УДК 517. 98+519.2

Р. ПИШЕЛЬ, А. А. ЯНЦЕВИЧ

ДИЛАТАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Будем изучать линейные преобразования случайного процесса $x(t)$, рассматриваемого как кривая в гильбертовом пространстве $H_x =$ л. з. о. $\left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k),\ t_k \in R_1,\ c_k \in \boldsymbol{C} \right\}$.

Случайный процесс $y(t)$ называется *дилатацией* r-го ранга случайного процесса $x(t)$, если существует оператор в H_x $B \in [H_x, H_x]$ такой, что

$$y(t) = Bx(t), \tag{1}$$

$$\dim (I - B^*B) H = r. \tag{2}$$

Если $x(t)$ — стационарный в широком смысле случайный процесс, а B — унитарный оператор, то дилатация $Bx(t)$ является дилатацией О-го ранга и корреляционные функции $K_x(t-s)$ и $K_y(t-s)$ совпадают.

Дилатации случайных процессов рассматривались в работах [1, 2]. Однако вопрос о том, каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять корреляционная функция случайного процесса, чтобы процесс был дилатацией другого случайного процесса не изучался.

Теорема. *Для того чтобы случайный процесс $y(t)$ был дилатацией первого ранга стационарного в широком смысле случайного процесса $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы его корреляционная функция имела вид:*

$$K_y(t, s) = K_x(t-s) - \Phi(t)\overline{\Phi(s)}, \tag{3}$$

где $K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda)$, $dF(\lambda) = M|z(d\lambda)|^2$, $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} df(\lambda)$,

$$df(\lambda) = Mz(d\lambda)\bar{g} = (z(d\lambda), g)_{H_x};$$

здесь $z(d\lambda)$ — стандартная случайная мера, т. е. такая случайная функция, определенная на некотором полукольце $\boldsymbol{R}$ множеств $\Delta \in R_1$, которой выполняются следующие условия:

$$z(\Delta_1 U \Delta_2) = z(\Delta_1) + z(\Delta_2),\ \forall \Delta_1,\ \Delta_2 \in \boldsymbol{R},\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = \Phi,$$

$$M|z(\Delta)|^2 < \infty,\ \forall \Delta \in \boldsymbol{R},$$

$$Mz(\Delta_1)\overline{z(\Delta_2)} = 0, \quad \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \boldsymbol{R}, \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \Phi,$$

$g \in H_x$ — фиксированный элемент (напомним, что $K_x(t, s) = Mx(t)\overline{x(s)} = (x(t), x(s))_{H_x}$).

Доказательство. *Необходимость.* Случайный процесс является стационарным тогда и только тогда, когда он представим в виде $x(t) = U_t x(0)$, $t \in R_1$, где U_t — группа унитарных операторов. Если инфинитеземальный оператор группы A, то имеем представление для стационарного случайного процесса:

$$x(t) = e^{itA} x(0), \tag{4}$$

где

$$A = A^* \in [D(A),\ H_x].$$

Пусть

$$(I - B^*B) H_x = E, \text{ где } B \in [H_x,\ H_x], \tag{5}$$

по условию $\dim E = 1$, неунитарную часть оператора B представим в виде (см. [3])

$$I - B^*B = DD^*, \text{ где } H_x \xrightarrow{D^*} \mathrm{E} \xrightarrow{D} H_x, \tag{6}$$

так как $\dim E = 1, \Rightarrow \exists e \in \mathrm{E},\ \forall a \in \mathrm{E},\ \exists c \in \boldsymbol{C},\ a = ce,$

где $(e,\ e)_E = 1$ и $c = (a,\ e)_E$.

Обозначим

$$De = g \in H_x, \tag{7}$$

тогда имеем

$D^*h \in E \Rightarrow \exists c$: $D^*h = ce$ и $c = (D^*h,\ e)_E$ из (6), (7) $\forall h \in H_x$ получаем

$$(I - B^*B)\,h = DD^*h = D\,(D^*h,\ e)_E e = (h,\ De)_{H_x} De = (h,\ g)_{H_x} g. \tag{8}$$

Вычислим сейчас корреляционную функцию дилатации первого ранга, используя (1) и (8):

$$K_y(t,\ s) = (y(t),\ \ y(s)) = (Bx(t),\ \ Bx(s))_{H_x} = (B^*Bx(t),\ \ x(s))_{H_x} =$$
$$= ((I - DD^*)\,x(t),\ \ x(s))_{H_x} = K_x(t - s) - (x(t),\ g)_{H_x}(g,\ \ x(s))_{H_x},$$

обозначим

$$\Phi(t) = (x(t),\ g)_{H_x}, \tag{9}$$

тогда

$$K_y(t,\ s) = K_x(t - s) - \Phi(t)\,\overline{\Phi(s)}.$$

Стационарный процесс $x(t)$ можно представить с помощью его спектрального разложения:

$$x(t) = U_t x(0) = e^{itA} x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} z(d\lambda), \tag{4}$$

где $z(d\lambda)$ — случайная мера $z(d\lambda) = E(d\lambda)\,x(0)$, $E(\Delta)$ — спектральное семейство самосопряженного оператора A.

Поэтому

$$K_x(t - s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\lambda} dF(\lambda); \tag{10}$$

где

$$dF(\lambda) = (z(d\lambda),\ z(d\lambda))_{H_x}$$

Тогда

$$\Phi(t)=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} z(d\lambda),\ g\right)_{H_x}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} df(\lambda), \tag{9}$$

где

$$df(\lambda)=(z(d\lambda),\ g)_{H_x}.$$

Необходимость доказана, но можно еще уточнить вид $df(\lambda)$. Для этого воспользуемся спектральным представлением произвольного элемента из H_x с помощью его спектральной характеристики

$$g=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\, z(d\lambda), \tag{11}$$

$$\left(\forall g\in H_x\ \exists\varphi(\lambda)\in L^2(F),\ g=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\, z(d\lambda)\right).$$

Тогда получаем из (9):

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\left(z(d\lambda),\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mu)\, z(d\mu)\right)_{H_x}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\overline{\varphi(\lambda)}\, dF(\lambda),\ \Rightarrow df(\lambda)=\overline{\varphi(\lambda)}\, dF(\lambda)=$$

$$=\overline{\varphi(\lambda)}\,(z(d\lambda),\ z(d\lambda))_{H_x}. \tag{12}$$

Достаточность. Ради простоты будем считать, что $F(\lambda)$ дифференцируемая функция $dF(\lambda)=F'(\lambda)\, d\lambda$. Тогда в (12) $\Phi(t)$ является преобразованием Фурье функции $\overline{\varphi(\lambda)}\, F'(\lambda)$ и тем самым с помощью формулы обращения можно восстановить $\varphi(\lambda)$ по $\Phi(t)$:

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\overline{\varphi(\lambda)}\, F'(\lambda)\, d\lambda,\\ \varphi(\lambda)&=[2\pi F'(\lambda)]^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\overline{\Phi(t)}\, dt.\end{aligned} \tag{13}$$

По предположению корреляционная функция случайного процесса имеет вид (3), где

$$K_x(t-s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\lambda} dF(\lambda)=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} z(d\lambda),\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu s} z(d\mu)\right)_{Hx} -$$

корреляционная функция некоторого стационарного процесса,

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(z(d\lambda),\ g)_{H_x},$$

где g — некоторый фиксированный элемент из H_x.

Воспользуемся интегральным представлением (11) произвольного элемента из H_x и выражением (13) спектральной характеристики

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [2\pi F'(\lambda)]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \overline{\Phi(t)}\, dt \right\} z(d\lambda). \tag{14}$$

Рассматриваем произвольный ограниченный оператор $B \in [H_x, H_x]$, удовлетворяющий единственному условию:

$$(I - B^*B)\, h = (h, g)_{H_x} g, \tag{15}$$

где g — фиксированный элемент из H_x. (Таких операторов существует бесчисленное множество, о построении см. [3]).

Тогда из (3), (14), (15) имеем:

$$K_y(t, s) = K_x(t - s) - \Phi(t)\overline{\Phi(s)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)} F(d\lambda) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} z(d\tau),\ g \right)_{H_x} \left(g,\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\mu} z(d\mu) \right) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} z(d\lambda),\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\xi} z(d\xi) \right)_{Hx} - ((I - B^*B)\, x(t), x(s))_{H_x} =$$

$$= (x(t),\ x(s))_{H_x} - ((I - B^*B)\, x(t),\ x(s))_{Hx} = (Bx(t),\ Bx(s))_{Hx},$$

$$y = UBx(t),$$

где U — унитарный оператор.

Замечание 1. Теорему можно обобщить на случай $1 < r < \infty$, т. е. для дилатации r-го ранга стационарного процесса $x(t)$. Тогда корреляционная функция имеет вид:

$$K_y(t, s) = K_x(t - s) - \sum_{\alpha=1}^{r} \Phi_\alpha(t)\overline{\Phi_\alpha(s)},$$

где

$$\Phi_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} df_\alpha(\lambda).$$

Замечание 2. Можно изучать и дилатации нестационарных случайных процессов конечного ранга (см. [3]). В этом случае легко показать, что корреляционная функция дилатации r-го ранга нестационарного диссипативного случайного процесса ρ-го ранга имеет вид

$$K_y(t, s) = \int_0^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\rho} \varphi_\alpha(t + \tau)\overline{\varphi_\alpha(s + \tau)}\, d\tau - \sum_{k=1}^{r} \Phi_k(t)\overline{\Phi_k(s)},$$

где $x(t) = e^{itA}x(0)$, $\dim 2\mathrm{Im}\, AH_x = \rho$, $y(t) = Bx(t)$, $\dim(I - B^*B)\, H_x = r$, $\varphi_\alpha(t) = (e^{itA}x(0), h_\alpha)$, h_α — каналовые элементы локального комплекса, содержащего несамосопряженный оператор A, $\Phi_k(t) = (e^{itA}x(0), g_\alpha)$, g_α — каналовые элементы метрического комплекса, содержащего неунитарный оператор B.

Список литературы: 1. *Niemi N*. On the linear prediction problem of certain non — stationary stochastic processes. — Math. Scand., 1976, **39**, p. 146—160. 2. *Niemi N*. On stationary dilations and stochastic processes. — Commen. P.—M., 1975, **45**, p. 111—130. 3. *Лившиц М. С.*, *Янцевич А. А.* Операторные узлы в гильбертовых пространствах. — Х.: Изд-во при ХГУ, 1971.—154 с.

Поступила в редколлегию 30. 01. 85.