Выпуск 9 1969

ХАРАКТЕРИСТИКА НУЛЕЙ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

А. И. Хейфиц

В этой статье рассматриваются целые функции конечной степени, представимые в виде

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} \prod_{-N}^{N} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right), \tag{1}$$

где последовательность $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет следующему условию: ($\Delta = \text{const}$)

$$a_k = \Delta \cdot k + \psi(k), \ |\psi(k)| \leqslant L, \ (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots). \tag{2}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_k \neq 0$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Функции вида (1)—(2) изучались рядом авторов [1—3].

Нас интересуют условия, которым должна удовлетворять последовательность $\{\psi(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, для того чтобы функция $f(z)$ вида (1)—(2) принадлежала некоторым специальным классам функций. Будем рассматривать классы, элементами которых являются

1) целые функции конечной степени, удовлетворяющие при некотором $\nu \geqslant 0$ неравенствам

$$C_1(y) \cdot (1 + |x|)^{-\frac{\nu}{\Delta}} \leqslant |f(x + iy)| \leqslant C_2(y)(1 + |x|)^{\frac{\nu}{\Delta}}, \tag{3}$$
$$-\infty < x < \infty, \ |y| > L = \sup_k |\psi(k)|;$$

2) целые функции конечной степени, представимые в следующем виде

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itz} d\sigma(t), \ \operatorname*{Var}_{-\pi}^{\pi} \sigma(t) < \infty; \tag{4}$$

3) целые функции конечной степени, принадлежащие на вещественной оси $L^p(-\infty, \infty)$ с $p > 0$.

Важную роль в наших рассмотрениях играет специальный функционал $L_\tau[\psi]$

$$L_\tau[\psi] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{k} [\psi(k + \tau) - \psi(k)],$$

где τ — целое число. Символ Σ' означает, как обычно, что при суммировании пропускается слагаемое, соответствующее $k = 0$.

Функционал $L_\tau[\psi]$ близок к введенному М. Г. Крейном и Б. Я. Левиным функционалу $L_{\tau, h}[\psi]$,

$$L_{\tau, h}[\psi] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\psi(k + \tau) - \psi(k)] \frac{k}{k^2 + h^2},$$

где h — некоторая положительная постоянная.

В следующей лемме утверждается, что во всех наших рассмотрениях эти функционалы эквивалентны.

Лемма 1. *Если последовательность* $\{\psi(k)\}$ *ограничена, то при каждом* $h>0$

$$|L_{\tau,h}[\psi]-L_\tau[\psi]|\leqslant 6h^2\sup_k|\psi(k)|.$$

Доказательство. Оценим разность $L_{\tau,h}[\psi]-L_\tau[\psi]$. Имеем

$$L_{\tau,h}[\psi]-L_\tau[\psi]=-h^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,[\psi(k+\tau)-\psi(k)]\,\frac{1}{k(k^2+h^2)}\,.$$

Поэтому

$$|L_{\tau,h}[\psi]-L_\tau[\psi]|\leqslant 4h^2\sup_k|\psi(k)|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}<$$

$$<6h^2L,\ \text{где}\ L=\sup_k|\psi(k)|.$$

Лемма доказана.

Нами получены следующие результаты о функциях вида (1)—(2).

Для того чтобы функция $f(z)$ *удовлетворяла неравенствам* (3), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие**

$$|L_\tau[\mathrm{Re}\,\psi]|\leqslant\nu\ln(1+|\tau|)+O(1).$$

Чтобы функция допускала представление (4) *достаточно, а в случае когда ее корни не сливаются***, *и необходимо, чтобы последовательность* $\{\psi(k)\}$ *представлялась в виде*

$$\psi(k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikt}d\sigma_1(t),\quad \operatorname*{Var}_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(t)<\infty.$$

Для того чтобы функция $f(z)$ *принадлежала* $L^p(-\infty,\infty)$ *на вещественной оси, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{p}{\Delta}L_\tau[\mathrm{Re}\,\psi]\right\}<\infty.$$

Теоремы §§ 1, 2 являются обобщением результатов М. Г. Крейна и Б. Я. Левина [2], [3, приложение VI]. Используя принадлежащие им методы, удается также переформулировать условия, необходимые и достаточные для выполнения неравенств (3) в терминах существования некоторой целой функции конечной степени, интерполирующей в целых точках последовательность $\{\psi(k)\}$.

§ 1. ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА ФУНКЦИИ $f(z)$ ВИДА (1)—(2) НА ПРЯМЫХ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Как известно, функция $f(z)$ вида (1)—(2) —целая, конечной степени, вполне регулярного роста, ее индикаторная диаграмма —отрезок мнимой оси $\left[-i\frac{\pi}{\Delta},\ i\frac{\pi}{\Delta}\right]$.

Мы неоднократно будем пользоваться следующим результатом.

Лемма 1.1. *Если* $|\psi(k)|\leqslant L$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$, *то справедлива оценка*

$$|L_\tau[\psi]|\leqslant 4L\ln(1+|\tau|)+O(1).\tag{5}$$

---

* Здесь и всюду в дальнейшем символ $O(1)$ обозначает величину, ограниченную равномерно по τ и x.

** В смысле, который будет уточнен ниже.

Доказательство. Перепишем функционал следующим образом: ($\tau \neq 0$)

$$L_\tau[\psi] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \psi(k)\left[\frac{1}{k-\tau} - \frac{1}{k}\right] - \frac{\psi(0)-\psi(\tau)}{\tau}. \qquad (6)$$

Символ Σ'' означает, что при суммировании пропускаются слагаемые соответствующие $k = 0$ и $k = \tau$. Ядро $\left[\frac{1}{k-\tau} - \frac{1}{k}\right]$ меняет знак в двух точках — $k = 0$ и $k = \tau$. Для оценки функционала $L_\tau[\psi]$ разобьем сумму в правой части (6) на три группы слагаемых, в каждой из которых ядро знакопостоянно (для определенности считаем $\tau > 0$).

$$L_\tau[\psi] = \left(\sum_{-\infty}^{-1} + \sum_{1}^{\tau-1} + \sum_{\tau+1}^{\infty}\right)\psi(k)\left[\frac{1}{k-\tau} - \frac{1}{k}\right] - \frac{\psi(0)-\psi(\tau)}{\tau}.$$

Оценим каждую группу слагаемых в отдельности. Имеем

$$\left|\sum_{-\infty}^{-1}\psi(k)\left[\frac{1}{k-\tau} - \frac{1}{k}\right]\right| \leqslant L\left|\sum_{-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{k-\tau} - \frac{1}{k}\right)\right| = L\left\{\left(\sum_{-\infty}^{-1-\tau} - \sum_{-\infty}^{-1}\right)\frac{1}{k}\right\} =$$

$$= L\sum_{k=1}^{\tau}\frac{1}{k} = L\cdot\ln(1+|\tau|) + O(1).$$

Аналогично

$$\left|\sum_{1}^{\tau-1}\psi(k)\left(\frac{1}{k-\tau} - \frac{1}{k}\right)\right| \leqslant 2L\cdot\ln(1+|\tau|) + O(1)$$

и

$$\left|\sum_{\tau+1}^{\infty}\psi(k)\left(\frac{1}{k-\tau} - \frac{1}{k}\right)\right| \leqslant L\cdot\ln(1+|\tau|) + O(1).$$

Из этих оценок вытекает утверждение леммы.

Замечание. Как показывает соответствующий пример, константа $4L$ в неравенстве (5) не может быть улучшена.

М. Г. Крейн и Б. Я. Левин установили тесную связь между функционалом $L_{\tau,h}[\psi]$ и поведением функции

$$\theta(z) = \ln\left\{f(z)e^{i\frac{\pi}{\Delta}x}\right\}(z = x + iy)$$

на прямых, параллельных вещественной оси. Они доказали, что для ограниченности по абсолютной величине функции $\theta(z)$ на прямой $y = a$ при некотором a (а значит и при всех достаточно больших $|a|$) необходимо и достаточно, чтобы при некотором $h > 0$ выполнялось условие

$$\sup_{-\infty<\tau<\infty}|L_{\tau,h}[\operatorname{Re}\psi]| < \infty$$

[3, приложение VI, лемма 3, стр. 584].

Однако приведенное в [3] доказательство дает несколько больше, а именно, там доказан, но явно не сформулирован, следующий результат.

Теорема А. *Пусть $f(z)$ — функция вида* (1)—(2). *Тогда при* $0 \leqslant x \leqslant \Delta$, $|y| > L$ *и при всех целых* τ *справедливо соотношение*

$$\theta(x + \Delta\cdot\tau + iy) - \theta(x+iy) = \frac{1}{\Delta}L_\tau[\psi] + O(1). \qquad (7)$$

Прямым следствием теоремы A является

Теорема 1.1. *Пусть $f(z)$ — функция вида* (1)—(2). *Для того, чтобы при любом фиксированном y ($|y| > L$) и при всех вещественных x выполнялись неравенства*

$$C_1(y)(1+|x|)^{-\frac{\nu}{\Delta}} \leqslant |f(x+iy)| \leqslant C_2(y)(1+|x|)^{\frac{\nu}{\Delta}},$$

где величины $C_1(y)$, $C_2(y)$ $(0 < C_1(y) \leqslant C_2(y))$ не зависят от x, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$|L_\tau[\operatorname{Re}\psi]| \leqslant \nu \ln(1+|\tau|) + O(1). \tag{8}$$

Для доказательства достаточно приравнять вещественные части обеих сторон равенства (7) и потенцировать.

Замечание. Важный частный случай получается при $\nu = 0$.

Из теоремы A и леммы 1.1 непосредственно вытекает

Следствие. Пусть $f(z)$ — функция вида (1)—(2) и пусть $\sup|\psi(k)| = L$. Тогда при любом фиксированном y ($|y| > L$), и при всех вещественных x выполняются неравенства

$$C_1(y)(1+|x|)^{-\frac{4L}{\Delta}} \leqslant |f(x+iy)| \leqslant C_2(y)(1+|x|)^{\frac{4L}{\Delta}}.$$

Замечание. Н. И. Ахиезер и Б. Я. Левин [1] получили для модуля целой функции $f(z)$ вида (1)—(2) оценки сверху и снизу, зависящие явным образом и от x и от y

$$C_1|z|\left(1+\frac{|z|^2}{|y|}\right)^{-2L-1} e^{\pi|y|} \leqslant |f(z)| \leqslant C_2|z|\left(1+\frac{|z|^2}{|y|}\right)^{2L+1} e^{\pi|y|},$$

$-\infty < x < \infty$, $|y| > 2L+1$; $0 < C_1$, C_2 — абсолютные константы. Здесь $\Delta = 1$*.

М. Г. Крейну и Б. Я. Левину принадлежит следующая теорема [3, приложение VI, теорема 6, стр. 591]: для того, чтобы существовала целая функция конечной степени, не большей π, ограниченная на вещественной оси и принимающая в целых точках k значения $(-1)^k\psi(k)$, где $\{\psi(k)\}$ — ограниченная последовательность, необходимо и достаточно, чтобы при всех целых τ выполнялось условие $L_\tau[\psi] = O(1)$. Докажем более общий факт.

Теорема 1.2. *Пусть $\{\psi(k)\}$ — ограниченная последовательность. Для того, чтобы существовала целая функция $g(z)$ конечной степени, не большей π, удовлетворяющая на вещественной оси неравенству*

$$|g(x)| \leqslant \frac{\nu}{\pi}\ln(1+|x|) + O(1),$$

и такая, что $g(k) = (-1)^k\psi(k)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех целых τ выполнялось неравенство

$$|L_\tau[\psi]| \leqslant \nu \ln(1+|\tau|) + O(1). \tag{9}$$

Замечание. Как следует из леммы 1.1, это условие налагает дополнительные ограничения на последовательность $\{\psi(k)\}$ лишь при $\nu < 4L$.

Доказательство достаточности. Построим функцию $g(z)$ с помощью интерполяционного ряда Лагранжа

$$g(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \psi(k)\left[\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right] + \frac{\psi(0)}{z}\right\}. \tag{10}$$

* См. также [4, стр. 141].

Нетрудно видеть, что $g(z)$ — целая функция конечной степени π, причем $g(k)=(-1)^k\psi(k)$. Для оценки функции $g(x)$ на вещественной оси мы рассмотрим выражение $g(x+\tau)-g(x)$

$$g(x+\tau)-g(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(k+\tau)-\psi(k)}{x-k},$$

где $|x|\leqslant 1$, τ — четное, и сравним его с функционалом $L_\tau[\psi]$:

$$g(x+\tau)-g(x)+\frac{\sin\pi x}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{\psi(k+\tau)-\psi(k)}{k}=$$

$$=\frac{\sin\pi x}{\pi x}\left\{\psi(\tau)-\psi(0)+\sum_{-\infty}^{\infty}{}'[\psi(k+\tau)-\psi(k)]\frac{x^2}{k(x-k)}\right\}.$$

Из этой формулы с помощью простых оценок получим неравенство

$$|g(x+\tau)-g(x)+\frac{\sin\pi x}{\pi}L_\tau[\psi]|\leqslant C, \qquad (11)$$

$|x|\leqslant 1$, τ — четное, константа C не зависит от x и τ. Из неравенств (9), (11) вытекает утверждение теоремы (в сторону достаточности).

Доказательство необходимости. Пусть существует функция $g(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы. Покажем, что она (с точностью до слагаемого, пропорционального $\sin\pi z$) представляется интерполяционным рядом Лагранжа (10). С этой целью рассмотрим функцию $h(z)$

$$h(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\psi(k)\left[\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right]+\frac{\psi(0)}{z}\right\}.$$

Это — целая функция конечной степени, индикаторная диаграмма которой содержится в отрезке мнимой оси $[-i\pi, i\pi]$.

Из неравенства (11), примененного к функции $h(z)$, вытекает

$$|h(x)|\leqslant\pi^{-1}|L_{[x]}[\psi]|+O(1)^*.$$

По лемме 1.1 $|L_{[x]}[\psi]|\leqslant 4L\ln(1+|x|)+O(1)$, и значит,

$$|h(x)|\leqslant 4L\pi^{-1}\ln(1+|x|)+O(1)\ (-\infty<x<\infty).$$

По условию теоремы

$$|g(x)|\leqslant\nu\pi^{-1}\ln(1+|x|)+O(1)\ (-\infty<x<\infty).$$

Функция

$$[g(z)-h(z)]\cdot[\ln(z+i)]^{-1}$$

аналитична в верхней полуплоскости, имеет в этой полуплоскости степень, не превосходящую π и ограничена на вещественной оси. По теореме Фрагмена — Линделефа

$$|[g(z)-h(z)][\ln(z+i)]^{-1}|\leqslant C\exp\{\operatorname{Im} z\}\ (\operatorname{Im} z>0).$$

Оценивая аналогично функцию $g(z)-h(z)$ в нижней полуплоскости, получим, что при всех z

$$|g(z)-h(z)|\leqslant C\ln(1+|z|)\exp\{|\operatorname{Im} z|\}, \qquad (12)$$

где константа C не зависит от z. Функция

$$\chi(z)=[g(z)-h(z)][\sin z]^{-1}$$

* Здесь $[x]$ означает целую часть x.

целая, причем, как следует из (12), удовлетворяет неравенству

$$|\chi(z)| \leqslant C_1 \cdot \ln(1+|z|).$$

Значит, $\chi(z) = \text{const}$ и

$$g(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}\left\{\text{const} + \frac{\psi(0)}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \psi(k)\left[\frac{1}{z-k} - \frac{1}{k}\right]\right\}.$$

Пусть τ — целое. Тогда

$$g\left(\tau+\frac{1}{2}\right) - g\left(1+\frac{(-1)^{\tau-1}}{2}\right) = \frac{(-1)^{\tau}}{\pi}\left\{\frac{\psi(0)}{\tau+\frac{1}{2}} - \frac{\psi(0)}{1+\frac{(-1)^{\tau-1}}{2}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{-\infty}^{\infty} \psi(k)\left[\frac{1}{k-\frac{1}{2}-\tau} - \frac{1}{k-1\,\frac{(-1)^{\tau-1}}{2}}\right]\right\}.$$

Нетрудно видеть, что (ср. (6))

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \psi(k)\left[\frac{1}{k-\frac{1}{2}-\tau} - \frac{1}{k-1-\frac{(-1)^{\tau-1}}{2}}\right] = L_{\tau}[\psi] + O(1),$$

и значит,

$$L_{\tau}[\psi] = (-1)^{\tau-1}\pi g\left(\tau+\frac{1}{2}\right) + O(1).$$

Отсюда следует утверждение теоремы в сторону необходимости.

Из теорем 1.1 и 1.2 непосредственно вытекает

Теорема 1.3. *Пусть $f(z)$ — целая функция вида (1) — (2);*

$$\psi(k) = (-1)^k g(k),$$

где $g(z)$ — целая функция степени, не превосходящей π, удовлетворяющая на вещественной оси неравенству

$$|g(x)| \leqslant \frac{\nu}{\pi}\ln(1+|x|) + O(1). \tag{13}$$

Тогда для функции $f(z)$ выполняются неравенства (3).

Наоборот, если для функции $f(z)$ вида (1) — (2) выполняются неравенства (3), и все корни функции $f(z)$ вещественные, то существует целая функция $g(z)$ степени не выше π, удовлетворяющая неравенству (13) и такая, что

$$g(k) = (-1)^k\psi(k).$$

§ 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛАМИ ФУРЬЕ — СТИЛЬТЬЕСА ФУНКЦИЙ $f(z)$ и $\psi(k)$

Теорема 2.1. *Пусть $f(z)$ — функция вида (1) — (2), и имеет место следующее представление:*

$$\psi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt}d\sigma_1(t), \quad \operatorname*{Var}_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(t) < \infty. \tag{14}$$

Тогда

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itz}d\sigma(t), \quad \operatorname*{Var}_{-\pi}^{\pi} \sigma(t) < \infty. \tag{4}$$

Частный случай этой теоремы, когда $\sigma_1(t)$ — функция скачков, доказан М. Г. Крейном и Б. Я. Левиным [3, приложение, VI, теорема 9, стр. 595]. Их доказательство полностью переносится на случай, когда $\sigma_1(t)$ — произвольная функция ограниченной вариации. Необходимо лишь учесть следующий факт.

Лемма 2.1. Если имеет место (14), *то*

$$L_\tau[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} d\sigma_2(t), \quad \operatorname*{Var}_{-\infty}^{\infty} \sigma_2(t) < \infty.$$

Доказательство этой леммы сводится к применению теоремы Фубини.

В. Э. Кацнельсон заметил, что если функция $\sigma_1(t)$ абсолютно непрерывна, то функция $\sigma(t)$ (и $\sigma_2(t)$) не обязана быть абсолютно непрерывной. Пусть, например,

$$\psi(O) = 1, \quad \psi(k) = O\,(k \neq O).$$

Легко видеть, что соответствующую этой последовательности функцию $\left(\text{а именно, } f(z) = \frac{z-1}{z} \sin z\right)$ нельзя представить с помощью абсолютно непрерывной функции $\sigma(t)$.

Если потребовать, чтобы корни удовлетворяли одному дополнительному условию, то верна обратная теорема.

Теорема 2.2. *Пусть $f(z)$ — функция вида* (1)—(2), *допускающая представление* (4). *Предположим, кроме того, что последовательность ее корней удовлетворяет условию*

$$\left| \operatorname{Re} a_k - \frac{\pi}{\Delta} k - s \right| < \frac{\pi}{4\Delta},$$

где s — некоторое вещественное число. Тогда $a_k = \Delta k + \psi(k)$, причем $\{\psi(k)\}$ допускает представление (14).

Доказательство также переносится со случая, когда $\sigma(t)$ — функция скачков [3, приложение VI, теорема 10, стр. 596].

§ 3. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ФУНКЦИИ $f(z)$ ВИДА (1) — (2) КЛАССАМ $L^p(-\infty, \infty)$ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Нам понадобится следующий результат [5]: если целая функция конечной степени принадлежит $L_p(-\infty, \infty)$ на некоторой прямой, параллельной вещественной оси, то она принадлежит $L^p(-\infty, \infty)$ на любой такой прямой, в том числе и на вещественной оси.

Вернемся к равенству (7). Отделяя в нем «вещественную часть» и вспоминая определение функции $\theta(z)$, получим равенство

$$\ln|f(x + \Delta\tau + iy)| - \ln|f(x + iy)| = \frac{1}{\Delta} L_\tau[\operatorname{Re}\psi] + O(1),$$

где $0 \leqslant x \leqslant \Delta$, $|y| > L$, y — фиксирован.
Следовательно, при всех целых τ имеем неравенства

$$m(x) + \ln|f(x + iy)| + \frac{1}{\Delta} L_\tau[\operatorname{Re}\psi] \leqslant \ln|f(x + \Delta\tau + iy)| \leqslant$$

$$\leqslant M(x) + \ln|f(x + iy)| + \frac{1}{\Delta} L_\tau[\operatorname{Re}\psi],$$

где $m(x)$, $M(x)$ — ограниченные функции. Потенцируя, получим

$$m_1(x)\,|f(x + iy)| \exp\left\{\frac{1}{\Delta} L_\tau[\operatorname{Re}\psi]\right\} \leqslant |f(x + \Delta\tau + iy)| \leqslant$$

$$\leqslant M_1(x)\,|f(x + iy)| \exp\left\{\frac{1}{\Delta} L_\tau[\operatorname{Re}\psi]\right\},$$

где $m_1(x)$, $M_1(x) > 0$ — ограниченные функции.

Отсюда

$$\int_{\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p dx = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\Delta}|f(x+\Delta\tau+iy)|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{p}{\Delta}L_\tau[\operatorname{Re}\psi]\right\}.$$

И аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p dx \geqslant m\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{p}{\Delta}L_\tau[\operatorname{Re}\psi]\right\}.$$

Здесь m и M — положительные постоянные. Из этих неравенств, если учесть замечание в начале этого параграфа, следует

Теорема 3.1. *Для того, чтобы функция $f(z)$ вида (1)—(2) принадлежала $L^p(-\infty, \infty)$ на вещественной оси, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{p}{\Delta}L_\tau[\operatorname{Re}\psi]\right\} < \infty.$$

В некоторых специальных случаях удается получить более простые условия. Предварительно преобразуем функционал $L_\tau[\psi]$ (сравни с (6):

$$L_\tau[\psi] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \psi(k)\left(\frac{1}{k-\tau}-\frac{1}{k}\right)+O(1) = \left(\sum_{-\infty}^{-|\tau|-1}+\sum_{-|\tau|+1}^{-1}+\sum_{1}^{|\tau|-1}+\sum_{|\tau|+1}^{\infty}\right)\times$$

$$\times\,\psi(k)\left(\frac{1}{k-\tau}-\frac{1}{k}\right)+O(1).$$

Оценивая (с учетом ограниченности последовательности $\{\psi(k)\}$) каждую сумму отдельно, придем к равенству

$$L_\tau[\psi] = -\sum_{k=1}^{|\tau|}\frac{\psi(k)-\psi(-k)}{k}+\sum_{k=1}^{|\tau|}\frac{\psi(\tau+k)-\psi(\tau-k)}{k}+O(1).$$

Из теоремы 3.1 и последнего равенства непосредственно следует

Теорема 3.2. *Пусть $f(z)$ — функция вида (1)—(2), корни которой удовлетворяют, кроме того, следующему условию:*

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{|\tau|}\frac{\psi(\tau+k)-\psi(\tau-k)}{k} = O(1). \tag{15}$$

Для того, чтобы $f(x \in L^p(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}{}' \exp\left\{-\frac{p}{\Delta}\sum_{k=1}^{|\tau|}\frac{\operatorname{Re}\psi(k)-\operatorname{Re}\psi(-k)}{k}\right\} < \infty\, k. \tag{16}$$

Рассмотрим, например, следующую функцию: (здесь $\psi(k) = C\cdot\operatorname{sgn}k$)

$$g(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(\Delta\cdot n+C)^2}\right).$$

Легко видеть, что в этом случае

$$\sum_{k=1}^{|\tau|}\frac{\psi(\tau+k)-\psi(\tau-k)}{k} = \frac{C}{|\tau|},$$

т. е. условие (15) выполнено. Ряд, фигурирующий в (16), примет следующий вид:

$$\sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^{-\frac{2Cp}{\Delta}}.$$

Следовательно, $g(x) \in L^p(-\infty, \infty)$ при $C > \frac{\Delta}{2p}$

и $g(x) \notin L^p(-\infty, \infty)$ при $C \leqslant \frac{\Delta}{2p}$.

Теперь естественно возникает следующая задача. Пусть

$$f(z) = VP \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right), \tag{1'}$$

$$a_k = \Delta \cdot \left(|k| + \frac{1}{2p}\right)\operatorname{sgn} k + \varphi(k), \tag{2'}$$

причем $\varphi(k) \to 0$ при $k \to \pm\infty$. При какой скорости стремления $\varphi(k)$ к нулю $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$?

Легко видеть, что если $\psi(k) = \frac{\Delta}{2p}\operatorname{sgn} k + \varphi(k)$, то

$$L_\tau[\psi] = -\frac{\Delta}{p}\ln|\tau| + L_\tau[\varphi] + O(1).$$

Отсюда из теорем 3.1 и 3.2 следует

Теорема 3.3. *Для того чтобы функция $f(z)$ вида $(1')-(2')$ принадлежала $L^p(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:*

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{|\tau|}\exp\left\{\frac{p}{\Delta} L_\tau[\operatorname{Re}\varphi]\right\} < \infty.$$

Если же

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{|\tau|}\frac{\varphi(\tau+k)-\varphi(\tau-k)}{k} = O(1), \tag{15'}$$

то необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{|\tau|}\exp\left\{-\frac{p}{\Delta}\sum_{k=1}^{|\tau|}\frac{\operatorname{Re}\varphi(k)-\operatorname{Re}\varphi(-k)}{k}\right\} < \infty. \tag{16'}$$

Следствие. Если выполняется условие (15′), то необходимым условием того, что функция $f(z)$ вида $(1)-(2')$ принадлежит $L_p(-\infty, \infty)$, является расходимость ряда

$$\operatorname{Re}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\varphi(k)}{k} = \infty. \tag{17}$$

Однако условие (17) не является достаточным, как показывает следующий пример. Пусть

$$h(z) = z^3\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_n^2}\right), \quad a_n = n + \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{\ln n}.$$

Легко видеть, что $h(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ при $\alpha > \frac{1}{4}$, но при $\alpha \leqslant \frac{1}{4}$ $h(x) \notin L^2(-\infty, \infty)$.

Эти результаты можно непосредственно применить к вопросу о полноте системы показательных функций в $L^2(-\pi, \pi)$. Например, из теоремы Н. Левинсона ([6], [3], приложение III, теорема 1, стр. 533) и теоремы 3.1 следует

Теорема 3.4. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *— последовательность комплексных чисел, причем при всех* n

$$|\lambda_n - n| \leqslant L.$$

Обозначим

$$\lambda_n - n = \psi(n).$$

Для того, чтобы последовательность $\{\exp(i\lambda_n t)\}$ *была полной в* $L^2(-\pi, \pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \exp\{2L_\tau[\operatorname{Re}\psi]\} = \infty.$$

Аналогичные результаты можно получить в других терминах. Вернемся к функции $f(z)$ вида (1)—(2). Обозначим через $n(t)$ при $t > 0$ число корней $f(z)$ в полосе $0 < \operatorname{Re} z < t$, а при $t < 0$ — в полосе $t < \operatorname{Re} z < 0$, взятое со знаком минус. И пусть для простоты $\Delta = 1$. Очевидно, $n(t) = t - \frac{1}{2} + \chi(t)$, где $|\chi(t)| \leqslant L + \frac{1}{2}$. Здесь по-прежнему $L = \sup\limits_k |\psi(k)|$. Пусть $p = [L+1]$. Рассмотрим функцию.

$$\omega(z) = \prod_{k=-p}^{p}\left(1 - \frac{z}{k}\right)\prod_{k=p+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)\left(1 - \frac{z}{a_{-k}}\right).$$

Н. И. Ахиезером и Б. Я. Левиным [1] получены следующие неравенства:

$$A + \pi \operatorname{Im}(\zeta_1 - i) - \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\left[\frac{1}{t-\zeta_1} - \frac{1}{t-i}\right]dt \leqslant$$

$$\leqslant \ln|\omega(z)| \leqslant B + \pi \operatorname{Im}(\zeta_2 - i) - \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\left[\frac{1}{t-\zeta_2} - \frac{1}{t-i}\right]dt,$$

где

$$\zeta_1 = z - iL,\ \zeta_2 = z + iL,\ z = x + iy,\ |y| \geqslant 2L + 1.$$

Потенцируя эти неравенства и умножая на $|x|$ (чтобы учесть корень a_0), получим

$$A_1|x|e^{\pi \operatorname{Im}(\zeta_1 - i)}\exp\left\{-\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\left[\frac{1}{t-\zeta_1} - \frac{1}{t-i}\right]dt\right\} \leqslant |x||\omega(z)| \leqslant$$

$$\leqslant B_1|x|e^{\pi \operatorname{Im}(\zeta_2 - i)}\exp\left\{-\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\left[\frac{1}{t-\zeta_2} - \frac{1}{t-i}\right]dt\right\}.$$

Возводя в степень p и интегрируя по x в пределах от $-\infty$ до ∞, получим неравенства

$$A_2\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p\exp\left\{-p\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\left[\frac{1}{t-\zeta_1} - \frac{1}{t-i}\right]dt\right\}dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|x|^p|\omega(z)|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant B_2\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p\exp\left\{-p\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\left[\frac{1}{t-\zeta_2} - \frac{1}{t-i}\right]dt\right\}dx. \tag{18}$$

Здесь A_2 и B_2 не зависят от x. Так как при всех x и при фиксированном y ($|y| \geqslant 2L+1$)

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\left[\frac{1}{t-\zeta_1}-\frac{1}{t-i}\right]dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\left[\frac{1}{t-\zeta_2}-\frac{1}{t-i}\right]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant (L+1)\,2L\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t-\zeta_1)(t-\zeta_2)}\right| = O(1),$$

то интегралы слева и справа в (18) сходятся и расходятся одновременно. Очевидно, что функции $f(z)$ и $x\omega(z)$ $(x = \operatorname{Re} z)$ эквивалентны в смысле принадлежности $L^p(-\infty, \infty)$ на любой прямой, параллельной вещественной оси. Зафиксируем $y = 2L+1$. Теперь из (18), если учесть сделанные замечания, вытекает

Теорема 3.5. *Функция $f(z)$ вида (1)—(2) тогда и только тогда принадлежит $L^p(-\infty, \infty)$ на вещественной оси, когда выполняется условие*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^p \exp\left\{-p \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\left[\frac{1}{t-x+i(L+1)}-\frac{1}{t-i}\right]dt\right\}dx < \infty.$$

Учитывая вещественность $\chi(t)$, это условие можно переписать так:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^p \exp\left\{-p \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\left[\frac{t-x}{(t-x)^2+(L+1)^2}-\frac{t}{t^2+1}\right]dt\right\}dx < \infty.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность Б. Я. Левину за постановку задач, руководство и постоянное внимание к работе, и В. Э. Кацнельсону за помощь при оформлении настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер и Б. Я. Левин. Об интерполировании целых трансцендентных функций конечной степени. Зап. ХГУ и ХМО т. XXIII, Изд-во ХТУ, 1952, 5—26.

2. М. Г. Крейн и Б. Я. Левин. О целых почти-периодических функциях экспоненциального типа. ДАН СССР, 64, № 3, 1949, 285—287.

3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М. 1956.

4. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области. «Наука», М. 1964.

5. A. Plancherel et G. Polya. Fonctions entieres et integrales Fourier multiples. Comm. Math. Helv. 9, 10 (1937).

6. N. Levinson. Gap and density theorems. American Math. Soc. coll. Publications, vol. 26, New Jork, 1940.

Поступила 26 апреля 1968 г.