ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIV 1956

РАБОТЫ А. М. ЛЯПУНОВА ПО МЕХАНИКЕ В ХАРЬКОВСКИЙ ПЕРИОД ЕГО ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

И. Г. Витензон

Великий русский математик Александр Михайлович Ляпунов был, как известно, в течение 17 лет профессором механики Харьковского университета. В этот период его деятельности — с 1885 по 1902 гг. — им было опубликовано 26 работ в области теории устойчивости движения, гидродинамики, теории потенциала, динамики твердого тела, небесной механики, теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и теории вероятностей. Среди этих работ и такое фундаментальное и обширное исследование, как всемирно известная докторская диссертация Ляпунова „Общая задача об устойчивости движения", опубликованная впервые в 1892 году. Не менее известные исследования А. М. Ляпунова о фигурах равновесия вращающейся жидкой массы и их устойчивости не относятся к харьковскому периоду его деятельности.

Из работ А. М. Ляпунова по механике в Харькове в первую очередь следует отметить его классические исследования по теории устойчивости движения механических систем. Понятие об устойчивости движения находит себе все более и более обширное и разнообразное поле приложений в современной технике и науке. При этом нужно сказать, что возникающие теперь вопросы устойчивости движения таковы, что при их решении уже нельзя удовлетвориться нестрогим применением метода первого приближения. Этот метод впервые был использован при изучении устойчивости движения еще Лагранжем и Лапласом в вопросе о так называемой устойчивости солнечной системы. В течение почти 100 лет метод первого приближения оставался необоснованным и почти единственным известным методом исследования вопросов устойчивости движения.

Заслуга создания общей, строгой и полной теории устойчивости движения систем с конечным числом степеней свободы принадлежит А. М. Ляпунову. Определение устойчивости движения, данное Ляпуновым, общие теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости движения, полное и строгое исследование метода первого приближения—все это сделало труд Ляпунова настолько значительным, что теперь мы говорим о самостоятельной ветви механики и анализа— о теории устойчивости по Ляпунову. Фундаментальные результаты этой теории изложены А. М. Ляпуновым в его докторской диссертации „Общая задача об устойчивости движения" (Харьков, 1892 г.), которая и до настоящего времени остается основным трудом на эту тему во всей мировой математической литературе. На кратком изложении содержания этого произведения мы прежде всего и остановимся. Многочисленность и многогранность результатов Ляпунова, содержащихся в его диссертации, лишает нас возможности изложить здесь эти результаты достаточно полно, мы ограничиваемся поэтому только узловыми моментами теории.

* * *

Первым вопросом в теории устойчивости является вопрос об определении устойчивости движения. Ляпунов определяет устойчивость движения так. Рассмотрим голономную механическую систему с k— степенями свободы.

Пусть ее обобщенные координаты будут

$$q_1\, q_2 \ldots\ldots q_k,$$

а обобщенные скорости

$$\dot{q}_1\, \dot{q}_2 \ldots\ldots \dot{q}_k.$$

Во всякой динамической задаче, когда силы определенным образом заданы, переменные q_i удовлетворяют некоторым k обыкновенным дифференциальным уравнениям 2-го порядка.

Частному решению $q_i = f_i(t)\, i = 1, 2 \ldots, k$ соответствует некоторое движение системы. Сравнивая в известном смысле это движение с другими движениями той же системы, возможными для нее при тех же силах и связях, но при иных начальных условиях, будем это движение называть невозмущенным, а все остальные, с которыми оно сравнивается,—возмущенными движениями.

Рассмотрим n непрерывных и вещественных функций

$$\varphi_1\, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_n$$

величин q_i, $\dot{q}_i$ и времени t.

Для невозмущенного движения φ_s являются известными функциями времени

$$F_1(t)\;\; F_2(t) \ldots\ldots F_n(t).$$

Пусть в начальный момент времени t_0 координаты и скорости имеют в невозмущенном движении значения

$$q_1^0\, q_2^0 \ldots\ldots q_k^0; \quad \acute{q}_1^0\, \acute{q}_2^0 \ldots\ldots \acute{q}_k^0.$$

Вещественные числа

$$a_1\, a_2 \ldots\ldots a_k; \quad b_1\, b_2 \ldots\ldots b_k,$$

на которые отличаются от q_i^0 $\acute{q}_i^0$ начальные значения координат и скоростей в возмущенном движении, называются возмущениями.

Если совокупности наперед заданных положительных чисел

$$\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n$$

можно поставить в соответствие положительные числа

$$\sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_k; \quad \sigma_1'\, \sigma_2' \ldots\ldots \sigma_k',$$

зависящие вообще от ε_s и t_0, такие, что коль скоро

$$|\, a_i \,| \leqslant \sigma_i \quad |\, b_i \,| \leqslant \sigma_i' \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, k$$

для любого $t > t_0$ будут соблюдаться неравенства

$$|\, \varphi_s - F_s \,| < \varepsilon_s \quad s = 1, 2, \ldots\ldots, n,$$

то невозмущенное движение Ляпунов назвал устойчивым по отношению к величинам φ_s. В противном случае он назвал движение неустойчивым по отношению к этим величинам.

Если до Ляпунова объектом исследования устойчивости были только геометрические характеристики движения — координаты — или величины, непосредственно с ними связанные, то определение Ляпунова существенно расширило поле применений теории, позволяя ставить вопрос об устойчивости любых геометрических, кинематических или динамических характеристик движения, лишь бы они были заданными функциями координат и скоростей системы.

Решение вопроса об устойчивости или неустойчивости по Ляпунову сводится к исследованию дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют разности

$$x_s = \varphi_s - F_s \qquad s = 1, 2, \ldots\ldots, n.$$

Эти уравнения называются уравнениями возмущенного движения.

Решение

$$x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0$$

соответствует невозмущенному движению.

Пусть число n функций φ_s и эти функции таковы, что система уравнений возмущенного движения будет порядка n и приводится к нормальному виду

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n;\ t) \tag{1}$$

$$s = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

Ляпунов рассматривал случай, когда $n=2k$ и функции φ_s независимы.

Правые части уравнений (1) X_s являются известными функциями величин $x_1 x_2 \ldots\ldots x_n$; t и обращаются, как легко показать, в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots\ldots x_n = 0$.

В дальнейшем Ляпунов исследует систему уравнений (1) возмущенного движения, отвлекаясь от исходных уравнений движения механической системы и от вида функций φ_s, полагая, что всякой системе возмущений a_i и b_i соответствует система начальных значений x_s^0.

Таким образом, исследование устойчивости невозмущенного движения исходной механической системы сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнений (1).

Устойчивость имеет место в том случае, если для любого заданного положительного числа ε существует положительное число η такое, что, выбирая при $t=t_0$ все x_s^0 по условию

$$|\, x_s^0 \,| \leqslant \eta,$$

мы будем иметь для любого $t > t_0$ и для всех x_s

$$|\, x_s(t) \,| < \varepsilon.$$

В противном случае невозмущенное движение будет неустойчивым. Если все $x_s \to 0$ при $t \to \infty$, то невозмущенное движение Ляпунов называет ассимптотически устойчивым.

Число η зависит, вообще говоря, от ε и t_0. Если оно от t_0 не зависит, то тогда устойчивость называется равномерной. Это определение было введено К. П. Персидским. В теории устойчивости по первому приближению, о которой речь у нас будет итти дальше, Персидский существенно использует это понятие, устанавливая условие необходимое и достаточное для того, чтобы движение было равномерно устойчивым по первому приближению.

Об определении устойчивости по Ляпунову следует сделать еще такое замечание. Устойчивость по Ляпунову это устойчивость по отношению к возмущению начальных условий движения. Это можно интерпретировать так, что возмущающие силы, действующие на систему, прекращают свое действие в некоторый момент времени. Тогда, если этот момент времени выбрать в качестве начального значения времени t_0, то возмущения сведутся к изменению только начальных условий. Но для ряда приложений теории устойчивости (например, в области небесной механики) существенно рассматривать хотя и достаточно малые, но зато постоянно действующие возмущающие силы, изменяющие правые части дифференциальных уравнений (1). Теория устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях разрабатывается советскими учеными.

Таково определение устойчивости движения по Ляпунову. Перейдем к его общим теоремам об устойчивости и неустойчивости.

Ляпунов был первым ученым, которому удалось установить общие достаточные признаки устойчивости и неустойчивости произвольного движения.

Метод Ляпунова, известный под названием „второй методы", основан на введении некоторых вещественных вспомогательных функций сравнения

$$V(x_1 \ldots\ldots x_n; t).$$

Эти функции при $|x_s| \leqslant H \quad t \geqslant T$ предполагаются однозначными, обращающимися в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, и дифференцируемыми по времени. Идея методы заключается в сравнении функции V с ее полной производной по времени

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \frac{dx_s}{dt},$$

в которой $\frac{dx_s}{dt}$ должны быть заменены их значениями из уравнений (1') возмущенного движения. Теоремы Ляпунова указывают те случаи, когда такое сравнение дает достаточные основания для утверждения устойчивости или, наоборот, неустойчивости. Укажем на два термина, которыми пользуется Ляпунов при этом.

Если функция V сохраняет знак и не зависит явно от времени, то он называет ее знакоопределенной, если равенство $V = 0$ может иметь место только для одной системы значений переменных x_s

$$x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0.$$

Если же функция V зависит явно от t, то знакоопределенной Ляпунов ее называет в том случае, если для нее можно найти независящую явно от t положительно-определенную функцию W такую, что одно из двух выражений,

$$V - W \text{ или } -V - W,$$

будет функцией положительной для любого $t > T$. Об ограниченной функции $V(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n;\ t)$ Ляпунов говорит, что она допускает бесконечно малый высший предел, если для всякого $\varepsilon > 0$, как бы оно мало ни было, найдется такое отличное от нуля положительное h, при котором для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям

$$t \geqslant T \quad |x_s| \leqslant h,$$

будет выполняться неравенство

$$|V| \leqslant \varepsilon.$$

Этому требованию удовлетворяет, конечно, всякая независящая явно от t функция V рассматриваемого нами типа. Но функции, зависящие от t явно, равные нулю в нуле и непрерывные в этой точке, могут ему не удовлетворять, например, функция

$$\sin\{(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n)t\}.$$

Основная теорема Ляпунова об устойчивости движения

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что можно указать знакоопределенную функцию V, производная которой $\frac{dV}{dt}$, вычисленная в силу этих уравнений, была бы или знакопостоянной функцией противоположного с V знака или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Функции V, удовлетворяющие условиям этой теоремы, называются теперь функциями Ляпунова. Таким образом, существование функции Ляпунова является достаточным признаком устойчивости согласно этой теореме. Теорема Лежен Дирихле об устойчивости равновесия получается сразу из теоремы Ляпунова, если в качестве функции Ляпунова взять полную энергию системы.

Критерий устойчивости, полученный Раусом для стационарных движений консервативных и циклических систем (так называемый энергетический критерий), также сразу вытекает из теоремы Ляпунова.

Если функция V, удовлетворяя условиям теоремы, сверх того еще допускает бесконечно малый высший предел, а производная ее $\frac{dV}{dt}$ представляет собой знакоопределенную функцию знака, противоположного с V, то устойчивость, как доказал Ляпунов, будет асимптотической.

Основная теорема Ляпунова о неустойчивости

Если система дифференциальных уравнений возмущенного движения такова, что можно указать функцию V, допускающую бесконечно малый высший предел, обладающую знакоопределенной производной $\frac{dV}{dt}$ и такую, что при всяком t, большем некоторой величины, надлежащим выбором величин x_s, численно как угодно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с $\frac{dV}{dt}$, то невозмущенное движение неустойчиво.

У Ляпунова имеется еще одна общая теорема о неустойчивости—вариант приведенной. Она также дает достаточный критерий неустойчивости движения. При помощи формулированной нами теоремы о неустойчивости Ляпунов дал почти полное решение известной задачи об обращении теоремы Лежен Дирихле об устойчивости равновесия. Интересно заметить (это существенно для приложений), что если удается построить допускающую бесконечно малый высший предел знакоопределенную функцию V, производная которой $\frac{dV}{dt}$, вычисленная в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения, была бы также знакоопределенной функцией, то тогда при условии, что знаки V и $\frac{dV}{dt}$ противоположны, мы будем иметь устойчивость (и притом, асимтотическую), а при условии, что знаки V и $\frac{dV}{dt}$ одинаковы, мы будем иметь неустойчивость.

Первым по времени вопросом, которым занялись советские математики в области теории устойчивости по Ляпунову, был вопрос об обращении основной теоремы Ляпунова об устойчивости, т. е. вопрос о необходимости существования функции Ляпунова для всякого устойчивого движения. Эта проблема была поставлена в 1930 г. Н. Г. Четаевым. Полное решение задачи получил в 1937 году К. П. Персидский.

Результат исследований Персидского, имеющий принципиальное значение для теории устойчивости по Ляпунову, можно сформулировать следующим образом. Пусть дана система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1 x_2 \ldots x_n;\ t) \qquad (1)$$

$$s = 1, 2, \ldots, n,$$

правые части которой в некоторой вещественной области

$$t > 0 \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

суть вещественные и непрерывные функции, обращающиеся в нули при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Пусть функции X_s имеют непрерывные частные производные первого порядка по величинам

$$x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Тогда для устойчивости решения $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ необходимо и достаточно существование знакоопределенной функции V, полная производная которой $\frac{dV}{dt}$ существовала бы и была бы или тождественно равной нулю или знакопостоянной, обратной по знаку с V. При этом, если

$$\begin{aligned} &\Theta_1 (x_1 x_2 \ldots x_n;\ t) = C_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Theta_n (x_1 x_2 \ldots x_n;\ t) = C_n \end{aligned}$$

есть система независимых интегралов системы (1), то искомая функция Ляпунова

$$V = \sum_{s=1}^{n} \Theta_s^2.$$

Советским математикам принадлежит ряд теорем, дающих достаточный критерий неустойчивости движения. Среди них особый интерес представляет теорема Персидского, приведенная в его докторской диссертации, теорема Четаева и ряд теорем, доказанных в последние годы сотрудниками проф. Персидского. На этих теоремах мы останавливаться не будем, так как это потребовало бы введения большого числа новых понятий и определений.

Возможность обращения теорем (Ляпунова и Четаева) о неустойчивости движения для стационарной системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n)$$

доказана Н. Н. Красовским (1954 г.). Возможность для уравнений этого же вида обращения теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости движения была доказана И. Массера (1949 г.) и Барбашиным Е. А. (1951 г.). Их результат обобщен на случай уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n; t)$$
$$i=1, 2, \ldots\ldots, n$$

И. Г. Малкиным (1954 г.), а также Е. А. Барбашиным и Н. Н. Красовским (1954 г.).

Перейдем теперь к краткому описанию результатов Ляпунова по теории устойчивости по первому приближению.

Метод первого приближения при решении вопросов устойчивости движения и до Ляпунова и в настоящее время является одним из самых употребительных в приложениях. Но лишь в работах Ляпунова и его последователей этот метод получил теоретическое обоснование. Представим прежде всего, следуя Ляпунову, систему (1) дифференциальных уравнений возмущенного движения в виде

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots\ldots+p_{sn}x_n+X'_s \tag{2}$$
$$s=1, 2, \ldots\ldots, n.$$

где X'_s представимы степенными рядами

$$X'_s=\sum P_s^{(m_1 \ldots\ldots m_n)} x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots\ldots x_n^{m_n},$$

по целым неотрицательным степеням

$$x_1 x_2 \ldots\ldots x_n,$$

причем

$$m_1+m_2+\ldots\ldots+m_n \geqslant 2.$$

Коэффициенты этих разложений $P_s^{(m_1 \ldots\ldots m_n)}$, так же как и коэффициенты p_{sk} суть вещественные, непрерывные и ограниченные функции времени t при $t \geqslant t_0$ и при этом имеет место оценка

$$\left| P_s^{(m_1, m_2 \ldots\ldots m_n)} \right| \leqslant \frac{M}{A^{m_1+m_2+\ldots\ldots+m_n}},$$

где M и A положительные постоянные, так что написанные ряды абсолютно сходятся при

$$t \geqslant t_0, \text{ если только } |x_s| < A.$$

Метод первого приближения заключается в том, что вопрос об устойчивости решения системы уравнений (2) сводят к исследованию некоторых свойств решения линейной системы

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots\ldots+p_{sn}x_n \tag{3}$$
$$s=1, 2, \ldots\ldots, n,$$

носящей название системы первого приближения. В теории первого приближения можно указать две основные проблемы.

1. Указать критерии, связанные со свойствами системы (3) первого приближения, при соблюдении которых устойчивость или неустойчивость по первому приближению действительно влечет за собой устойчивость или неустойчивость рассматриваемого невозмущенного движения.

2. Исследовать так называемые „сомнительные“ случаи, т. е. те случаи, когда первое приближение не решает вопроса и устойчивость зависит от вида X'_s.

При решении обеих проблем А. М. Ляпуновым впервые были получены результаты основополагающего значения. Он расценивал эти результаты как основные результаты своей общей теории устойчивости движения.

Рассмотрим прежде всего простейший случай, когда коэффициенты p_{sk} и P_s разложений правых частей системы (2) суть постоянные. Невозмущенные движения, соответствующие такому случаю, Ляпунов называет установившимися.

Вопрос об устойчивости по первому приближению установившихся движений решается в зависимости от свойств корней

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$$

характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} (p_{11}-\lambda) & p_{12} & \ldots\ldots & p_{1n} \\ p_{21} & (p_{22}-\lambda) & \ldots\ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots\ldots & (p_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

системы (3) первого приближения.

Применяя свои общие теоремы об устойчивости и неустойчивости и строя при этом функции V сравнения в виде квадратичных форм переменных

$$x_1 x_2 \ldots\ldots x_n,$$

удовлетворяющие некоторым дифференциальным уравнениям в частных производных 1-го порядка специального вида, Ляпунов доказал следующие теоремы:

1. Если вещественные части всех корней λ_s отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

2. Если среди корней λ_s имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если же среди корней λ_s имеются либо нулевые либо чисто мнимые корни при остальных с отрицательной вещественной частью, то мы имеем дело с „сомнительными“ случаями; первое приближение вопроса не решает и устойчивость зависит от характера коэффициентов при нелинейных членах разложений (2).

Для приложений в области механики и небесной механики особый интерес представляет случай чисто мнимых корней.

Среди „сомнительных“ случаев, соответствующих установившимся движениям, Ляпунов полностью исследовал случаи одного нулевого корня, двух сопряженных мнимых корней и случай двух нулевых корней.

Применяя свои общие теоремы, Ляпунов установил критерий устойчивости и неустойчивости во всех этих случаях. Эти исследования оказались одними из самых трудных во всей теории.

Советские математики Г. В. Каменков и И. Г. Малкин существенно дополнили исследования Ляпунова, рассмотрев также случай нулевого и пары мнимых корней, а также случай двух пар чисто мнимых корней. Также как у самого Ляпунова, исследование сводилось к построению некоторой упрощенной нелинейной системы, устойчивость тривиального решения которой определялась построением функций $V(x_1 x_2 \ldots x_n; t)$, удовлетворяющих условиям общих теорем Ляпунова.

Далее Ляпунов исследовал устойчивость по первому приближению периодических движений, понимая под ними тот случай, когда коэффициенты P_s и p_{sk} разложений (2) являются периодическими функциями времени с одинаковым вещественным периодом ω.

Ляпунов доказал, что система (3) первого приближения в этом случае периодических коэффициентов является приводимой. Это значит, что при помощи линейного преобразования

$$z_s = q_{s1}x_1 + q_{s2}x_2 + \ldots + q_{sn}x_n$$
$$s = 1, 2, \ldots, n,$$

коэффициенты которого q_{sk} являются вещественными функциями времени с периодом ω или 2ω, система (3), в том случае, когда коэффициенты p_{sk} имеют непрерывные производные, может быть преобразована в систему с постоянными коэффициентами.

Для систем (2) с периодическими коэффициентами Ляпунов установил достаточные критерии устойчивости и неустойчивости по первому приближению, аналогичные критериям для случая установившихся движений. Ляпунов дал также полное исследование «сомнительных» случаев для периодических движений, аналогичных упомянутым выше случаям для системы с постоянными коэффициентами.

Ляпунову принадлежит ряд фундаментальных результатов по теории первого приближения и в общем случае системы (2) с коэффициентами p_{sk} и P_s, являющимися некоторыми вещественными, непрерывными и ограниченными функциями времени. Для этих общих исследований Ляпунов вводит понятие „характеристичного числа" некоторой функции $x(t)$, определенной для достаточно больших значений t и остающейся конечной для конечных t. Это число характеризует поведение функции $x(t)$ при больших t, причем за эталоны сравнения берутся функции e^{kt} при различных значениях постоянной k.

Вещественное число λ Ляпунов называет характеристичным числом функции $x(t)$, если при любом положительном α и при $t \to \infty$ произведение

$$x(t) e^{(\lambda - \alpha)t} \to 0,$$

а произведение $x(t) e^{(\lambda + \alpha)t}$ является по модулю неограниченной функцией.

Если $x(t) e^{\mu t} \to 0$ при любом вещественном μ, то характеристичное число функции $x(t)$ считается равным $+\infty$, а если, наоборот $x(t) e^{\mu t}$ неограниченно растет, то характеристичное число считается равным $-\infty$.

Ляпунов доказал, что всякое решение

$$x_1(t)\; x_2(t) \;\ldots\; x_n(t),$$

отличное от нулевого, системы первого приближения (3) имеет конечное характеристичное число.

Можно подобрать независимые решения системы так, чтобы сумма их характеристичных чисел была наибольшей. В каждой такой „нормальной системе решений“ набор характеристичных чисел $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$ будет одним и тем же. Эти числа $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$ называются характеристичными числами системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n. \qquad (3)$$

Для суммы $\sigma=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$ доказывается неравенство

$$\sigma \geqslant -\mu,$$

где μ — характеристичное число функции

$$e^{-\int (p_{11}+p_{22}+\ldots+p_{nn})\,dt}.$$

Если $\sigma=-\mu$, то система (3) называется правильной. К классу правильных систем принадлежит подкласс приводимых систем. Система (3) называется приводимой, если ее можно привести к системе с постоянными коэффициентами при помощи линейного преобразования

$$z_s=q_{s1}x_1+q_{s2}x_2+\ldots+q_{sn}x_n;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

с ограниченной обратной матрицей и с коэффициентами $q_{sk}(t)$, являющимися непрерывными и ограниченными функциями t.

Ляпунов доказал такие теоремы:

1. Если система (3) правильная и у любого ее решения характеристичное число положительно, то для системы (2) имеет место устойчивость.

2. Если система (3) приводимая и среди ее решений есть решения с отрицательным характеристичным числом, то для системы (2) имеет место неустойчивость.

Н. Г. Четаев доказал, что для суждения о неустойчивости системы (2) достаточно того, чтобы система (3) была правильной, а среди ее характеристичных чисел было бы одно отрицательное. Большое и систематическое исследование приводимых систем принадлежит Н. П. Еругину. Работы по теории первого приближения, написанные после Ляпунова, многочисленны и разносторонни. Наиболее общий из известных критериев устойчивости по первому приближению принадлежит К. П. Персидскому. Теорема Персидского гласит: для того чтобы нулевое решение системы

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_s+\ldots+p_{sn}x_n+X_s' \qquad (2)$$

было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы для системы первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n \qquad (3)$$

существовала знакоопределенная функция V, допускающая бесконечно малый высший предел, полная производная $\frac{dV}{dt}$ которой в силу уравнений первого приближения была бы знакоопределенной функцией знака противоположного с V.

Другие критерии устойчивости по первому приближению установили О. Перрон (1930 г.) и И. Г. Малкин (1937 г.).

Кроме приведенных выше результатов, необходимо в докторской диссертации А. М. Ляпунова отметить еще исследования, относящиеся к вопросу о существовании периодических решений у дифференциальных уравнений возмущенного движения, а также исследования случая, когда уравнения возмущенного движения имеют вид канонических уравнений динамики.

Исследования А. М. Ляпунова, относящиеся к нахождению периодических решений у дифференциальных уравнений, имеют фундаментальное значение для современной теории нелинейных колебаний в механике и радиотехнике, теория же устойчивости канонических систем чрезвычайно важна для возможности строгого исследования вопросов устойчивости в области небесной механики. Общей теории устойчивости движения, кроме докторской диссертации А. М. Ляпунова, посвящены также ряд его работ, написанных в период с 1888 г. до 1897 г.

В работе «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости (1888 г.), которая является первой из этого цикла написанной в Харькове, изучается устойчивость движения твердого тела в жидкости, при котором угловая скорость тела остается постоянной по величине и направлению, а поступательное движение является прямолинейным и равномерным. Жидкость считается идеальной, несжимаемой и покоющейся на бесконечности, а ее движение потенциальным. При этих предположениях движение жидкости определяется движением твердого тела в ней. В работе используются некоторые результаты точной теории устойчивости движения, изложенные в систематической форме в докторской диссертации, в частности строгие методы в теории Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Подробно изучено поведение корней характеристического уравнения.

В большом исследовании «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах» (1889 г.) речь идет о том случае, когда три тела образуют в невозмущенном движении равносторонний треугольник. Движение считается устойчивым, если после сообщения достаточно малых возмущений треугольник будет сколь угодно мало отличаться от равностороннего $\left(\text{углы его от } \frac{\pi}{3}\right)$ для любого $t > t_0$. Закон для сил притяжения остается произвольным. В этом случае уравнения возмущенного движения будут уравнениями с постоянными коэффициентами.

А. М. Ляпунов исследует подробно и тот случай, когда в невозмущенном движении расстояние между точками меняется периодически между известными пределами. Ляпунов называет такие движения периодическими и исследует вопрос об их устойчивости. Им рассмотрены все частные случаи, которые могут иметь интерес в приложениях. Доказано, в частности, что если силы притяжения между телами обратно пропорциональны квадрату расстояния, то всякое периодическое движение устойчиво, если только масса одного из тел достаточно велика по сравнению с массами двух других.

Две статьи были опубликованы в 1893 г. Первая из них—«Исследования одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения». В этой работе исследовался упоминаемый выше «сомнительный» случай установившегося движения, когда среди корней характеристического уравнения первого приближения имеется двойной нулевой корень, а все остальные корни имеют отрицательную вещественную часть. Во второй статье—«К вопросу об устойчивости движения» А. М. Ляпунов доказывает, что в случае установившихся движений, когда первое приближение не решает вопроса об устойчивости, всегда можно подобрать коэффициенты в нелинейных членах разложения правых частей дифференциальных уравнений возмущенного движения так, чтобы имела место либо устойчивость, либо неустойчивость, по желанию.

Очень большое значение для теории устойчивости имеет работа Ляпунова 1897 г. «О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не имеет максимум». В ней доказываются две теоремы Ляпунова, представляющие собой почти полное обращение теоремы Лагранжа—Дирихле об устойчивости равновесия. Неустойчивость равновесия А. М. Ляпунов доказывает в предположении, что отсутствие максимума силовой функции обнаруживается рассмотрением членов второго измерения в разложении силовой функции.

Таковы основные работы А. М. Ляпунова по теории устойчивости движения механических систем с конечным числом степеней свободы, написанные им в Харькове. Полученные в этих работах результаты позволили А. М. Ляпунову создать впоследствии (в петербургский период деятельности) исчерпывающую по полноте и строгости теорию фигур равновесия вращающейся однородной и неоднородной жидкой массы. При исследовании вопроса об устойчивости этих фигур до Ляпунова часто ограничивались первым или, в лучшем случае, вторым приближением, что приводило иногда к ошибочным результатам. В качестве примера можно указать на известную ошибку астронома Дарвина (сына знаменитого натуралиста) в вопросе об устойчивости неэллипсоидальных фигур равновесия, открытых Ляпуновым. Ошибочность суждения Дарвина об устойчивости этих фигур (а на этом суждении основывалась вся космогоническая теория Дарвина) была строго доказана А. М. Ляпуновым.

Следует заметить, что исчерпывающее исследование вопроса об устойчивости известных ранее эллипсоидальных фигур равновесия дано Ляпуновым еще в магистерской диссертации, опубликованной им до приезда в Харьков в 1884 г.

Перейдем теперь к работам А. М. Ляпунова по механике, созданным им в Харькове и не относящимся непосредственно к теории устойчивости движения. Среди них наибольшее значение имеют, повидимому, исследования по теории потенциала и динамике твердого тела. Из работ по теории потенциала упомянем следующие.

В работе «Некоторое обобщение формулы Лежен—Дирихле для потенциальной функции эллипсоида на внутреннюю точку» (1885 г.) исследуется интеграл

$$V(xyz)=\iiint\frac{F(r)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

распространенный на эллипсоид

$$\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}+\frac{\zeta^2}{C^2}\leqslant 1,$$

в предположении, что точка (xyz) также принадлежит эллипсоиду.

Ляпунов приходит к следующему результату. Если A — наибольшая полуось, а $F(r)$ — функция, регулярная в круге $|z|\leqslant k$, где $k>2A$, то

$$V(xyz)=2ABC\int\limits_{(l)}\frac{H(\lambda)\,d\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}F\left(-i\sqrt{\lambda H(\lambda)}\cos\varphi\right)\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

где

$$D(\lambda)=\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}$$

$$H(\lambda) = 1 - \frac{x^2}{A^2+\lambda} - \frac{y^2}{B^2+\lambda} - \frac{z^2}{C^2+\lambda}.$$

Контур (l) интегрирования идет по вещественной оси от точки $\lambda=0$ до точки $\lambda=R$, дальше по всей окружности с центром в точке $\lambda=0$ и радиусом R и, наконец, по вещественной оси от $\lambda=R$ до $\lambda=0$, причем

$$\frac{k^2 - k\sqrt{k^2-4A^2}}{2} < R < \frac{k^2+k\sqrt{k^2-4A^2}}{2}.$$

В работе „О теле наибольшего потенциала" (1886 г.) доказывается, что если существует такое тело D, для которого интеграл

$$\Pi = \iint\limits_{DD} \frac{d\tau\, d\tau'}{r}$$

достигает при заданном объеме D точной верхней границы, то D есть шар. Этот результат связан с вопросом об устойчивости сферы, как фигуры равновесия вращающейся жидкой массы.

Основной работой А. М. Ляпунова по теории потенциала в харьковский период его деятельности является большое исследование «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле», опубликованное в 1898 г. Эта работа А. М. Ляпунова имеет большое значение для современного этапа развития теории потенциала, так как в ней содержится ряд принципиально важных результатов, относящихся, с одной стороны, к строгому исследованию свойств простого и двойного слоя, а, с другой стороны, к задаче Дирихле и некоторым положениям теории гармонических функций. Работа состоит из трех глав. В первой главе, носящей вводный характер, содержится ряд важных для дальнейшего определений и предварительных результатов. Так, Ляпунов в этой главе дает определение и свойства тех поверхностей S, о которых речь идет в дальнейшем исследовании (эти поверхности известны сейчас в теории уравнений в частных производных под именем поверхностей Ляпунова), а также рассматривает поведение производных от потенциала простого слоя вблизи поверхности S. Так, например, здесь доказывается, что, если плотность слоя удовлетворяет условию Липшица, то для потенциала слоя существуют предельные значения всех трех частных производных первого порядка по координатам. Эти предельные значения непрерывны вдоль поверхности S. Глава вторая работы посвящена исследованию основной задачи электростатики об определении равновесной плотности электрического заряда на поверхности проводника. Доказывается теорема о существовании единственности и непрерывности решения соответствующего уравнения задачи, задающего плотность заряда в виде интеграла, распространенного по поверхности S проводника. В третьей главе основное место уделено исследованию вопроса о существовании на поверхностях S предельных значений производных у функций, являющихся решением задачи Дирихле. Основной результат этого иследования состоит в установлении условия, необходимого и достаточного для существования нормальной производной у этой гармонической функции. Доказано, что таким условием является существование нормальной производной у потенциала двойного слоя, плотность которого равна граничным значениям искомой гармонической функции. Этот результат позволил Ляпунову дать строгое доказательство формулы, определяющей решение задачи Дирихле через нормальную производную от функции Грина.

В заключение остановимся на работе А. М. Ляпунова, имеющей чрезвычайно большое принципиальное значение для динамики твердого тела, на работе «Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку» (1894).

Известно, что С. В. Ковалевская не только открыла новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (так называемый случай Ковалевской), но и пришла в результате своего анализа к выводу, что открытым ею случаем, а также известными ранее случаями Эйлера и Лагранжа, исчерпываются все возможные случаи интегрируемости в однозначных функциях, не имеющих особых точек, кроме полюсов. Речь при этом идет об однозначных общих решениях, т. е. решениях при любых начальных условиях движения. Однако, анализ С. В. Ковалевской, как показал впервые академик А. А. Марков, страдал неполнотой и поэтому теорема об отсутствии новых возможных общих решений, кроме указанных трех, была ею доказана не вполне строго. Этот пробел был восполнен А. М. Ляпуновым. Он строго доказал теорему С. В. Ковалевской и, кроме того, обобщил ее, доказав эту теорему для любых однозначных общих интегралов, в то время, как С. В. Ковалевская ограничивалась только такими однозначными общими интегралами, которые выражаются рядами Лорана с конечной главной частью.

Теорема А. М. Ляпунова гласит: Из всех случаев, когда постоянные A, B, C, α, β, γ вещественны и A, B, C все отличны от нуля, известные три случая суть единственны, в которых функции p, q, r, ξ, η, ζ, определяемые уравнениями движения, однозначны при всяких начальных значениях. Иными словами, кроме случаев Эйлера, Лагранжа и Ковалевской всегда существуют такие вещественные начальные значения p_0, q_0, r_0; ξ_0, η_0, ζ_0 (при условии $\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2=1$), для которых среди функций p, q, r; ξ, η, ζ, являющихся решением соответствующей системы дифференциальных уравнений, имеются многозначные функции времени. Здесь A, B, C являются моментами инерции твердого тела относительно главных осей инерции тела, построенных для неподвижной его точки; α, β, γ являются декартовыми координатами центра тяжести тела в этих же осях; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости тела на эти оси и, наконец, ξ, η, ζ — направляющие косинусы (в этих же осях) орта вертикали.

Можно указать две области механики, где исследования А. М. Ляпунова были особенно многочисленны и плодотворны, где они оказались особенно важными для истории науки. Речь идет, во-первых, о теории устойчивости движения механических систем с конечным числом степеней свободы и, во-вторых, о теории фигур равновесия однородной и неоднородной вращающейся жидкой массы.

Для харьковского периода деятельности А. М. Ляпунова характерны исследования в первой из этих двух областей. В Харькове был создан классический труд Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения». До Ляпунова не существовало общей строгой теории устойчивости движения, до Ляпунова не были известны (несмотря на многочисленные попытки их получения) общие критерии устойчивости и неустойчивости произвольного движения, не был строго исследован основной метод суждения об устойчивости движения — метод первого приближения. Все эти проблемы были решены А. М. Ляпуновым. Его классический труд является основой всех современных исследований в этой области. Существенной проблемой в этой области, которую с успехом уже начали разрабатывать, является проблема обобщения и развития теории Ляпунова в механике сплошных сред.

Создание строгой теории устойчивости движения деформируемой сплошной среды, строгой теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных является, несомненно, одной из существенных задач современной механики и математики. Первые результаты в этом направлении уже получены школами К. П. Персидского и М. Г. Крейна.