разумѣя подъ f_k функціи одного t, то для опредѣленія послѣднихъ получимъ уравненія вида:

$$\frac{df_k}{dt} + k\lambda\sqrt{-1}f_k = F_k. \tag{55}$$

Но при нашемъ предположеніи относительно λ такое уравненіе, когда k не нуль, доставитъ для функціи f_k вполнѣ опредѣленное выраженіе требуемаго характера, и выраженіе это, при сдѣланномъ допущеніи относительно F_k, представитъ періодическую функцію t. Поэтому функція $u^{(l)}$ только въ томъ случаѣ можетъ оказаться по отношенію къ t неперіодическою, когда такою будетъ функція f_0.

Но допустимъ, что послѣдняя выходитъ періодическою, для чего, конечно, должно быть выполнено условіе

$$\int_0^\omega F_0\,dt = 0.$$

Тогда, переходя къ функціямъ $u_s^{(l)}$ и принимая въ разсчетъ извѣстное свойство корней уравненія (43), легко докажемъ, что и эти функціи выйдутъ періодическими.

Отсюда слѣдуетъ, что если между функціями $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, начиная съ извѣстнаго значенія l, появляются относительно t неперіодическія (а это и будетъ имѣть мѣсто въ большинствѣ случаевъ), то такія найдутся уже въ ряду функцій

$$u^{(2)},\quad u^{(3)},\quad u^{(4)},\quad \ldots, \tag{56}$$

и что если первая неперіодическая въ этомъ ряду есть $u^{(m)}$, то функціи

$$u_s^{(1)},\quad u_s^{(2)},\quad \ldots,\quad u_s^{(m-1)} \qquad {\scriptstyle (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)}$$

всѣ будутъ періодическими, а функція $u^{(m)}$ будетъ вида

$$u^{(m)} = gt + v,$$

гдѣ g отличная отъ нуля постоянная, а v конечный рядъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ съ періодическими относительно t коэффиціентами.

Предполагая, что мы имѣемъ дѣло съ этимъ случаемъ, и что вычисленіе ведется такъ, чтобы всѣ $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ для вещественныхъ значеній ϑ и t были вещественными, полагаемъ

$$r = z + u^{(2)}z^2 + u^{(3)}z^3 + \ldots + u^{(m-1)}z^{m-1} + vz^m,$$

$$x_s = u_s^{(1)}z + u_s^{(2)}z^2 + u_s^{(3)}z^3 + \ldots + u_s^{(m-1)}z^{m-1} + z_s$$
$$(s=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

и вмѣсто перемѣнныхъ r, x_s вводимъ въ систему (52) перемѣнныя z, z_s.

Преобразованная система будетъ вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} = zZ, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta, \\ &\frac{dz_s}{dt} = p_{s1}z_1 + p_{s2}z_2 + \dots + p_{sn}z_n + Z_s, \\ &\qquad\qquad (s=1,\,2,\,\dots,\,n) \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

и функціи Z, Θ, Z_s (по отношенію къ перемѣннымъ z, z_σ, ϑ, t) будутъ въ ней такого же характера, какъ и функціи R, Θ, X_s (по отношенію къ перемѣннымъ r, x_σ, ϑ, t) въ системѣ (52). При томъ, по свойству нашего преобразованія, функціи Z, Z_s выйдутъ такими, что если $Z^{(0)}$, $Z_s^{(0)}$ суть функціи перемѣнныхъ z, ϑ, t, въ которыя онѣ обращаются при $z_1 = \dots = z_n = 0$, то въ разложеніи $Z^{(0)}$ по восходящимъ степенямъ z наинизшая степень будетъ $m-1^{\text{ая}}$ и степень эта будетъ сопровождаться постояннымъ коэффиціентомъ g, а въ разложеніяхъ $Z_s^{(0)}$ не будетъ степеней z ниже $m^{\text{ой}}$.

Наша задача приведется при этомъ къ задачѣ объ устойчивости по отношенію къ величинамъ z, z_s, при рѣшеніи которой можно будетъ поставить условіе $z \geqq 0$.

Примѣчаніе 1. — Каждая изъ функцій $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ можетъ заключать въ себѣ извѣстное число произвольныхъ постоянныхъ. Но послѣднія всѣ будутъ приводиться къ тѣмъ, которыя могутъ входить въ функціи $u^{(l)}$ подъ видомъ постоянныхъ членовъ, и на какомъ бы выборѣ этихъ постоянныхъ мы ни останавливались, для m и g будемъ получать всегда одни и тѣ же числа.

Можно замѣтить, что число m всегда будетъ нечетнымъ (слѣд. пар., примѣч.).

Примѣчаніе 2. — Если бы число $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ было соизмѣримымъ, то уравненіе (55) могло бы не имѣть періодическаго рѣшенія и при отличномъ отъ нуля k, а потому въ этомъ случаѣ первая непеpіодическая въ ряду функцій (56) могла бы и не быть указаннаго выше типа. Но всякій разъ, когда и при соизмѣримомъ $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ (сюда включаемъ мы и случай $\lambda = 0$) вычисленіями можно распорядиться такъ, чтобы функція эта выходила того же типа, для системы (52) будетъ возможно предыдущее преобразованіе, и вмѣстѣ съ тѣмъ будутъ справедливы заключенія, къ которымъ мы приходимъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

Замѣтимъ, что въ случаѣ соизмѣримости числа $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ задача о разысканіи функцій $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ обладаетъ гораздо большею неопредѣленностью, чѣмъ въ разсмотрѣнномъ выше случаѣ, ибо, если $\frac{\lambda\omega}{\pi} = \frac{\alpha}{\beta}$, гдѣ α и β числа цѣлыя, то при опредѣленіи каждой изъ функцій $u^{(l)}$ къ ней можно прибавлять рядъ синусовъ и косинусовъ четныхъ (а при четномъ α — и нечетныхъ) кратностей $\beta(\vartheta - \lambda t)$ съ произвольными постоянными коэффиціентами.

62. Разумѣя подъ $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(m-1)}$ нѣкоторыя линейныя формы величинъ z_s съ коэффиціентами, періодическими относительно ϑ и t *), допустимъ, что

$$zZ = gz^m + P^{(1)}z + P^{(2)}z^2 + \ldots + P^{(m-1)}z^{m-1} + \ldots ,$$

и что выраженіе, входящее во вторую часть до члена $P^{(m-1)}z^{m-1}$ включительно, представляетъ совокупность всѣхъ членовъ функціи zZ, которые, будучи не выше $m^{\text{аго}}$ измѣренія, содержатъ величины z_s въ степеняхъ не выше первой.

Далѣе, разсматривая въ функціяхъ Z_s только члены, линейные относительно величинъ z_σ, и располагая ихъ по восходящимъ степенямъ z, допустимъ, что

$$Z_s = P_s^{(1)}z + P_s^{(2)}z^2 + P_s^{(3)}z^3 + \ldots + \ldots ,$$

гдѣ $P_s^{(j)}$ суть линейныя формы величинъ z_σ съ коэффиціентами такого же характера, какъ и въ формахъ $P^{(j)}$.

Наконецъ, разсматривая въ функціи Θ только члены, не зависящіе отъ величинъ z_s, и располагая ихъ по восходящимъ степенямъ z, допустимъ, что

$$\Theta = \Theta^{(1)}z + \Theta^{(2)}z^2 + \Theta^{(3)}z^3 + \ldots + \ldots ,$$

гдѣ всѣ $\Theta^{(j)}$ суть функціи только двухъ перемѣнныхъ ϑ и t, періодическія относительно той и другой.

Означая теперь черезъ $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(m-1)}$ нѣкоторыя линейныя формы величинъ z_s съ коэффиціентами, періодическими относительно ϑ и t, а черезъ W квадратичную форму тѣхъ же величинъ съ постоянными коэффиціентами, полагаемъ

$$V = z + W + U^{(1)}z + U^{(2)}z^2 + \ldots + U^{(m-1)}z^{m-1},$$

и составивши отъ этой функціи V полную производную по t въ силу уравненій (57), стараемся линейными формами $U^{(j)}$ распорядиться такъ, чтобы въ выраженіи этой производной исчезали всѣ члены, линейные относительно величинъ z_s и содержащіе z въ степеняхъ ниже $m^{\text{ой}}$. Такая задача всегда будетъ возможна и при сдѣланномъ предположеніи относительно коэффиціентовъ формъ $U^{(j)}$ вполнѣ опредѣленна, ибо для рѣшенія ея нужно будетъ только удовлетворить слѣдующей системѣ уравненій:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}z_1 + p_{s2}z_2 + \ldots + p_{sn}z_n)\frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_s} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} + \lambda\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \vartheta} + P^{(k)} +$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left(P_s^{(1)}\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial z_s} + \ldots + P_s^{(k-1)}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s}\right) + \Theta^{(1)}\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial \vartheta} + \ldots + \Theta^{(k-1)}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \vartheta} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m-1)$$

(гдѣ выраженіе, находящееся во второй строкѣ, при $k = 1$ должно быть замѣняемо нулемъ).

---

*) Подъ функціями періодическими относительно ϑ и t мы будемъ разумѣть конечные ряды синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ съ періодическими по отношенію къ t коэффиціентами.

Уравненія эти доставятъ послѣдовательно $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(m-1)}$.

Опредѣливши такимъ образомъ формы $U^{(j)}$, форму W выбираемъ согласно уравненію:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}z_1 + p_{s2}z_2 + \ldots + p_{sn}z_n)\frac{\partial W}{\partial z_s} = g(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2),$$

послѣ чего находимъ:

$$\frac{dV}{dt} = g(z^m + z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2) + S.$$

Здѣсь S означаетъ выраженіе, которое всегда можно представить подъ видомъ

$$S = vz^m + \sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} v_{s\sigma} z_s z_\sigma$$

такъ, чтобы v, $v_{s\sigma}$ были голоморфными функціями величинъ $z, z_1, \ldots, z_n$, уничтожающимися при

$$z = z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$$

и обладающими въ своихъ разложеніяхъ коэффиціентами, періодическими относительно ϑ и t. При томъ вслѣдствіе того, что функціи Z, Θ, Z_s необходимо голоморфны (по отношенію къ величинамъ z, z_σ) въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ и t, такими же можно выбирать и функціи v, $v_{s\sigma}$.

Отсюда видно, что какою бы вещественною функціей t ни выражалось ϑ, производная $\frac{dV}{dt}$ при условіи $z \geqq 0$ будетъ знакоопредѣленною функціей и знакъ ея при достаточно малыхъ z, $|z_s|$ будетъ одинаковъ со знакомъ постоянной g.

Поэтому, замѣчая, что по свойству формы W (пар. 20, теор. II), функція V, при томъ же условіи $z \geqq 0$, для отрицательнаго g опредѣленно-положительна, а для положительнаго можетъ принимать какой угодно знакъ, — на основаніи извѣстныхъ предложеній заключаемъ, что въ случаѣ $g > 0$ невозмущенное движеніе неустойчиво, а въ случаѣ $g < 0$ устойчиво.

Въ послѣднемъ случаѣ всякое возмущенное движеніе, для котораго возмущенія численно достаточно малы, будетъ асимптотически приближаться къ невозмущенному.

Примѣчаніе. — Если бы вмѣсто условія $z \geqq 0$ мы ввели условіе $z \leqq 0$, то подобно тому, какъ въ параграфѣ 37$^{\text{омъ}}$ (примѣч.), пришли бы къ выводу, сопоставленіе котораго съ предыдущимъ обнаружило бы, что m есть число нечетное.

63. Въ изложенномъ уже содержится нѣкоторый способъ для рѣшенія занимающаго насъ вопроса.

Мы укажемъ здѣсь одно изъ видоизмѣненій его, которое, чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, и предложимъ въ качествѣ руководящаго правила.

Разсмотримъ слѣдующую систему уравненій съ частными производными:

$$\left.(-\lambda y+X)\frac{\partial x_s}{\partial x}+(\lambda x+Y)\frac{\partial x_s}{\partial y}+\frac{\partial x_s}{\partial t}=p_{s1}x_1+\dots+p_{sn}x_n+p_s x+q_s y+X_s. \atop (s=1,\,2,\,\dots,\,n)\right\} \quad (58)$$

Весьма нетрудно убѣдиться, что при разсматриваемомъ характерѣ корней уравненія (43) системѣ этой всегда можно формально удовлетворить (и при томъ однимъ только манеромъ) рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x и y, не содержащими членовъ нулевого измѣренія и обладающими періодическими относительно t коэффиціентами.

Хотя о сходимости этихъ рядовъ мы не можемъ сказать ничего опредѣленнаго, но это обстоятельство для насъ здѣсь не имѣетъ важности, такъ какъ намъ придется имѣть дѣло съ суммами только тѣхъ ихъ членовъ, которые не выше извѣстнаго измѣренія.

Предполагая, что m есть то число, о которомъ шла рѣчь въ предыдущихъ параграфахъ, допустимъ, что

$$x_1=f_1(x,\,y,\,t),\quad x_2=f_2(x,\,y,\,t),\quad \dots,\quad x_n=f_n(x,\,y,\,t) \tag{59}$$

суть совокупности членовъ разсматриваемыхъ рядовъ не выше $m-1^{\text{аго}}$ измѣренія.

Тогда, если, означая черезъ (X) и (Y) функціи, въ которыя обращаются X и Y послѣ замѣны величинъ x_s выраженіями (59), будемъ трактовать подобно предыдущему систему уравненій

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda y+(X),\quad \frac{dy}{dt}=\lambda x+(Y), \tag{60}$$

преобразованную посредствомъ подстановки

$$x=r\cos\vartheta,\qquad y=r\sin\vartheta, \tag{61}$$

то при составленіи ряда (56), до члена $u^{(m)}$ включительно будемъ встрѣчать въ немъ прежнія функціи, и такимъ образомъ придемъ къ прежней величинѣ для постоянной g.

Мы предполагали, что функціи X и Y въ системѣ (49) уничтожаются тожественно при $x=y=0$. Мы указали также преобразованіе, посредствомъ котораго всякій другой случай приводится къ такому (пар. 60). Теперь замѣтимъ, что если не имѣемъ дѣла съ этимъ случаемъ, то вмѣсто преобразованія системы (49) можно подвергнуть соотвѣтственному преобразованію систему (60), составленную, какъ сейчасъ было указано *). Если же желательно перейти непосредственно къ перемѣннымъ r и ϑ, то это приведется къ преобразованію системы (60) при помощи нѣкоторой подстановки вида

*) Мы имѣемъ въ виду нашу задачу, для которой члены выше $m^{\text{аго}}$ измѣренія въ дифференціальныхъ уравненіяхъ не могутъ имѣть значенія.

$$x = r\cos\vartheta + F(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta,\ t),\qquad y = r\sin\vartheta + \Phi(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta,\ t),\qquad (62)$$

гдѣ F и Φ означаютъ нѣкоторыя голоморфныя функціи величинъ $r\cos\vartheta$ и $r\sin\vartheta$, *не содержащія въ своихъ разложеніяхъ членовъ ниже второго измѣренія* и обладающія періодическими относительно t коэффиціентами.

Но нетрудно придти къ заключенію, что если бы вмѣсто (62) мы по прежнему воспользовались подстановкой (61), и затѣмъ поступали бы, какъ было указано въ параграфѣ 61омъ, то хотя и получили бы другой рядъ функцій (56), первою неперіодическою въ этомъ ряду по прежнему оказалась бы функція $u^{(m)}$, и разсмотрѣніе ея привело бы къ прежней величинѣ для постоянной g.

Вслѣдствіе этого во всякомъ случаѣ (т. е. каковы бы ни были функціи X и Y) мы можемъ руководствоваться при рѣшеніи нашего вопроса слѣдующимъ правиломъ:

Предполагая, что дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія преобразованы къ виду (49), составляемъ систему частныхъ дифференціальныхъ уравненій (58) и вводя въ нее въ качествѣ независимыхъ перемѣнныхъ вмѣсто x и y перемѣнныя r и ϑ посредствомъ подстановки (61), стараемся этой системѣ удовлетворить (по крайней мѣрѣ формально) *рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ r, не содержащими нулевой степени послѣдняго и обладающими періодическими относительно ϑ и t коэффиціентами* (см. сноску на стр. 228). *Такіе ряды всегда найдутся и будутъ вполнѣ опредѣленными, и если допустимъ, что они подставлены вмѣсто величинъ x_s въ разложенія по степенямъ этихъ величинъ выраженій*

$$\frac{d\vartheta}{dt} - \lambda = \frac{Y\cos\vartheta - X\sin\vartheta}{r} \qquad \text{и} \qquad \frac{dr}{dt} = X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta,$$

то послѣднія представятся рядами

$$\Theta_1 r + \Theta_2 r^2 + \Theta_3 r^3 + \dots,\qquad R_2 r^2 + R_3 r^3 + R_4 r^4 + \dots,$$

расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ r съ періодическими относительно ϑ и t коэффиціентами Θ и R.

Составляя эти коэффиціенты, вмѣстѣ съ тѣмъ составляемъ функціи

$$u_2,\quad u_3,\quad u_4,\quad \dots \qquad (63)$$

перемѣнныхъ ϑ и t, опредѣляемыя условіемъ, чтобы при какомъ угодно цѣломъ k, большемъ 2, въ выраженіи

$$\frac{dr}{dt} + \left(\lambda + \Theta_1 r + \Theta_2 r^2 + \dots + \Theta_{k-2} r^{k-2}\right)\frac{dr}{d\vartheta} - R_2 r^2 - R_3 r^3 - \dots - R_k r^k$$

послѣ подстановки

$$r = c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \dots + u_k c^k$$

исчезали всѣ члены, содержащіе постоянную произвольную c въ степеняхъ ниже $k+1^{\text{ой}}$, *и чтобы каждая изъ функцій (63) представлялась подъ видомъ нѣкотораго конечнаго ряда синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей* ϑ *съ коэффиціентами, представляющими или періодическія функціи* t, *или суммы конечнаго числа періодическихъ и вѣковыхъ членовъ.*

Допустимъ, что мы имѣемъ дѣло съ случаемъ несоизмѣримаго $\frac{\lambda\omega}{\pi}$. *Тогда, составляя функціи (63) до тѣхъ поръ, пока не встрѣтимъ по отношенію къ* t *непеpіодическую, и предполагая, что* u_m *есть первая такая функція* (число m будетъ нечетнымъ), *найдемъ*

$$u_m = gt + v,$$

гдѣ g *означаетъ отличную отъ нуля постоянную, а* v *періодическую функцію* ϑ *и* t. *Вопросъ объ устойчивости при этомъ рѣшится тотчасъ же по знаку постоянной* g, *и въ случаѣ* $g>0$ — *въ отрицательномъ, въ случаѣ* $g<0$ — *въ утвердительномъ смыслѣ.*

Примѣчаніе 1. — Мы предполагали, что коэффиценты $p_{s\sigma}$ въ системѣ (49) суть постоянныя величины. Къ такому случаю путемъ извѣстнаго линейнаго преобразованія приводится, конечно, всякій другой. Но для приложимости указаннаго сейчасъ правила въ подобномъ предварительномъ преобразованіи нѣтъ надобности.

Примѣчаніе 2. — Мы предполагали, что $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ есть число несоизмѣримое. Но если бы и въ случаѣ соизмѣримости этого числа, распоряжаясь надлежащимъ образомъ вычисленіями, мы нашли для первой неперіодической въ ряду функцій (63) выраженіе указаннаго выше типа, то имѣли бы право сдѣлать такія же заключенія объ устойчивости, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Примѣръ. — Пусть предложена слѣдующая система уравненій:

$$\frac{dx}{dt}+\lambda y = z^2\cos t, \quad \frac{dy}{dt}-\lambda x = -z^2\sin t, \quad \frac{dz}{dt}+z = xy,$$

для которой можно принять $\omega = 2\pi$.

Полагая

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

преобразовываемъ ее къ виду

$$\frac{d\vartheta}{dt}-\lambda = -\frac{z^2}{r}\sin(\vartheta+t), \quad \frac{dr}{dt} = z^2\cos(\vartheta+t), \tag{64}$$

$$\frac{dz}{dt}+z = r^2\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Затѣмъ составляемъ уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$\frac{dz}{dt}+\left[\lambda-\frac{z^2}{r}\sin(\vartheta+t)\right]\frac{dz}{d\vartheta}+z^2\cos(\vartheta+t)\frac{dz}{dr}+z = r^2\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

которому стараемся удовлетворить рядомъ, расположеннымъ по восходящимъ цѣлымъ положительнымъ степенямъ r (начиная со второй) и обладающимъ періодическими относительно ϑ и t коэффиціентами.

Рядъ этотъ, очевидно, не будетъ содержать третьей и четвертой степеней r. Поэтому, выписывая только первые два члена, можемъ допустить, что онъ есть слѣдующій:

$$z_2 r^2 + z_5 r^5 + \ldots \tag{65}$$

Коэффиціенты z_2 и z_5 опредѣлятся при помощи уравненій

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} + \lambda \frac{\partial z_2}{\partial \vartheta} + z_2 = \frac{1}{2}\sin 2\vartheta,$$

$$\frac{\partial z_5}{\partial t} + \lambda \frac{\partial z_5}{\partial \vartheta} + z_5 = z_2^2\left(\sin(\vartheta + t)\frac{\partial z_2}{\partial \vartheta} - 2z_2\cos(\vartheta + t)\right),$$

изъ которыхъ первое дастъ независящее отъ t выраженіе для z_2:

$$z_2 = \frac{\sin 2\vartheta - 2\lambda\cos 2\vartheta}{2(1 + 4\lambda^2)}.$$

Вводя уголъ ε, опредѣляемый равенствами

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2}}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{2\lambda}{\sqrt{1 + 4\lambda^2}},$$

и полагая

$$2\vartheta - \varepsilon = \varphi,$$

представимъ это выраженіе подъ видомъ:

$$z_2 = \frac{\sin\varphi}{2\sqrt{1 + 4\lambda^2}}.$$

Если же за независимыя перемѣнныя вмѣсто ϑ и t примемъ φ и

$$\tau = \vartheta + t$$

и воспользуемся найденнымъ выраженіемъ функціи z_2, то второе изъ написанныхъ сейчасъ уравненій приведется къ виду:

$$(1 + \lambda)\frac{\partial z_5}{\partial \tau} + 2\lambda\frac{\partial z_5}{\partial \varphi} + z_5 = \frac{\sin^2\varphi\,(\cos\varphi\sin\tau - \sin\varphi\cos\tau)}{4(1 + 4\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда находимъ

$$z_5 = P\cos\tau + Q\sin\tau,$$

разумѣя подъ P и Q періодическія функціи φ, опредѣляемыя уравненіями

$$2\lambda \frac{dP}{d\varphi} + P + (1+\lambda)Q = -\frac{\sin^3\varphi}{4(1+4\lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$2\lambda \frac{dQ}{d\varphi} + Q - (1+\lambda)P = \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{4(1+4\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Полагая $\sqrt{-1} = i$, изъ уравненій этихъ выводимъ:

$$P + Qi = ae^{i\varphi} + be^{-i\varphi} + ce^{3i\varphi}, \tag{66}$$

гдѣ a, b, c суть нѣкоторыя постоянныя, изъ которыхъ первыя двѣ опредѣляются по формуламъ:

$$a = \frac{\lambda - 1 + i}{8[1+(\lambda-1)^2](1+4\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad b = \frac{3\lambda + 1 - i}{16[1+(3\lambda+1)^2](1+4\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{67}$$

Вносимъ теперь рядъ (65) вмѣсто z во вторыя части уравненій (64) и результаты этой подстановки располагаемъ по восходящимъ степенямъ r.

Въ получаемыхъ такимъ путемъ рядахъ

$$\Theta_3 r^3 + \Theta_6 r^6 + \ldots, \qquad R_4 r^4 + R_7 r^7 + \ldots$$

коэффиціенты Θ_3, R_4 и R_7 будутъ имѣть слѣдующія выраженія:

$$\Theta_3 = -z_2^2 \sin\tau, \qquad R_4 = z_2^2\cos\tau, \qquad R_7 = 2z_2z_5\cos\tau.$$

Поступая затѣмъ согласно изложенному правилу, составляемъ выраженіе

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (\lambda - z_2^2\sin\tau\, r^3)\frac{\partial r}{\partial\vartheta} - r^4(z_2^2 + 2z_2z_5r^3)\cos\tau,$$

и дѣлая

$$r = c + u_4c^4 + u_7c^7,$$

стараемся функціями u_4 и u_7 распорядиться такъ, чтобы въ этомъ выраженіи исчезали всѣ члены, содержащіе постоянную c въ степеняхъ ниже $8^{\text{ой}}$.

Для этого означенныя функціи подчиняемъ уравненіямъ

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} + \lambda\frac{\partial u_4}{\partial\vartheta} = z_2^2\cos\tau,$$

$$\frac{\partial u_7}{\partial t} + \lambda\frac{\partial u_7}{\partial\vartheta} = 4u_4z_2^2\cos\tau + 2z_2z_5\cos\tau + z_2^2\sin\tau\frac{\partial u_4}{\partial\vartheta}.$$

Предполагая, что λ есть число несоизмѣримое, первому изъ этихъ уравненій всегда удовлетворимъ періодическою функціей ϑ и t, и функція эта, будучи выражена черезъ φ и τ, представится подъ видомъ:

$$u_4 = M\cos\tau + N\sin\tau + \text{Const.},$$

гдѣ

$$M = -\frac{\lambda\sin 2\varphi}{2(1+4\lambda^2)(5\lambda+1)(3\lambda-1)},$$

$$N = \frac{(\lambda+1)\cos 2\varphi}{8(1+4\lambda^2)(5\lambda+1)(3\lambda-1)} + \frac{1}{8(1+4\lambda^2)(\lambda+1)}.$$

Въ томъ же предположеніи, второму уравненію всегда удовлетворимъ выраженіемъ вида

$$u_7 = gt + 2u_4^2 + v,$$

гдѣ g есть нѣкоторая постоянная, а v періодическая функція ϑ и t.

При этомъ, разсматривая уравненіе

$$g + (1+\lambda)\frac{\partial v}{\partial\tau} + 2\lambda\frac{\partial v}{\partial\varphi} = 2z_2z_5\cos\tau + z_2^2\sin\tau\left(\frac{\partial u_4}{\partial\tau} + 2\frac{\partial u_4}{\partial\varphi}\right),$$

которому должна удовлетворять v, какъ функція перемѣнныхъ φ и τ, изъ условія періодичности этой функціи найдемъ:

$$g = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2\pi}\left\{2z_2z_5\cos\tau + z_2^2\sin\tau\left(\frac{\partial u_4}{\partial\tau} + 2\frac{\partial u_4}{\partial\varphi}\right)\right\}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{Pz_2 + z_2^2\left(\frac{dN}{d\varphi} - \frac{1}{2}M\right)\right\}d\varphi,$$

и такимъ образомъ придемъ къ слѣдующему выраженію для постоянной g:

$$g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Pz_2\,d\varphi = \frac{A}{4\sqrt{1+4\lambda^2}},$$

гдѣ A означаетъ коэффиціентъ при $\sin\varphi$ въ разложеніи функціи P по синусамъ и косинусамъ цѣлыхъ кратностей φ.

Это выраженіе, послѣ подстановки величины A, которая легко получается изъ формулъ (66) и (67), приводится къ виду:

$$g = -\frac{1}{64(1+4\lambda^2)^2}\left\{\frac{1}{1+(3\lambda+1)^2} + \frac{2}{1+(\lambda-1)^2}\right\}$$

и слѣдовательно даетъ для g величину всегда отрицательную.

Мы заключаемъ поэтому, что невозмущенное движеніе всегда устойчиво.

Этотъ выводъ полученъ нами въ предположеніи, что λ есть число несоизмѣримое. Но онъ справедливъ также и для всѣхъ соизмѣримыхъ λ, при которыхъ функціи u_4 и v можно предполагать періодическими.

Разсматривая выраженіе функціи u_4, видимъ, что въ этомъ отношеніи особенными значеніями λ, которыя должны быть исключаемы, служатъ только три слѣдующихъ: -1, $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{5}$. Если же обратимся къ составленію функціи v, то къ нимъ должны будемъ присоединить еще 0, 1 и $-\frac{1}{3}$, и это будутъ единственныя особенныя значенія λ.

Поэтому заключеніе наше несомнѣнно справедливо для всѣхъ вещественныхъ значеній λ, кромѣ шести слѣдующихъ:

$$0, \quad 1, \quad -1, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{5},$$

которыя требуютъ особаго изслѣдованія.

64. Въ предположеніи, что $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ есть число несоизмѣримое, мы вполнѣ разобрали одинъ изъ двухъ возможныхъ случаевъ — когда между функціями (63) встрѣчаются неперіодическія. Теперь остается разсмотрѣть другой — когда функціи эти всѣ суть періодическія.

Въ этомъ случаѣ такими же будутъ и всѣ коэффиціенты $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ въ рядахъ (53).

Въ аналогичныхъ случаяхъ въ предыдущемъ всякій разъ, когда можно было доказать, что мы имѣемъ съ ними дѣло, вопросъ объ устойчивости рѣшался въ утвердительномъ смыслѣ. Здѣсь этого не будетъ, и вообще означенный случай останется сомнительнымъ.

Такая разница происходитъ отъ того, что періодическіе ряды, съ которыми мы встрѣчались въ подобныхъ случаяхъ раньше, всегда можно было дѣлать сходящимися. Ряды же (53) не обладаютъ такимъ свойствомъ, и вообще изслѣдованіе сходимости ихъ представляетъ затрудненія весьма серьезныя.

Затрудненія эти не исчезаютъ и при $n = 0$, т. е. когда предложенная система уравненій есть второго порядка.

Такія системы были изслѣдованы M. Poincaré, и между прочимъ имъ было указано, что (при извѣстномъ условіи относительно λ) разсматриваемый случай представляется для всякой канонической системы *).

Это обстоятельство обнаруживается тотчасъ же изъ разсмотрѣнія уравненій, которыми опредѣляются функціи (63).

---

*) Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (J. de Mathématiques, 4 série, t. 2, 1886, p. 199 et 200). Здѣсь доказывается предложеніе нѣсколько болѣе общее.

Дѣйствительно, пусть предложена слѣдующая система

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y - \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + \frac{\partial F}{\partial x},$$

въ которой F означаетъ голоморфную функцію x и y, не содержащую въ своемъ разложеніи членовъ ниже третьяго измѣренія и обладающую періодическими относительно t коэффиціентами съ періодомъ ω, а λ — постоянную, для которой $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ есть число несоизмѣримое.

Полагая

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

составляемъ уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \left(\lambda + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \vartheta}, \tag{68}$$

которому должна удовлетворять r, какъ функція перемѣнныхъ ϑ и t, получаемая рѣшеніемъ относительно r какого либо полнаго интегральнаго уравненія нашей системы, содержащаго одну произвольную постоянную.

Мы должны показать, что въ ряду извѣстнаго типа

$$c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \cdots, \tag{69}$$

формально удовлетворяющемъ этому уравненію, всѣ коэффиціенты u_l, періодическіе относительно ϑ, будутъ періодическими также и относительно t.

Пусть подстановка этого ряда вмѣсто r въ функціи F и r^2 приводитъ къ слѣдующимъ разложеніямъ:

$$F_3 c^3 + F_4 c^4 + F_5 c^5 + \cdots \quad \text{и} \quad c^2 + v_3 c^3 + v_4 c^4 + \cdots.$$

Коэффиціенты F_m, v_m будутъ извѣстнымъ образомъ выводиться изъ коэффиціентовъ u_l. При томъ

$$F_m \quad \text{и} \quad v_m - 2u_{m-1},$$

очевидно, будутъ зависѣть только отъ тѣхъ u_l, для которыхъ $l < m-1$.

Поэтому, замѣчая, что уравненіе (68), которое можетъ быть написано такъ:

$$\frac{\partial r^2}{\partial t} + \lambda\frac{\partial r^2}{\partial \vartheta} = -2\left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right),$$

для всякаго m (изъ ряда $3, 4, \ldots$) доставляетъ уравненіе вида

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + \lambda\frac{\partial v_m}{\partial \vartheta} = -2\frac{\partial F_m}{\partial \vartheta}, \tag{70}$$

изъ этого послѣдняго найдемъ v_m, а затѣмъ и u_{m-1}, послѣ того какъ будутъ найдены всѣ u_l, для которыхъ $l < m - 1$.

Но если вторую часть уравненія (70) представимъ подъ видомъ ряда синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ, то въ этомъ ряду, очевидно, не будетъ члена, независящаго отъ ϑ. Поэтому, если всѣ u_l, для которыхъ $l < m - 1$, оказываются относительно t періодическими, то такою же будетъ и функція v_m (стр. 226), а слѣдовательно — и функція u_{m-1}.

Такимъ образомъ для канонической системы (при извѣстномъ условіи относительно λ) рядъ (69) будетъ всегда періодическимъ.

При рѣшеніи вопроса объ устойчивости придется въ этомъ случаѣ начать съ изслѣдованія сходимости этого ряда, и всякій разъ, когда (въ предположеніи вещественности функцій u_l) удастся доказать, что при достаточно малыхъ величинахъ $|c|$ рядъ этотъ есть сходящійся въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ и t, вопросъ нашъ разрѣшится въ утвердительномъ смыслѣ.

То же будетъ, какъ покажемъ, и въ общемъ случаѣ.

Возвращаясь къ системѣ (52), допустимъ, что въ какомъ либо случаѣ намъ удалось найти для нея періодическіе ряды (53) и доказать, что при $|c|$ достаточно маломъ они суть сходящіеся въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ и t.

Предполагая, что всѣ $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ суть вещественныя функціи, дѣлаемъ

$$r = z + u^{(2)} z^2 + u^{(3)} z^3 + \dots ,$$

$$x_s = z_s + u_s^{(1)} z + u_s^{(2)} z^2 + \dots \qquad (s = 1, 2, \dots, n)$$

и вмѣсто перемѣнныхъ r, x_s вводимъ въ нашу систему перемѣнныя z, z_s.

Такимъ путемъ придемъ къ системѣ вида (57), въ которой функціи Z, Z_s, обладая въ остальномъ прежними свойствами, будутъ уничтожаться при $z_1 = \dots = z_n = 0$.

При этомъ задача наша приведется къ задачѣ объ устойчивости по отношенію къ величинамъ z, z_s.

Отбрасывая въ системѣ (57) уравненіе, содержащее производную $\dfrac{d\vartheta}{dt}$, будемъ разсматривать въ остальныхъ ϑ, какъ *данную*, но совершенно произвольную непрерывную вещественную функцію t.

Тогда, если будетъ доказано, что при всякомъ данномъ положительномъ ε, можетъ быть назначаемо, *независимо отъ выбора функціи* ϑ, такое положительное число a, чтобы при выполненіи условій

$$|z| < a, \quad |z_1| < a, \quad |z_2| < a, \quad \dots, \quad |z_n| < a$$

въ начальный моментъ времени, во все послѣдующее время выполнялись неравенства

$$|z| < \varepsilon, \quad |z_1| < \varepsilon, \quad |z_2| < \varepsilon, \quad \dots, \quad |z_n| < \varepsilon,$$

— то наша задача, очевидно, разрѣшится въ утвердительномъ смыслѣ.

Въ слѣдующемъ параграфѣ мы докажемъ предложеніе, изъ котораго высказанный сейчасъ постулятъ дѣйствительно будетъ слѣдовать, если принять въ разсчетъ, что функціи Z, Z_s въ нашихъ уравненіяхъ необходимо будутъ голоморфными (по отношенію къ z, z_σ) въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ и t.

Нѣкоторое обобщеніе.

65. Поставимъ вопросъ нѣсколько шире.

Допустимъ, что предложена слѣдующая система:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz_1}{dt} = Z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = Z_2, \quad \ldots, \quad \frac{dz_k}{dt} = Z_k, \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s, \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

въ которой X_s, Z_j суть голоморфныя функціи перемѣнныхъ x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_k, уничтожающіяся при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

и не содержащія въ своихъ разложеніяхъ членовъ ниже второго измѣренія.

Коэффиціенты въ этихъ разложеніяхъ будемъ предполагать какими-либо непрерывными и ограниченными вещественными функціями t, удовлетворяющими лишь тому условію, чтобы всѣ X_s, Z_j были голоморфными въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t *). Коэффиціенты же $p_{s\sigma}$ будемъ предполагать вещественными постоянными и при томъ такими, чтобы всѣ корни уравненія вида (43) обладали отрицательными вещественными частями.

Если таковы изслѣдуемыя дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія, то можно доказать, что невозмущенное движеніе устойчиво.

Съ этою цѣлью прежде всего покажемъ, что для системы (71) всегда найдется интегралъ вида

$$L + F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_k, t),$$

гдѣ L означаетъ произвольную линейную форму величинъ z_1, z_2, ..., z_k съ постоянными коэффиціентами, а F голоморфную функцію x_s, z_j, не содержащую въ своемъ разложеніи членовъ ниже второго измѣренія, уничтожающуюся при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ и обладающую коэффиціентами, представляющими ограниченныя функціи t.

*) Если угодно, можно было бы разсматривать не всякія вещественныя значенія t, а только большія нѣкотораго предѣла t_0.

Обращаемся для этого къ уравненію

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\cdots+p_{sn}x_n)\frac{\partial F}{\partial x_s}+\frac{\partial F}{\partial t}=-\sum_{s=1}^{n}X_s\frac{\partial F}{\partial x_s}-\sum_{j=1}^{k}Z_j\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}+\frac{\partial L}{\partial z_j}\right),$$

которому должна удовлетворять функція F.

Пусть

$$F=\sum P_m^{(l_1,\, l_2,\ldots,\, l_k)}z_1^{l_1}z_2^{l_2}\ldots z_k^{l_k}, \tag{72}$$

гдѣ $P_m^{(\ldots)}$ суть формы $m^{\text{ой}}$ степени величинъ x_s, а суммированіе распространяется на всѣ цѣлыя неотрицательныя $m,\, l_1,\, l_2,\ldots,\, l_k$, удовлетворяющія условіямъ

$$m>0\,,\qquad m+l_1+l_2+\ldots+l_k>1\,.$$

Вносея это выраженіе функціи F въ наше уравненіе, представимъ вторую часть его подъ видомъ

$$-\sum Q_m^{(l_1,\, l_2,\ldots,\, l_k)}z_1^{l_1}z_2^{l_2}\ldots z_k^{l_k},$$

гдѣ суммированіе распространяется на указанныя сейчасъ значенія $m,\, l_j$, а $Q_m^{(l_1,\ldots,\, l_k)}$ представляетъ форму $m^{\text{ой}}$ степени величинъ x_s, извѣстнымъ образомъ выводимую изъ тѣхъ $P_{m'}^{(l'_1,\ldots,\, l'_k)}$, для которыхъ

$$m'+l'_1+l'_2+\ldots+l'_k<m+l_1+l_2+\ldots+l_k\,. \tag{73}$$

При этомъ уравненія

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\cdots+p_{sn}x_n)\frac{\partial P_m^{(l_1,\ldots,\, l_k)}}{\partial x_s}+\frac{\partial P_m^{(l_1,\ldots,\, l_k)}}{\partial t}=-Q_m^{(l_1,\ldots,\, l_k)}, \tag{74}$$

которымъ придется удовлетворить, дадутъ возможность вычислять послѣдовательно всѣ $P_m^{(l_1,\ldots,\, l_k)}$ въ какомъ угодно порядкѣ, соотвѣтствующемъ неубыванію числа $m+l_1+l_2+\ldots+l_k$.

Допустимъ, что всѣ $P_{m'}^{(l'_1,\ldots,\, l'_k)}$, для которыхъ выполнено условіе (73), найдены и обладаютъ ограниченными коэффиціентами. Тогда таковы же будутъ и коэффиціенты второй части уравненія (74); а потому, при нашемъ предположеніи относительно постоянныхъ $p_{s\sigma}$, всегда найдется удовлетворяющая этому уравненію форма $P_m^{(l_1,\ldots,\, l_k)}$ съ ограниченными коэффиціентами, и такая форма будетъ единственная. Въ этомъ легко убѣдимся, разсматривая извѣстное преобразованіе уравненія (74) (см. слѣд. стр.).

Такимъ образомъ при всякомъ опредѣленномъ выборѣ формы L рядъ (72) будетъ вполнѣ опредѣленнымъ. При этомъ, если взятая форма L обладаетъ вещественными коэффиціентами, то конечно такими же выйдутъ и коэффиціенты въ ряду этомъ, разсматриваемомъ, какъ расположенномъ по степенямъ величинъ x_s, z_j.

Обращаемся къ вопросу о его сходимости.

Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ суть корни уравненія (43).

Отбрасывая условіе вещественности коэффиціентовъ, мы можемъ, выполняя извѣстное линейное преобразованіе, привести общій случай къ тому, когда всѣ $p_{s\sigma}$, незаключающіеся въ ряду

$$p_{11} = \varkappa_1, \quad p_{22} = \varkappa_2, \quad \ldots, \quad p_{nn} = \varkappa_n, \quad p_{21} = \sigma_1, \quad p_{32} = \sigma_2, \quad \ldots, \quad p_{n\,n-1} = \sigma_{n-1},$$

суть нули.

Если же въ этомъ предположеніи будемъ искать коэффиціенты формы P, удовлетворяющей уравненію (74), то они опредѣлятся послѣдовательно въ порядкѣ, указанномъ въ параграфѣ 31омъ (стр. 102). При этомъ коэффиціентъ A при

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$

найдется изъ уравненія вида

$$\frac{dA}{dt} + (m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n) A = - B,$$

и для него получится слѣдующее выраженіе:

$$A = e^{-(m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n)t} \int_t^{\infty} e^{(m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n)t} B\,dt.$$

Входящая сюда функція B будетъ извѣстнымъ образомъ зависѣть отъ найденныхъ раньше коэффиціентовъ A: а именно, по самому своему происхожденію, она необходимо будетъ нѣкоторою цѣлою раціональною ихъ функціей. При томъ коэффиціенты въ ней будутъ суммами произведеній величинъ σ_i, коэффиціентовъ формы L, коэффиціентовъ разложеній функцій X_s, Z_j и нѣкоторыхъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ.

Поэтому, замѣняя въ функціи B перечисленныя сейчасъ величины постоянными высшими предѣлами ихъ модулей, годными для всѣхъ вещественныхъ значеній t, и означая черезъ $\mathbf{B}$ результатъ этой замѣны, найдемъ для разсматриваемаго коэффиціента A слѣдующій высшій предѣлъ его модуля:

$$\frac{\mathbf{B}}{m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n}, \tag{75}$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ суть вещественныя части чиселъ $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_n$.

Мы можемъ здѣсь при томъ, если угодно, каждое изъ чиселъ λ_s замѣнить нѣкоторымъ меньшимъ положительнымъ числомъ, а эти новыя числа можемъ выбрать всѣ различными.

Такимъ путемъ приведемъ вопросъ нашъ къ подобному же вопросу въ случаѣ, когда всѣ $\varkappa_s$ различны. А въ этомъ случаѣ наше предварительное линейное преобразованіе всегда можно предположить такимъ, чтобы всѣ σ_i были нулями.

Но разсматривая вопросъ въ такомъ предположеніи, мы можемъ затѣмъ въ формулахъ вида (75) всѣ λ_s замѣнять наименьшимъ изъ нихъ.

Отсюда видно, что достаточно изслѣдовать сходимость нашего ряда въ предположеніи, что всѣ $p_{s\sigma}$, для которыхъ s и σ различны, суть нули, что

$$p_{11} = p_{22} = \ldots = p_{nn} = -\lambda,$$

гдѣ λ нѣкоторое положительное число, и что коэффиціенты въ разложеніяхъ функцій X_s, Z_j суть постоянныя величины.

Мы можемъ при томъ эти коэффиціенты предположить такими, чтобы всѣ X_s, Z_j выходили функціями только двухъ аргументовъ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \qquad \text{и} \qquad z_1 + z_2 + \ldots + z_k,$$

и чтобы имѣли мѣсто равенства

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n, \qquad Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_k,$$

ибо къ такому случаю приводится всякій другой замѣною названныхъ коэффиціентовъ надлежащимъ образомъ выбранными высшими предѣлами ихъ модулей.

Наконецъ, форму L можемъ предположить слѣдующаго вида:

$$L = z_1 + z_2 + \ldots + z_k.$$

Въ этихъ предположеніяхъ, если (имѣя въ виду, что функціи X_s, Z_j должны уничтожаться при $x_1 = \ldots = x_n = 0$) сдѣлаемъ

$$X_s = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,X, \qquad Z_j = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,Z,$$

то уравненіе, опредѣляющее функцію F, которую мы должны предполагать теперь отъ t независящею, приведется къ виду

$$\lambda \sum_{s=1}^{n} x_s \frac{\partial F}{\partial x_s} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left\{ X \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_s} + Z \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial z_j} + kZ \right\}.$$

Этому уравненію всегда можно удовлетворить, допуская, что функція F зависитъ только отъ двухъ аргументовъ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x \qquad \text{и} \qquad z_1 + z_2 + \ldots + z_k = z.$$

Тогда оно приведется къ слѣдующему:

$$(\lambda - nX)\,\frac{\partial F}{\partial x} = kZ\left(1 + \frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Послѣднее же даетъ для $\frac{\partial F}{\partial x}$ выраженіе, голоморфное относительно x, z, $\frac{\partial F}{\partial z}$, и потому на основаніи теоремы Коши всегда допускаетъ и при томъ только одно такое рѣшеніе, въ которомъ функція F, уничтожаясь при $x = 0$, при достаточно малыхъ $|x|$

и $|z|$ будетъ представляться подъ видомъ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x и z.

Рядъ этотъ, если послѣднія замѣнить въ немъ ихъ выраженіями и затѣмъ разсматривать его, какъ расположенный по степенямъ величинъ x_s, z_j, и будетъ тотъ, сходимость котораго мы должны были изслѣдовать.

Поэтому для достаточно малыхъ $|x_s|$, $|z_j|$ сходимость ряда (72) при сдѣланныхъ сейчасъ частныхъ предположеніяхъ можно считать доказанною. А на основаніи изложеннаго выше этимъ доказывается и сходимость его при общей постановкѣ вопроса. Возвращаясь къ послѣдней, мы можемъ при томъ утверждать, что рядъ (72) представляетъ голоморфную функцію величинъ x_s, z_j въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t.

Такимъ образомъ, останавливаясь на какомъ либо опредѣленномъ выборѣ формы L, найдемъ для системы (71) одинъ вполнѣ опредѣленный интегралъ требуемаго характера.

Принимая за L послѣдовательно $z_1, z_2, \ldots, z_k$, получимъ k такихъ интеграловъ. Эти интегралы, которые, очевидно, будутъ независимыми, можно назвать основными — въ томъ смыслѣ, что всякій голоморфный интегралъ системы (71), обладающій ограниченными коэффиціентами, необходимо будетъ голоморфною ихъ функціей.

Возвращаемся теперь къ нашему вопросу.

Разсматриваемъ интегралъ, представляющій сумму квадратовъ основныхъ. Онъ будетъ слѣдующаго вида:

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 + R,$$

гдѣ R заключаетъ въ себѣ только члены, выше второго измѣренія относительно величинъ x_s, z_j.

Разсматриваемъ затѣмъ квадратичную форму W величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, опредѣляемую уравненіемъ

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial W}{\partial x_s} = -(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

Форма эта, какъ извѣстно, будетъ опредѣленно-положительною (пар. 20, теор. II). Такою же будетъ поэтому и

$$V = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 + W + R,$$

какъ функція перемѣнныхъ x_s, z_j и t.

Составляемъ полную производную послѣдней по t на основаніи уравненій (71). Производная эта будетъ:

$$\frac{dV}{dt} = -(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial W}{\partial x_s}.$$

Но вслѣдствіе того, что функціи X_s при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ всѣ дѣлаются нулями, всегда можно написать

$$\sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial W}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} v_{s\sigma} x_s x_\sigma ,$$

разумѣя подъ $v_{s\sigma}$ нѣкоторыя голоморфныя функціи величинъ x_s, z_j съ ограниченными коэффиціентами, уничтожающіяся при одновременномъ равенствѣ всѣхъ этихъ величинъ нулю и голоморфныя при томъ въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t.

Поэтому разсматриваемая производная представитъ функцію знакопостоянную, отрицательную, и слѣдовательно наша функція V будетъ удовлетворять всѣмъ условіямъ теоремы I параграфа 16[го].

Такимъ образомъ доказывается устойчивость невозмущеннаго движенія въ разсматриваемомъ случаѣ.

Нетрудно видѣть, что всякое возмущенное движеніе, для котораго возмущенія численно достаточно малы, будетъ въ этомъ случаѣ асимптотически приближаться къ одному изъ движеній, соотвѣтствующихъ уравненіямъ

$$z_1 = c_1 , \quad z_2 = c_2 , \quad \ldots , \quad z_k = c_k , \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 , \tag{76}$$

гдѣ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ произвольныя постоянныя.

Въ этомъ убѣждаемся, обращаясь къ тѣмъ уравненіямъ системы (71), которыя содержатъ производныя $\frac{dx_s}{dt}$, и разсматривая въ нихъ величины z_j, какъ данныя вещественныя функціи t, численныя значенія которыхъ при величинахъ t, бо́льшихъ начальнаго его значенія, никогда не превосходятъ нѣкоторыхъ достаточно малыхъ предѣловъ.

Нетрудно также доказать, что всѣ движенія ряда (76), для которыхъ $|c_j|$ достаточно малы, будутъ устойчивыми.

Примѣчаніе. — Къ системамъ (71) при извѣстныхъ условіяхъ могутъ, конечно, приводиться болѣе общія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_j}{dt} &= q_{j1} z_1 + q_{j2} z_2 + \cdots + q_{jk} z_k + Z_j , \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \cdots + p_{sn} x_n + X_s , \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

въ которыхъ коэффиціенты q_{ji}, $p_{s\sigma}$ суть не постоянныя величины, а нѣкоторыя ограниченныя функціи t.

Допустимъ, что въ системѣ (77) всѣ коэффиціенты суть періодическія функціи t.

Предполагая по прежнему, что всѣ X_s, Z_j при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ дѣлаются нулями, допустимъ затѣмъ, что характеристичное уравненіе, соотвѣтствующее системѣ

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1} z_1 + q_{j2} z_2 + \cdots + q_{jk} z_k, \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (78)$$

имѣетъ только корни съ модулями, равными 1, а соотвѣтствующее системѣ

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \cdots + p_{sn} x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

— только корни съ модулями, меньшими 1.

Тогда, если всякому корню ϱ характеристичнаго уравненія системы (78) соотвѣтствуютъ только рѣшенія

$$z_1 = f_1(t) \varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad z_2 = f_2(t) \varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad \ldots, \quad z_k = f_k(t) \varrho^{\frac{t}{\omega}},$$

въ которыхъ всѣ $f_s(t)$ суть періодическія функціи t, то на основаніи доказаннаго можно будетъ утверждать, что невозмущенное движеніе устойчиво и что всякое возмущенное движеніе, для котораго возмущенія достаточно малы, будетъ асимптотически приближаться къ одному изъ движеній, для которыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ всѣ равны нулю и $z_1, z_2, \ldots, z_k$ удовлетворяютъ системѣ (78).

Таковъ будетъ напр. случай, когда названное характеристичное уравненіе не имѣетъ кратныхъ корней.

Когда же такіе корни существуютъ, а въ соотвѣтствующихъ имъ рѣшеніяхъ системы (78) въ функціяхъ $f_s(t)$ встрѣчаются вѣковые члены, невозмущенное движеніе, конечно, будетъ неустойчивымъ.

Предполагая по прежнему, что всѣ X_s, Z_j при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ дѣлаются нулями, опустимъ затѣмъ, что характеристичное уравненіе, соотвѣтствующее системѣ

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1} z_1 + q_{j2} z_2 + \ldots + q_{jn} z_n, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (75)$$

имѣетъ только корни съ модулями, равными 1, а соотвѣтствующее системѣ

$$\frac{dx}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sm} x_m \ [illegible]$$

— только корни съ модулями, меньшими 1.

Тогда, если всякому корню ϱ характеристичнаго уравненія системы (75) соотвѣтствуетъ только рѣшеніе

$$z_1 = f_1(t) \varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad z_2 = f_2(t) \varrho^{\frac{t}{\omega}}, \quad \ldots, \quad z_n = f_n(t) \varrho^{\frac{t}{\omega}},$$

въ которыхъ всѣ $f_s(t)$ суть періодическія функціи t, то на основаніи сказаннаго можно будетъ утверждать, что невозмущенное движеніе устойчиво и что всякое возмущенное движеніе, для котораго возмущенія достаточно малы, будетъ асимптотически приближаться къ одному изъ движеній, для которыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ всѣ равны нулю и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ удовлетворяютъ системѣ (78).

Таковъ будетъ напр. случай, когда указанное характеристичное уравненіе не имѣетъ кратныхъ корней.

Когда же такіе корни существуютъ, и въ соотвѣтствующихъ имъ рѣшеніяхъ системы (75) въ функціяхъ $f_s(t)$ встрѣчаются вѣковые члены, невозмущенное движеніе, конечно, будетъ неустойчивымъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЛАВА I.

Предварительный анализъ.

Постановка вопроса.

О нѣкоторыхъ системахъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

О нѣкоторомъ общемъ случаѣ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

Нѣкоторыя общія предложенія.

Глава II.

Изслѣдованіе установившихся движеній.

О линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ постоянными коэффиціентами.

Изслѣдованіе дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

1ый случай: опредѣляющее уравненіе съ однимъ равнымъ нулю корнемъ.

2ой случай: опредѣляющее уравненіе съ двумя чисто мнимыми корнями.

Глава III.

Изслѣдованіе періодическихъ движеній.

О линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ періодическими коэффиціентами.

Изслѣдованіе дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Страницы.	*Строки.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
3	3 сверху	$\ldots, E'_k,$	$\ldots, E'_k$
79	10—11 „	*équationts*	*équations*
113	9 „	$+ a \cos\vartheta$	$+ a_s \cos\vartheta$
124	9 снизу	(пар. 25).	(пар. 27).
189	послѣдняя	Gautier-	Gauthier-