda_H=\lambda=\tilde{\lambda}<\rho$, откуда следует (2.6). На свойства функции $g_2(z)$ нам еще придется ссылаться в дальнейшем.

Построение остальных примеров, показывающих, что в (2.1) могут реализоваться все допустимые комбинации $<$ и $=$ (кроме уже рассмотренных (2.2), (2.5), (2.6)) никакого труда не представляет.

Введенная нами величина $\tilde{\lambda}$ будет фигурировать во многих теоремах, которые будут доказываться ниже.

Следующая теорема, представляющая обобщение метода Данжуа [11], играет в этом параграфе такую же роль, как теорема 1.1 в § 1. При доказательстве мы используем некоторые приёмы, принадлежащие Ж. Валирону [12], и (косвенно) одну идею Б. Чельберга [8].

Теорема 2.2. *Пусть* $\theta(x)$ *измерима, а* $\varphi(x)$ — *непрерывна на полуоси* $0 \leqslant x < \infty$ *и пусть:* 1) $\theta(x) < 0$ *при* $0 < x < x_0$, $\theta(x) > 0$ *при* $x_0 < x < \infty$; 2) $\varphi(x) > 0$ *при* $0 < x < \infty$;

3)

$$0 \leqslant \int_0^\infty \frac{\theta(x)}{x^{1+\alpha}}\, dx < \infty$$

при некотором $\alpha \geqslant 0$;

4)

$$\varliminf_{x\to 0} \frac{x^\alpha \psi(x)}{\varphi(x)} > 0, \quad \varliminf_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \psi(x)}{\varphi(x)} > 0,$$

$$\varlimsup_{x\to 0} \frac{x^\alpha \psi(x)}{\varphi(x)} < \infty, \quad \varlimsup_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \psi(x)}{\varphi(x)} < \infty,$$

где

$$\psi(x) = \int_x^\infty \frac{\theta(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt.$$

5) *Пусть* r_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, — *некоторая последовательность положительных чисел. Ряды*

$$\Theta(x) = \sum_{\nu=1}^\infty \theta\left(\frac{x}{r_\nu}\right), \quad \Phi(x) = \sum_{\nu=1}^\infty \varphi\left(\frac{x}{r_\nu}\right)$$

имеют мажоранту, суммируемую в любом конечном сегменте.

6)

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\,\Phi(x)}{\ln x} = \rho < \infty, \quad \varliminf_{x\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\,\Phi(x)}{\ln x} = \lambda.$$

Тогда, если $\alpha > \lambda$ *и* $\neq \rho$, *то*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \Theta(r) \geqslant 0, \tag{2.7$_1$}$$

при этом, если $\alpha > \rho$, *то*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\,\Theta(r)}{\ln r} \geqslant \rho; \tag{2.7$_2$}$$

если $\lambda < \alpha < \rho$, *то*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\,\Theta(r)}{\ln r} \geqslant \alpha. \tag{2.7$_3$}$$

Если $\alpha < \rho$, *то всегда*

$$\varliminf_{r\to\infty} \Theta(r) \leqslant 0, \tag{2.8$_1$}$$

а при дополнительном условии $\lambda < \rho$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\{-\Theta(r)\}}{\ln r} \geqslant \rho. \tag{2.8$_2$}$$

Если для двух функций $\theta_1(x)$ *и* $\theta_2(x)$ *и соответственно двух последовательностей* $r_{\nu 1}$ *и* $r_{\nu 2}$ *выполняются условия* 1) — 5), *а для функции*

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{r_{\nu 1}}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{r_{\nu 2}}\right)$$

выполняется условие 6), *то для функции*

$$\Theta(x) = \Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_1\left(\frac{x}{r_{\nu 1}}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_2\left(\frac{x}{r_{\nu 2}}\right)$$

справедливо (2.7_{1-3}) *и* $(2.8_{1,2})$.

Доказательство. Из 1) следует, что функция $\psi(x)$ возрастает при $0 < x < x_0$ и убывает при $x_0 < x < \infty$. Так как $\psi(0) \geqslant 0$ и $\psi(\infty) = 0$ в силу 3), то отсюда следует, что $\psi(x) > 0$ для всех x, $0 < x < \infty$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \frac{x^{\alpha}\psi(x)}{\varphi(x)}. \tag{2.9}$$

Очевидно, эта функция непрерывна на $(0, \infty)$. Обозначим

$$h_1 = \inf_{0<x<\infty} h(x), \quad h_2 = \sup_{0<x<\infty} h(x).$$

Из 4) легко следует, что $0 < h_1 \leqslant h_2 < \infty$. Пусть R_1 и R_2 — два произвольных числа таких, что $0 < R_1 < R_2 < \infty$. Используя(2. 9), получим

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{\theta\left(\frac{t}{r_\nu}\right)}{t^{1+\alpha}}\,dt = \frac{1}{r_\nu^{\alpha}} \int_{\frac{R_1}{r_\nu}}^{\frac{R_2}{r_\nu}} \frac{\theta(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt = \frac{1}{r_\nu^{\alpha}}\left[\psi\left(\frac{R_1}{r_\nu}\right) - \psi\left(\frac{R_2}{r_\nu}\right)\right] =$$

$$= h\left(\frac{R_1}{r_\nu}\right)\frac{\varphi\left(\frac{R_1}{r_\nu}\right)}{R_1^{\alpha}} - h\left(\frac{R_2}{r_\nu}\right)\frac{\varphi\left(\frac{R_2}{r_\nu}\right)}{R_2^{\alpha}}.$$

Отсюда

$$h_1\frac{\varphi\left(\frac{R_1}{r_\nu}\right)}{R_1^{\alpha}} - h_2\frac{\varphi\left(\frac{R_2}{r_\nu}\right)}{R_2^{\alpha}} \leqslant \int_{R_1}^{R_2} \frac{\theta\left(\frac{t}{r_\nu}\right)}{t^{1+\alpha}}\,dt \leqslant h_2\frac{\varphi\left(\frac{R_1}{r_\nu}\right)}{R_1^{\alpha}} - h_1\frac{\varphi\left(\frac{R_2}{r_\nu}\right)}{R_2^{\alpha}}. \tag{2.10}$$

Просуммировав (2.10) по ν, что возможно в силу 5), получим

$$h_1\frac{\Phi(R_1)}{R_1^{\alpha}} - h_2\frac{\Phi(R_2)}{R_2^{\alpha}} \leqslant \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Theta(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt \leqslant h_2\frac{\Phi(R_1)}{R_1^{\alpha}} - h_1\frac{\Phi(R_2)}{R_2^{\alpha}}. \tag{2.11}$$

Условимся для удобства левое неравенство в (2.11) обозначать (2.11л), а правое — (2.11п). Пусть $\alpha > \rho$, тогда по 6) $\Phi(R)/R^{\alpha} \to 0$ при $R \to \infty$. Перейдем в (2.11л) к пределу при $R_2 \to \infty$. Тогда

$$\int_{R}^{\infty} \frac{\Theta(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt \geqslant h_1\frac{\Phi(R)}{R^{\alpha}}, \quad 0 < R < \infty. \tag{2.12}$$

Покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $x_i \to \infty$ такая, что $\Theta(x_i) > x_i^{\rho-\varepsilon}$, т. е. справедливо ($2.7_{1,2}$). Действительно, в противном случае для всех $x \geqslant R_0$ $\Theta(x) \leqslant x^{\rho-\varepsilon}$. Выберем последовательность $R_j \to \infty$ так, чтобы $\Phi(R_j) > R_j^{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}$, $R_j \geqslant R_0$. Тогда для всех $R = R_j$ в силу (2.12)

$$\int_{R_j}^{\infty} \frac{t^{\rho-\varepsilon}}{t^{1+\alpha}}\,dt = \frac{R_j^{-\alpha+\rho-\varepsilon}}{\alpha-\rho+\varepsilon} \geqslant h_1 R_j^{-\alpha+\rho-\frac{\varepsilon}{2}},$$

что невозможно.

Пусть теперь $\lambda < \alpha < \rho$. Покажем, что для всякого ε, $0 < \varepsilon < \alpha - \lambda$ существует последовательность $x_i \to \infty$ такая, что $\Theta(x_i) > x_i^{\alpha-\varepsilon}$, т. е. справедливо ($2.7_{1,3}$). Предположим, что искомой последовательности не существует, т. е. для всех $x \geqslant R_0$ $\Theta(x) \leqslant x^{\alpha-\varepsilon}$. В силу 6) можно выбрать такую последовательность $R_{1i} \to \infty$, что $\Phi(R_{1i}) > R_{1i}^{\rho-\varepsilon}$, и последовательность $R_{2j} \to \infty$ такую, что $\Phi(R_{2j}) < R_{2j}^{\lambda+\varepsilon}$.

Зафиксируем $R_{1i} \geqslant R_0$, выберем $R_{2j} \geqslant R_{1i}$ и применим (2.11л). Тогда

$$\int_{R_{1i}}^{R_{2j}} \frac{t^{\alpha-\varepsilon}}{t^{1+\alpha}}\,dt = \frac{1}{\varepsilon}(R_{1i}^{-\varepsilon} - R_{2j}^{-\varepsilon}) \geqslant h_1 R_{1i}^{\rho-\alpha-\varepsilon} - h_2 R_{2j}^{\lambda-\alpha+\varepsilon}.$$

Перейдя к пределу $R_{2j} \to \infty$, получим для всех R_{1i} $R_{1i}^{-\varepsilon} \geqslant \varepsilon h_1 R_{1i}^{\rho-\alpha-\varepsilon}$, что невозможно. ($2.7_{1,3}$) доказано. Но если $\lambda < \rho$, не может быть также, чтобы при любом $\alpha < \rho$ для всех $x \geqslant x_0$ $\Theta(x) \geqslant -x^{\rho-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < \min(\rho-\alpha, \rho-\lambda)$. Действительно, в этом случае выберем последовательность $R_{1i} \to \infty$ так, чтобы $\Phi(R_{1i}) < R_{1i}^{\lambda+\varepsilon'}$, где $0 < \varepsilon' < \min(\varepsilon, \rho-\lambda-\varepsilon)$, и последовательность $R_{2j} \to \infty$ так, чтобы $\Phi(R_{2j}) > R_{2j}^{\alpha-\varepsilon'}$. Применим (2.11п) к $R_{1i} < R_{2j}$. Тогда

$$-\int_{R_{1i}}^{R_{2j}} \frac{t^{\rho-\varepsilon}}{r^{1+\alpha}}\,dt = \frac{R_{1i}^{\rho-\alpha-\varepsilon} - R_{2j}^{\rho-\alpha-\varepsilon}}{\rho-\alpha-\varepsilon} \leqslant h_2 R_{1i}^{\lambda-\alpha+\varepsilon'} - h_1 R_{2j}^{\rho-\alpha+\varepsilon'}.$$

Но для достаточно больших R_{1i} и R_{2j}

$$R_{1i}^{\rho-\alpha-\varepsilon} > (\rho-\alpha-\varepsilon)\,h_2 R_{1i}^{\lambda-\alpha+\varepsilon'} \quad \text{и} \quad R_{2j}^{\rho-\alpha-\varepsilon} < (\rho-\alpha-\varepsilon)\,h_1 R_{2j}^{\rho-\alpha-\varepsilon'},$$

поэтому предыдущее неравенство не может выполняться. Следовательно, для некоторой последовательности $x_i \to \infty$ $\Theta(x_i) < -x_i^{\rho-\varepsilon}$, т. е. доказано ($2.8_2$).

Пусть теперь $\lambda = \rho$, тогда при $R \to \infty$ $\Phi(R)\,R^{-\alpha} \to \infty$. Следовательно, для каждого R_1 найдется такое $R_2 > R_1$, что

$$\frac{\Phi(R_2)\,R_2^{-\alpha}}{\Phi(R_1)\,R_1^{-\alpha}} > \frac{h_2}{h_1}.$$

Тогда из (2.11п) получаем

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{\Theta(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt < 0$$

и, так как R_1 можно выбирать произвольно большим, $\varliminf\limits_{r\to\infty} \Theta(r) \leqslant 0$, т. е. ($2.8_1$) доказано.

Для доказательства последнего утверждения теоремы заметим, что, если $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, то, повторяя для каждой функции рассуждения, которые мы проводили для $\Theta(x)$, получим $(i = 1,\ 2)$

$$h_1^{(i)} \frac{\Phi_i(R_1)}{R_1^\alpha} - h_2^{(i)} \frac{\Phi(R_2)}{R_2^\alpha} \leqslant \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Theta_i(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \leqslant h_2^{(i)} \frac{\Phi_i(R_1)}{R_1^\alpha} - h_1^{(i)} \frac{\Phi_i(R_2)}{R_2^\alpha}.$$

Складывая эти неравенства, получим (2.11), где $h_1 = \min\{h_1^{(1)},\ h_1^{(2)}\}$, $h_2 = \max\{h_2^{(1)},\ h_2^{(2)}\}$. Далее повторяем прежнее доказательство.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 2.2 дополнительно предположим, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, \Phi(r) = \infty$, то, пользуясь (2.11л), нетрудно показать, что (2.7_1) можно заменить на

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \Theta(r) = +\infty. \tag{2.7_4}$$

Замечание 2. Теорему 2.2 можно усилить, если учитывать не только порядок, но и тип функции $\Phi(r)$.

Замечание 3. Очевидно, что, если $\theta(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.2, то и функции $c_1\theta(x)$ и $c_2\varphi(x)$, где c_1 и c_2 — положительные постоянные, будут удовлетворять условиям теоремы 2.2. Если $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.2, то и $\theta_1(x) + \theta_2(x)$ удовлетворяет этим условиям.

Прежде, чем формулировать основную теорему, приведем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $\{r_\nu\}$ *— последовательность положительных чисел такая, что*

$$\sum r_\nu^{-1} < \infty. \tag{2.13}$$

Тогда $\varphi(x) = \ln(1 + x)$ *и каждая из следующих функций:*

$$\theta^{(1)}(x) = \ln|1 - x| - \pi\alpha \operatorname{ctg}\pi\alpha \cdot \overset{+}{\ln}\, x,$$
$$\theta^{(2)}(x) = \overset{+}{\ln}\, x - \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} \ln(1 + x),$$
$$\theta^{(3)}(x) = \pi\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} \overset{+}{\ln}\, x - \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$
$$\theta^{(4)}(x) = \ln|1 - x| - \cos\pi\alpha \ln(1 + x)$$

удовлетворяют условиям теоремы 2.2.

Действительно, выполнение условия 1) проверяется обычными методами дифференциального исчисления*. Справедливость условия 2) очевидна. Для того, чтобы проверить выполнение условия 3) (в нашем случае интегралы от $\theta^{(i)}(x)$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, равны нулю), достаточно воспользоваться формулами (см., например, [5], стр. 291):

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{1+\alpha}}\, dx = \frac{\pi}{\alpha \sin\pi\alpha}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln|1-x|}{x^{1+\alpha}}\, dx = \frac{\pi}{\alpha \operatorname{tg}\pi\alpha},$$

$$\int_0^\infty \frac{\overset{+}{\ln}\, x}{x^{1+\alpha}}\, dx = \frac{1}{\alpha^2}.$$

* Так как $\theta^{(3)}(x) = \theta^{(1)}(x) + \pi\alpha \operatorname{cosec}\pi\alpha\theta^{(2)}(x)$, то в силу замечания 3 для $\theta^{(3)}(x)$ можно проверку не производить. Если $0 < \alpha \leqslant 1/2$, то это же можно сказать и о $\theta^{(4)}(x)$, так как $\theta^{(4)}(x) = \theta^{(1)}(x) + \pi\alpha \operatorname{ctg}\pi\alpha\theta^{(2)}(x)$.

Выполнение условия 4) (в нашем случае при $x \to 0$ и $x \to \infty$ существуют точные пределы) легко проверяется с помощью правила Лопиталя. Из хорошо известных фактов теории целых функций следует выполнение условий 5) и 6), (в 6) мы можем утверждать, что $\rho \leqslant 1$), впрочем, это легко проверить и непосредственно.

Теорема 2.3. *Пусть* $f(z)$ *мероморфная функция рода нуль. Тогда справедливы следующие соотношения** *(всюду* $0 < \alpha < 1$):

1) *Для всех* $\alpha > \tilde{\lambda}$ *и* $\neq \rho$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \left\{ \ln \mu(r) + \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} [N(r, \infty) - \cos \pi\alpha\, N(r, 0)] \right\} = +\infty, \qquad (2.14_4)$$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \left\{ \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} [N(r, 0) - \cos \pi\alpha\, N(r, \infty)] - \ln M(r) \right\} = +\infty, \qquad (2.15_4)$$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \left\{ \pi\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \mathrm{H}(r) - \ln \frac{M(r)}{\mu(r)} \right\} = +\infty. \qquad (2.16_4)$$

2) *Для всех* $\alpha > \rho$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\overset{+}{\ln} \left\{ \ln \mu(r) + \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} [N(r, \infty) - \cos \pi\alpha\, N(r, 0)] \right\}}{\ln r} \geqslant \rho, \qquad (2.14_2)$$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\overset{+}{\ln} \left\{ \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} [N(r, 0) - \cos \pi\alpha\, N(r, \infty)] - \ln M(r) \right\}}{\ln r} \geqslant \rho, \qquad (2.15_2)$$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\overset{+}{\ln} \left\{ \pi\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \mathrm{H}(r) - \ln [M(r)/\mu(r)] \right\}}{\ln r} \geqslant \rho. \qquad (2.16_2)$$

3) *Если* $\tilde{\lambda} < \rho$ *и* $\tilde{\lambda} < \alpha < \rho$, *то в правых сторонах неравенств* (2.14_2), (2.15_2), (2.16_2) *надо заменить* ρ *на* $\tilde{\lambda}$ *(полученные неравенства будем обозначать* (2.14_3), (2.15_3), (2.16_3)).

4) *Если* $\tilde{\lambda} < \rho$ *и* $0 < \alpha < \rho$, *то*

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\overset{+}{\ln} \left\{ \ln \frac{1}{\mu(r)} + \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} [\cos \pi\alpha\, N(r, 0) - N(r, \infty)] \right\}}{\ln r} \geqslant \rho, \qquad (2.14_2')$$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\overset{+}{\ln} \left\{ \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} [\cos \pi\alpha\, N(r, \infty) - N(r, 0)] + \ln M(r) \right\}}{\ln r} \geqslant \rho, \qquad (2.15_2')$$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\overset{+}{\ln} \left\{ \ln [M(r)/\mu(r)] - \pi\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \mathrm{H}(r) \right\}}{\ln r} \geqslant \rho. \qquad (2.16_2')$$

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \frac{\prod\limits_{\nu} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\mu} \left(1 - \frac{z}{b_\mu}\right)}, \quad \tilde{f}(z) = \frac{\prod\limits_{\nu} \left(1 - \frac{z}{|a_\nu|}\right)}{\prod\limits_{\mu} \left(1 + \frac{z}{|b_\mu|}\right)}.$$

* Обозначения см. во введении и в начале § 2.

Очевидно, что

$$N(r, 0, f) \equiv N(r, 0, \hat{f}), \quad N(r, \infty, f) \equiv N(r, \infty, \hat{f}),$$

$$\mathrm{H}(r, f) \equiv \mathrm{H}(r, \hat{f}), \quad \widetilde{\mathrm{H}}(r, f) \equiv \widetilde{\mathrm{H}}(r, \hat{f}),$$

$$M(r, f) \leqslant M(r, \hat{f}) = \frac{\prod\limits_{\nu}\left(1 + \frac{r}{|a_\nu|}\right)}{\prod\limits_{\mu}\left(1 - \frac{r}{|b_\mu|}\right)},$$

$$\mu(r, f) \geqslant \mu(r, \hat{f}) = \frac{\prod\limits_{\nu}\left(1 - \frac{r}{|a_\nu|}\right)}{\prod\limits_{\mu}\left(1 + \frac{r}{|b_\mu|}\right)},$$

поэтому теорему достаточно доказать для функций, у которых нули положительны, а полюсы отрицательны. В теореме 2.2 (последнее утверждение) выберем $\{r_{\nu 1}\} = \{|a_\nu|\}$, $\{r_{\nu 2}\} = \{|b_\nu|\}$, для обеих последовательностей выполняется (2.13). За $\varphi(x)$ возьмем $\varphi(x) = \ln(1 + x)$, тогда

$$\Phi(x) = \sum_{\nu} \varphi\left(\frac{x}{|a_\nu|}\right) + \sum_{\mu} \varphi\left(\frac{x}{|b_\mu|}\right) = \widetilde{\mathrm{H}}(x, f).$$

За $\theta_1(x)$ возьмем $\theta_1(x) = \theta^{(1)}(x)$, за $\theta_2(x) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha}\theta^{(2)}(x)$, тогда

$$\Theta(x) = \sum_{\nu} \theta_1\left(\frac{x}{|a_\nu|}\right) + \sum_{\mu} \theta_2\left(\frac{x}{|b_\mu|}\right) =$$

$$= \sum_{\nu}\left\{\ln\left|1 - \frac{x}{|a_\nu|}\right| - \pi\alpha \operatorname{ctg} \pi\alpha \overset{+}{\ln} \frac{x}{|a_\nu|}\right\} +$$

$$+ \sum_{\mu}\left\{\frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} \overset{+}{\ln} \frac{x}{|b_\mu|} - \ln\left(1 + \frac{x}{|b_\mu|}\right)\right\} =$$

$$= \ln \mu(x, \hat{f}) + \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha}[N(x, \infty) - \cos \pi\alpha N(x, 0)].$$

Учитывая лемму 2.1 и замечание 1 (условия которого выполняются, так как $\Phi(x) = \widetilde{\mathrm{H}}(x, f) \to \infty$ при $x \to \infty$), по теореме 2.2 сразу получаем (2.14_4), (2.14_2), (2.14_3), $(2.14_2')$. Аналогично убеждаемся в справедливости (2.15_4), (2.15_2), (2.15_3), $(2.15_2')$, взяв* $\theta_1(x) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha}\theta^{(2)}(x)$, $\theta_2(x) = \theta^{(1)}(x)$, и в справедливости (2.16_4), (2.16_2), (2.16_3), $(2.16_2')$, взяв $\theta_1(x) = \theta^{(3)}(x)$, $\theta_2(x) = \theta^{(3)}(x)$.

Следствие. *Если $f(z)$ — целая функция рода нуль и $\rho < 1/2$, то*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\overset{+}{\ln} \ln \mu(r)}{\ln r} = \rho. \qquad (2.14_2')$$

* Тут можно не ссылаться снова на теорему 2.2, а получить (2.15_4), (2.15_2), (2.15_3), $(2.15_2')$ из (2.14_4), (2.15_2), (2.15_3), $(2.15_2')$, заметив, что $\ln \mu(r, f) = -\ln M(r, 1/f)$, $\ln M(r, f) = -\ln \mu(r, 1/f)$, $N(r, 0, f) = N(r, \infty, 1/f)$, $N(r, \infty, f) = N(r, 0, 1/f)$.

Если $\tilde{\lambda} < \min\left(\rho, \frac{1}{2}\right)$, *то*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\ln\mu(r)}{\ln r} \geqslant \tilde{\lambda}. \tag{2.14$_3'$}$$

Действительно, взяв α, $^1/_2 > \alpha > \rho$, из (2.14$_2$) получим ($\operatorname{ctg}\pi\alpha > 0$)

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\ln\mu(r)}{\ln r} \geqslant \rho,$$

но строгого неравенства здесь, очевидно, не может быть. Аналогично из (2.14$_3$) получается (2.14$_3'$). Соотношение (2.14$_2'$) было впервые получено Ж. Валироном [12]. У Б. Чельберга [8] приводится более сильное соотношение, чем (2.14$_3'$), но мы не смогли восстановить его доказательство.

Теорема 2.4. *Пусть* $f(z)$ *мероморфная функция рода нуль. Тогда справедливы следующие соотношения* $\left(\textit{всюду } 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}\right)$:

1) *Для всех* $\alpha > \tilde{\lambda}$ *и* $\neq \rho$

$$\varlimsup_{r\to\infty} [\ln\mu(r) - \cos\pi\alpha \ln M(r) + \pi\alpha\sin\pi\alpha N(r, \infty)] = +\infty, \tag{2.17$_4$}$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} [\cos\pi\alpha\ln\mu(r) - \ln M(r) + \pi\alpha\sin\pi\alpha N(r, 0)] = +\infty. \tag{2.18$_4$}$$

2) *Для всех* $\alpha > \rho$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\{\ln\mu(r) - \cos\pi\alpha\ln M(r) + \pi\alpha\sin\pi\alpha N(r, \infty)\}}{\ln r} \geqslant \rho, \tag{2.17$_2$}$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}[\cos\pi\alpha\ln\mu(r) - \ln M(r) + \pi\alpha\sin\pi\alpha N(r, 0)]}{\ln r} \geqslant \rho. \tag{2.18$_2$}$$

3) *Если* $\tilde{\lambda} < \rho$ *и* $\tilde{\lambda} < \alpha < \rho$, *то в правых сторонах неравенств* (2.17$_2$), (2,18$_2$) *надо заменить* ρ *на* $\tilde{\lambda}$, *(полученные неравенства будем обозначать* (2.17$_3$), (2.18$_3$)).

4) *Если* $\tilde{\lambda} < \rho$ *и* $0 < \alpha < \rho$, *то*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\left\{\ln\frac{1}{\mu(r)} + \cos\pi\alpha\ln M(r) - \pi\alpha\sin\pi\alpha N(r, \infty)\right\}}{\ln r} \geqslant \rho, \tag{2.17$_2'$}$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}\left\{\ln M(r) + \cos\pi\alpha\ln\frac{1}{\mu(r)} - \pi\alpha\sin\pi\alpha N(r, 0)\right\}}{\ln r} \geqslant \rho. \tag{2.18$_2'$}$$

В случае, когда $f(z)$ — *целая функция, условие* $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$ *можно заменить на* $0 < \alpha < 1$.

Доказательство (2.17$_4$), (2.17$_2$), (2.17$_3$) проводится точно так же, как доказательство предыдущей теоремы, причем берем $\theta_1(x) = \theta^{(4)}(x)$, $\theta_2(x) = \pi\alpha\sin\pi\alpha\theta^{(2)}(x) + \cos\pi\alpha\theta^{(4)}(x)$. Условие $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ является следствием требования $\cos \pi\alpha \geqslant 0$*. Но, если $f(z)$ — целая функция, то $\theta(x) = \theta_1(x)$ и требование $\cos \pi\alpha \geqslant 0$ отпадает. Соотношения (2.18$_4$), (2.18$_2$), (2.18$_3$) являются непосредственными следствиями из (2.17$_4$), (2.17$_2$), (2.17$_3$), так как $\ln M(r, f) = -\ln \mu(r, 1/f)$, $\ln \mu(r, f) = -\ln M(r, 1/f)$, $N(r, \infty, f) = N(r, 0, 1/f)$.

Выше мы не использовали утверждения (2.8$_1$) теоремы 2.2, так как, если $f(z)$ имеет бесконечное число нулей и бесконечное число полюсов, неравенства, которые мы могли бы получить отсюда, тривиальны. В случае, когда $f(z)$ — целая функция **, можно сделать дополнительные высказывания.

Теорема 2.5. *Пусть $g(z)$ — целая функция рода нуль. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mu(r)}{N(r, 0)} \geqslant \pi\tilde{\lambda} \operatorname{ctg} \pi\tilde{\lambda}, \tag{2.19}$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0)}{\ln M(r)} \geqslant \frac{\sin \pi\tilde{\lambda}}{\pi\tilde{\lambda}}, \tag{2.20}$$

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 0)}{\ln M(r)} \leqslant \frac{\sin \pi\rho}{\pi\rho}, \tag{2.20'}$$

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln \dfrac{M(r)}{\mu(r)}}{N(r, 0)} \leqslant \pi\tilde{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi\tilde{\lambda}}{2}, \tag{2.21}$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mu(r)}{\ln M(r)} \geqslant \cos \pi\tilde{\lambda}. \tag{2.22}$$

Докажем, например, (2.19). Воспользуемся (2.14$_4$) и учтем, что $N(r, \infty) \equiv 0$. Тогда для некоторой последовательности $r_k \to \infty$ $\ln \mu(r_k) - \pi\alpha \operatorname{ctg} \pi\alpha\, N(r_k, 0) \geqslant 0$ и, следовательно,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mu(r)}{N(r, 0)} \geqslant \pi\alpha \operatorname{ctg} \pi\alpha.$$

Так как α можно выбирать сколь угодно близко к $\tilde{\lambda}$, получим (2.19). Аналогично получаем (2.20), (2.21), (2.22) из (2.15$_4$), (2.16$_4$), (2.17$_4$). Для того, чтобы получить (2.20′) надо использовать теорему 2.2 (формулу (2.8$_1$), и применить ее, как раньше, к функции $\theta(x) = \theta^{(2)}(x)$ и последовательности $|a_\nu|$. Тогда для всех $\alpha < \rho$

$$\varliminf_{r\to\infty} \left[N(r, 0) - \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \ln M(r) \right] \leqslant 0.$$

Отсюда следует

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 0)}{\ln M(r)} \leqslant \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}.$$

Так как α можно выбрать сколь угодно близко к ρ, то справедливо (2.20′).

Здесь мы использовали (2.8$_1$) для «обращения» только (2.20), так как «обращения» (2.19), (2.21), (2.22) с помощью (2.8$_1$) тривиальны, поскольку на некоторой последовательности $r_k \to \infty$ $\mu(r_k) = 0$.

---

* Если бы мы не ссылались на замечание 3, а непосредственно проверили, при каких α $\theta_2(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2, то, вместо условия $0 < \alpha \leqslant 1/2$, получили бы несколько лучшее $0 < \alpha < \alpha_0$, где $\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi\alpha_0}{2} = \pi\alpha_0$.

** Если $f(z)$ мероморфная функция без нулей, то $1/f(z)$ — целая функция, и ничего существенно нового не получаем.

Замечание. Утверждения (2.22) и (для случая целых функций) (2.17_2) были получены впервые Б. Чельбергом [8]*. Соотношения (2.19), (2.20), в которых вместо $\tilde{\lambda}$ стояло ρ, и для случая целых функций соотношения (2.14_2), (2.15_2) были получены Ж. Валироном [12].

Из предыдущих теорем можно вывести ряд новых предложений, если воспользоваться понятиями неванлинновского и валироновского дефектов мероморфной функции.

Теорема 2.6. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция нулевого рода. Тогда*

$$1)\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overset{+}{\ln}\mu(r)}{T(r)}\geqslant\frac{\pi\tilde{\lambda}}{\sin\pi\tilde{\lambda}}\left[\cos\pi\tilde{\lambda}-1+\delta(\infty)\right]. \qquad (2.23)$$

2) *Если* $\tilde{\lambda}\leqslant\frac{1}{2}$, *то*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\mu(r)}{T(r)}\geqslant\frac{\pi\tilde{\lambda}}{\sin\pi\tilde{\lambda}}\left[\delta(\infty)-1+\cos\pi\tilde{\lambda}\,(1-\Delta(0))\right]. \qquad (2.24)$$

3) *Если* $\tilde{\lambda}\geqslant\frac{1}{2}$, *то*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\mu(r)}{T(r)}\geqslant\frac{\pi\tilde{\lambda}}{\sin\pi\tilde{\lambda}}\left[\delta(\infty)-1+\cos\pi\tilde{\lambda}\,(1-\delta(0))\right]. \qquad (2.25)$$

4) *Если* $M(r,f)\to\infty$ *при* $r\to\infty$ *и* $\tilde{\lambda}\leqslant\frac{1}{2}$, *то*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\mu(r,f)}{\ln M(r,f)}+\pi\tilde{\lambda}\sin\pi\tilde{\lambda}\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,f)}{\ln M(r,f)}\geqslant\cos\pi\tilde{\lambda}. \qquad (2.26)$$

Доказательство. Из (2.14_4) следует, что для всех $\alpha>\tilde{\lambda}$, $\alpha\neq\rho$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\mu(r)}{T(r)}+\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}\left\{\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,\infty)}{T(r)}+\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(-\cos\pi\alpha\frac{N(r,0)}{T(r)}\right)\right\}\geqslant 0.$$

Учитывая, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(-\cos\pi\alpha\frac{N(r,0)}{T(r)}\right)=\begin{cases}-\cos\pi\alpha\,\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{N(r,0)}{T(r)} & \text{при } 1>\alpha\geqslant\dfrac{1}{2}\\[2ex] -\cos\pi\alpha\,\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{N(r,0)}{T(r)} & \text{при } 0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

и переходя к пределу $\alpha\to\tilde{\lambda}$, получим (2.24), (2.25). Заметим теперь, что $\mu(r,f-a)=\mu(r,f)+O(1)$, поэтому $\overset{+}{\ln}\mu(r,f-a)=\overset{+}{\ln}\mu(r,f)+O(1)$. Легко видеть, что $\delta(\infty,f-a)=\delta(\infty,f)$, $\Delta(\infty,f-a)=\Delta(\infty,f)$, действительно, $T(r,f-a)=T(r,f)+O(1)$, $N(r,f-a)=N(r,f)$.

По известной теореме Валирона ([13], стр. 280) существует такое конечное число a, что $N(r,a,f)\sim T(r,f)$, т. е. для этого a $\Delta(a,f)=$

* В цитируемой статье Чельберг утверждает, что (2.17_2) для целых функций имеет место для всех $\alpha>\tilde{\lambda}$, но его аргументы не представляются нам убедительными.

$=\Delta(0, f-a)=0$, $\delta(a, f)=\delta(0, f-a)=0$. Записав (2.24) и (2.25) для функции $f-a$ и заметив, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overset{+}{\ln}\mu(r, f)}{T(r, f)}=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overset{+}{\ln}\mu(r, f-a)}{T(r, f-a)}\geqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\mu(r, f-a)}{T(r, f-a)},$$

получим (2.23).

Из (2.17_4) следует, что для всех α, $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, $\alpha>\tilde{\lambda}$, $\alpha\neq\rho$

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\mu(r)}{\ln M(r)}+\pi\alpha\sin\pi\alpha\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r, \infty)}{\ln M(r)}\geqslant\cos\pi\alpha.$$

(Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что при $r>r_0$ $\ln M(r)>0$). Теперь, устремляя $\alpha\to\tilde{\lambda}$, получим (2.26).

Замечание 1. Условие $M(r, f)\to\infty$ при $r\to\infty$ в 4) является естественным. Действительно, если бы $\varliminf_{r\to\infty} M(r, f)<\infty$, то $N(r, f)\to\infty$ и $\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r, f)}{\ln M(r, f)}=+\infty$. Можно ли снять ограничение $\tilde{\lambda}<\frac{1}{2}$, мы не знаем. Во всяком случае его можно заменить более слабым ограничением $\tilde{\lambda}<\alpha_0$, где α_0 — число определенное в подстрочном примечании на стр. 32. Если $f(z)$ — целая функция, то ограничение $\tilde{\lambda}<\frac{1}{2}$ можно отбросить (см. (2.22)).

Замечание 2. Можно тем же методом получить многочисленные предложения, аналогичные теореме 2.6, используя другие соотношения из теорем 2.3, 2.4. Мы ограничились самыми, на наш взгляд, интересными.

Замечание 3. Все полученные в этом параграфе неравенства для некоторых функций переходят в равенства. Чтобы строить примеры таких функций, удобно воспользоваться целыми функциями $g_2(z)$ (см. доказательство теоремы 2.1) и их частными.

Из (2.23) вытекает

Следствие. *Если для мероморфной функции $f(z)$ нулевого рода $\tilde{\lambda}<\frac{1}{2}$ и $\delta(\infty, f)>1-\cos\pi\tilde{\lambda}$, то существует последовательность окружностей $|z|=r_n\to\infty$, на которой $f(z)$ равномерно относительно $\arg z$ стремится к ∞, и, следовательно, ∞ является единственным дефектным значением $f(z)$.*

В заключение рассмотрим некоторые приложения доказанных выше теорем к изучению произведений Бляшке для полуплоскости. В отличие от того, что мы получили в конце § 1, нам приходится здесь ограничиться рассмотрением произведений Бляшке нулевого рода, т. е.

$$B(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-\frac{z}{a_\nu}}{1-\frac{z}{\bar{a}_\nu}}=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\bar{a}_\nu}\right)},$$

где $Im\, a_\nu>0$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^{-1}<\infty$. К произведениям Бляшке нулевого рода можно приложить выводы полученных в этом параграфе теорем с учетом того, что $N(r, 0, B) = N(r, \infty, B)$, $M(r, B) = \mu^{-1}(r, B)$, при $r > 0$ $M(r, B) > 1$, $\mu(r, B) < 1$. Отметим еще, что при независимом выводе следующего следствия выкладки становятся заметно короче, если использовать функцию $\theta^{(3)}(x)$ из леммы 2.1.

Следствие. *Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке (для полуплоскости) рода нуль, $0 < \alpha < 1$. Тогда*

1) *Для всех $\alpha > \tilde{\lambda}$ и $\neq \rho$*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \left\{ \pi\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} N(r, 0) - \ln M(r) \right\} = +\infty.$$

2) *Для всех $\alpha > \rho$*

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overset{+}{\ln} \left\{ \pi\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} N(r, 0) - \ln M(r) \right\}}{\ln r} \geqslant \rho.$$

3) *Если $\tilde{\lambda} < \rho$ и $\tilde{\lambda} < \alpha < \rho$, то*

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overset{+}{\ln} \left\{ \pi\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} N(r, 0) - \ln M(r) \right\}}{\ln r} \geqslant \tilde{\lambda}.$$

4) *Если $\tilde{\lambda} < \rho$ и $0 < \alpha < \rho$, то*

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overset{+}{\ln} \left\{ \ln M(r) - \pi\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} N(r, 0) \right\}}{\ln r} \geqslant \rho.$$

5) *При любых $\tilde{\lambda} \leqslant \rho < 1$*

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{N(r, 0)} \leqslant \pi\tilde{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi\tilde{\lambda}}{2}.$$

Дадим теперь оценку $\delta(0, B) = \delta(\infty, B)$, несколько уточняющую оценку О. Тейхмюллера (1.36′).

Теорема 2.7. *Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке нулевого рода. Тогда*

$$\delta(0, B) = \delta(\infty, B) \leqslant 1 - \cos \frac{\pi\tilde{\lambda}}{2}, \tag{2.27}$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln N(r, 0, B)}{\ln r} = \rho. \tag{2.28}$$

Пусть

$$B(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{a_\nu}}{1 - \frac{z}{\bar{a}_\nu}}, \quad \hat{B}(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{i|a_\nu|}}{1 + \frac{z}{i|a_\nu|}}, \quad Im\, a_\nu > 0, \ \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{-1} < \infty.$$

Из теоремы одного из авторов [6] следует, что* $\delta(0, B) \leqslant \delta(0, \hat{B})$, поэтому (2.27) достаточно доказать для $\hat{B}(z)$.

* Для произведений Бляшке это нетрудно доказать непосредственно.

Обозначим

$$\tau(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \ln\left|\frac{i+re^{i\varphi}}{i-re^{i\varphi}}\right|d\varphi,\quad r>0,$$

$$\theta^{(5)}(x)=\left(\sec\frac{\pi\alpha}{2}-1\right)\overset{+}{\ln}\,x-\tau(x).$$

Легко видеть, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau\left(\frac{r}{|a_\nu|}\right)=m(r,0,\widehat{B}).$$

Можно проверить, что функции $\varphi(x)=\ln(1+x)$, $\theta(x)=\theta^{(5)}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Действительно, очевидно, условия 1), 2), 5), 6) выполняются при $\alpha>0$. Выполнение условия 3) следует из формулы (1.26′), где надо положить $r_\nu=1$, $\varphi_\nu=\frac{\pi}{2}$ (в данном случае интеграл в 3) равен 0). Легко проверить также выполнение условия 4), если заметить, что при $r\to 0$

$$\tau(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \ln\left|1+\frac{2re^{i\varphi}}{i-re^{i\varphi}}\right|d\varphi\sim Re\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{2re^{i\varphi}}{i}\,d\varphi=\frac{2}{\pi}r$$

и при $r\to\infty$

$$\tau(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \ln\left|1-\frac{2i}{1-re^{i\varphi}}\right|d\varphi\sim \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{2i}{re^{i\varphi}}\,d\varphi=\frac{2}{\pi r}.$$

Мы имеем

$$\Theta(r)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\theta\left(\frac{r}{|a_\nu|}\right)=\left(\sec\frac{\pi\alpha}{2}-1\right)N(r,0,\widehat{B})-m(r,0,\widehat{B})=$$

$$=\sec\frac{\pi\alpha}{2}N(r,0,\widehat{B})-T(r,\widehat{B}).$$

Из (2.7_1) следует, что для всех $\alpha>\tilde{\lambda}$ и $\neq\rho$

$$\varlimsup_{r\to\infty}\left[\sec\frac{\pi\alpha}{2}N(r,0,\widehat{B})-T(r,\widehat{B})\right]\geqslant 0,$$

откуда

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r,0,\widehat{B})}{T(r,\widehat{B})}\geqslant\cos\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Устремляя $\alpha\to\tilde{\lambda}$, получим (2.27). Соотношение (2.28) следует из (2.7_2).

Замечание 1. Из (2.8_1) следует, что для $0<\alpha<\rho$

$$\varliminf_{r\to\infty}\left[\sec\frac{\pi\alpha}{2}N(r,0,\widehat{B})-T(r,\widehat{B})\right]\leqslant 0,$$

откуда получаем

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,0,\widehat{B})}{T(r,\widehat{B})}\leqslant\cos\frac{\pi\rho}{2}$$

и

$$\Delta(0,\widehat{B})=\Delta(\infty,\widehat{B})\geqslant 1-\cos\frac{\pi\rho}{2}.$$

Замечание 2. Теорема 2.7 слабее результатов § 1, поскольку совершенно не учитывает распределения нулей и полюсов $B(z)$ по аргументам, но в случае $\tilde{\lambda} < \rho$ утверждение теоремы 2.7 не следует из теорем § 1. Получить теорему 1.7, опираясь на теорему 2.2, нам не удалось. Правда, опираясь на теорему 2.2 и следуя методу О. Тейхмюллера [16], можно усилить следствие из теоремы 1.7—неравенство (1.37′)—введя в рассмотрение величину $\tilde{\lambda}$. Однако нам не представляется оправданным включение в статью соответствующих достаточно громоздких выкладок.

Авторы выражают признательность проф. Б. Я. Левину за постоянный интерес к их работе и ценные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. A. Wiman. Sur une extension d'un théorème de M. Hadamard, Arkiv för mat. astr. och fysik, **2** (1905), № 2.

[2]. A. Wiman. Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null, Math. Ann., **76** (1915), 197—211.

[3]. A. Dinghas. Über das Phragmèn — Lindelöfsche Prinzip und einige andere verwandte Sätze, Sitzungsberichten der Preuβ. Akad. Wiss. d. Math-Phys. Kl., (1938), 123—140.

[4]. G. Pólya. On the minimum modulus of integral functions, J. London Math. Soc., **1** (1926), 78—86.

[5]. Е. Титчмарш. Теория функций, М.—Л., 1951.

[6]. А. А. Гольдберг. О дефектах мероморфных функций, «ДАН СССР», **98** (1954), 893—895.

[7]. А. А. Гольдберг. Некоторые асимптотические свойства мероморфных функций, «Уч. зап. Львовского ун-та», сер. мех.-мат., **38** (1956), вып. 7, 54—74.

[8]. B. Kjellberg. A relation between the maximum and minimum modulus of a class of entire functions, 12-te Scand. matematikerkongr. Lund, 1953 (1954), 135—138.

[9]. W. K. Hayman. The growth of entire and subharmonic functions, Lectures on functions of a complex variable, Ann Arbor, 1955, 187—198.

[10]. А. А. Гольдберг. О мероморфных функциях с разделенными нулями и полюсами, «Известия вузов», Математика, (1960), № 4, 67—72.

[11]. A. Denjoy. Sur un théorème de Wiman, C. R. Acad. sci., **193** (1931), 828—830.

[12]. G. Valiron. Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre inférieur a un, Mathematica, **11** (1935), 264—269.

[13]. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.

[14]. R. Nevanlinna. Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum, Acta Soc. Sci. Fenn., **50** (1925), № 12, 1—47.

[15]. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 3 изд., ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

[16]. O. Teichmüller. Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung. Deutsche Math., **4** (1939), 163—190.

[17]. W. K. Hayman. Questions of regularity connected with the Phragmèn—Lindelöf principle, J. math. pures et appl., **35** (1956), 115—126.

[18]. G. Valiron. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions a correspondance régulière. Ann. de la faculté des sci. de l'univ. de Toulouse, **5**, 1913 (1914), 117—257.