ОБ УСРЕДНЕННОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ В ОБЛАСТИ С КУСОЧНО-ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г. В. Сузиков, Е. Я. Хруслов

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим в трехмерном пространстве замкнутую поверхность Γ, удовлетворяющую условиям Ляпунова с показателем $\alpha = 1$.

Пусть $\Gamma = \Sigma \cup S \cup \gamma$, где Σ и S — открытые множества на поверхности Γ, а γ — их общая граница, состоящая из конечного числа кусочно-гладких кривых.

Область, внутреннюю к Γ, назовем D_i, внешнюю — D_e.

Рассмотрим в $D_i \cup D_e$ краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = \varphi \text{ в } D_i \cup D_e (\operatorname{Im} k > 0) \tag{1}$$

с такими краевыми условиями на поверхности Γ

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e = 0 \qquad \text{на } \Sigma, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e = \frac{\partial u}{\partial n} \\ h\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = (u)_e - (u)_i \text{ на } S,\end{gathered} \tag{2}$$

где $h(x)$ — положительная и непрерывная на Γ функция, n — внешняя к Γ нормаль, $(f)_i$ и $(f)_e$ означают предельные значения на Γ функции f изнутри и извне соответственно.

Не уточняя пока постановку краевой задачи (1) — (2) (это будет сделано в следующем параграфе), отметим одну из возможных ее физических интерпретаций. Если $k^2 < 0$, то уравнение (1) описывает диффузию частиц. Краевые условия (2) означают, что часть Σ поверхности Γ отражающая, а часть S полупроницаемая, причем поток частиц через S пропорционален разности концентраций.

Нас интересует тот случай, когда поверхность Γ достаточно сильно изрезана линиями γ, так что части Σ и S расположены на Γ достаточно плотно. Можно предполагать, что в этом случае решение краевой задачи (1) — (2) приближенно равно функции, удовлетворяющей на всей поверхности Γ некоторым усредненным граничным условиям, приводящим для любой части этой поверхности в среднем к тому же потоку, что и в исходной задаче.

Для вывода этого граничного условия рассмотрим последовательность задач (1) — (2), в которых разбиение $\Gamma = \Sigma^{(n)} \cup S^{(n)} \cup \gamma^{(n)}$ при

$n \to \infty$ измельчается так, что области $\Sigma^{(n)}$ и $S^{(n)}$ располагаются на поверхности Г все более и более однородно. Мы предполагаем, что $h(x)$ так же может зависеть от n.

Будет доказано, что при определенных условиях на $S^{(n)}$ и $h^{(n)}(x)$ последовательность $u^{(n)}(x)$ решений этих задач сходится к функции $u(x)$, удовлетворяющей в областях D_i и D_e уравнению (1), а на поверхности Г краевым условиям

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \frac{\partial u}{\partial n};$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f[(u)_e - (u)_i], \tag{3}$$

где функция $f(x)$ выражается через некоторые характеристики $h^{(n)}(x)$ и $S^{(n)}$.

Аналогичная задача при $h = 0$ была рассмотрена в [1]. В этом случае функция $f(x)$ оказалась равной плотности емкостей кусков $S^{(n)}$ поверхности Г. С другой стороны, как будет показано, при $h = \mathrm{const} > 0$ функция $f(x)$ выражается через относительную плотность площадей кусков $S^{(n)}$. Более того, мы покажем, что в общем случае $f(x)$ может быть выражена через некоторую характеристику кусков $S^{(n)}$, которую мы сейчас введем.

Определение. Для любой положительной и непрерывной на Г функции $h(P)$, назовем h-емкостью открытого множества σ на поверхности Г, число

$$c_h(\sigma) = \int_\sigma \gamma(x)\, dS_x, \tag{4}$$

где $\gamma(P)$ есть решение уравнения

$$h(P)\gamma(P) + \int_\sigma \frac{\gamma(x)}{r(P,x)} dS_x = 1 \quad P \in \sigma. \tag{5}$$

Предполагается, что границей множеств σ служит конечное число кусочно-гладких кривых.

Понятие h-емкости является, очевидно, обобщением понятия обычной ньютоновой емкости и, как будет показано в § 4, для нее сохраняются основные свойства ньютоновой емкости.

Обозначим через $c_{h^{(n)}}(x, \rho)$ $h^{(n)}$-емкость множества $S^{(n)}(x, \rho) = S^{(n)} \cap K(x, \rho)$, где $K(x, \rho)$ — открытый шар радиуса ρ с центром в точке x.

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть при $n \to \infty$ в любой точке x поверхности* Г *существуют и равны такие пределы:*

$$\lim_{\rho \to 0} \varliminf_{n \to \infty} \frac{c_{h^{(n)}}(x, \rho)}{\pi\rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{c_{h^{(n)}}(x, \rho)}{\pi\rho^2} = f(x), \tag{*}$$

причем функция $f(x)$ непрерывна на Г.

Тогда при $n \to \infty$ в $D_i \cup D_e$ существует предел последовательности $u^{(n)}(P)$ решений краевых задач (1)—(2):

$$\lim_{n \to \infty} u^{(n)}(P) = u(P), \tag{6}$$

и этот предел есть решение такой краевой задачи:

$$\Delta u + k^2 u = \varphi \qquad \text{в } D_i \cup D_e; \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e = \frac{\partial u}{\partial n} \\ &\frac{\partial u}{\partial n} = f\,[(u)_e - (u)_i] \end{aligned}\right\} \quad \text{на } \Gamma. \tag{8}$$

Сходимость в формуле (6) равномерна на любом замкнутом множестве, находящемся на положительном расстоянии от поверхности Г.

§ 1. СТРОГАЯ ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)—(2) И ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Вместо краевой задачи (1) — (2) мы везде в дальнейшем будем рассматривать ее функцию Грина $G(P, Q, k)$, которую определим следующим образом:

1) $$G(P, Q, k) = \frac{e^{ikr(P, Q)}}{4\pi r(P, Q)} + g(P, Q, k),$$

где $g(P, Q, k)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в областях D_i и D_e

$$\Delta g + k^2 g = 0 \quad (\operatorname{Im} k > 0)$$
$$\text{и } g \in W_2^1(D_i), \; g \in W_2^1(D_e).$$

2) Для любых функций $\zeta_i(P) \in W_2^1(D_i)$ и $\zeta_e(P) \in W_2^1(D_e)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_i^\varepsilon} \frac{\partial G(P, Q, k)}{\partial n_P} \zeta_i(P)\, dS_P = \int_S \frac{1}{h(P)} [(G(P, Q, k))_e - (G(P, Q, k))_i]\, \zeta_i(P)\, dS_P;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_e^\varepsilon} \frac{\partial G(P, Q, k)}{\partial n_P} \zeta_e(P)\, dS_P = \int_S \frac{1}{h(P)} [(G(P, Q, k))_i - (G(P, Q, k))_e]\, \zeta_e(P)\, dS_P,$$

где Γ_i^ε и Γ_e^ε — параллельные Г поверхности, лежащие соответственно в D_i и D_e и стремящиеся к Г при $\varepsilon \to 0$; n — внешняя нормаль.

Легко установить, что функция Грина, определенная соотношениями 1 и 2, существует, единственна и при $Q \in D_i$ представима в виде

$$G(P, Q, k) = \begin{cases} G_i(P, Q, k) + \int_S G_i(P, x, k)\, \varphi(x, Q)\, dS_x & P \in D_i \\ -\int_S G_e(P, x, k)\, \varphi(x, Q)\, dS_x & P \in D_e, \end{cases} \tag{9}$$

где $G_i(P, Q, k)$ и $G_e(P, Q, k)$ — функции Грина второй краевой задачи (функции Неймана) для D_i и D_e соответственно, а $\varphi(x, Q)$ есть решение уравнения

$$h(P)\, \varphi(P, Q) + \int_S [G_i(P, x, k) + G_e(P, x, k)]\, \varphi(x, Q)\, dS_x + G_i(P, Q, k) = 0 \qquad P \in S. \tag{10}$$

Аналогичные утверждения верны и для $Q \in D_e$.

Уравнение (10) является основным для нашей краевой задачи. При его исследовании большую роль будет играть следующая

Лемма 1. *Пусть $h(x)$ положительная и непрерывная на* Γ *функция.* Рассмотрим при $\lambda \geqslant 0$ интегральное уравнение

$$h(P)\varphi(P) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma} \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\varphi(x)\,dS_x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma} \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\psi(x)\,dS_x \quad P \in \sigma, \tag{11}$$

где σ — открытое множество на поверхности Γ, с границей, состоящей из конечного числа кусочно-гладких кривых, а $\psi(x) \in L_1(\sigma)$. Тогда всегда

$$\|\varphi\|_{L_1(\sigma)} \leqslant \|\psi\|_{L_1(\sigma)}, \tag{12}$$

и если $\psi(x) \geqslant 0$, то $\varphi(x) \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала уравнение (11), когда правая часть его $F(x)$ есть положительная и непрерывная на $\bar{\sigma}$ функция. Так как $h > 0$ и интегральный оператор, порождаемый ядром $\frac{e^{-\lambda r}}{r}$, положительный, то решение всегда существует. Обозначим его через φ. Докажем, что функция

$$u(P) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma} \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\varphi(x)\,dS_x$$

неотрицательна. Действительно, эта функция непрерывна во всем пространстве (что следует из непрерывности φ, как решения уравнения со слабой особенностью и непрерывной правой частью), вне σ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца $\Delta u - \lambda^2 u = 0$, а на σ — условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = -\beta(P)\varphi(P) = -\frac{\beta(P)}{h(P)}[F(P) - u(P)], \tag{13}$$

где $\beta(P)$ $(0 \leqslant \beta(P) \leqslant 2)$ — угол, под которым видна из точки P часть σ, попавшая внутрь сферы бесконечно малого радиуса с центром в P, деленный на π;

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \lim_{P' \to P}\left(\frac{\partial u(P')}{\partial n}\right),$$

где $P' \in D_i$ и находится на нормали к Γ в точке P (аналогично определяется и $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e$).

Если $u(P) < 0$ в какой-нибудь точке, то в некоторой точке $P_0 \in \bar{\sigma}$ она принимает отрицательное минимальное значение. В этой точке, согласно известной теореме [2],

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e > 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i < 0,$$

что невозможно в силу (13).

Перейдем непосредственно к доказательству леммы.

Пусть $\psi \geqslant 0$. Существует такая последовательность функций ψ_n, непрерывных на $\bar{\sigma}$ и таких, что

$$\psi_n \geqslant 0 \text{ и } \|\psi_n - \psi\|_{L_1(\sigma)} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{14}$$

Будем искать решение уравнения

$$h(P)\varphi_n(P)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\varphi_n(x)\,dS_x=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\psi_n(x)\,dS_x\quad (P\in\sigma)\tag{15}$$

в виде $\varphi_n=\psi_n+\alpha_n$. Тогда для определения α_n получаем уравнения

$$h(P)\alpha_n(P)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\alpha_n(x)\,dS_x=-h(P)\psi_n(P)\quad P\in\sigma.$$

Так как правая часть неположительна и непрерывна, то функция

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\alpha_n(x)\,dS_x,$$

как мы только что доказали, будет неположительной и, следовательно,

$$h(P)[\alpha_n(P)+\psi_n(P)]=h(P)\varphi_n(P)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\alpha_n(x)\,dS_x\geqslant 0,$$

то есть $h\varphi_n\geqslant 0$, и так как $h>0$, то и

$$\varphi_n(x)\geqslant 0.\tag{16}$$

Из (15) и (16) имеем для $P\in\sigma$

$$\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\varphi_n(x)\,dS_x\leqslant\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\psi_n(x)\,dS_x.\tag{17}$$

Поскольку функции, входящие в это неравенство, вне σ удовлетворяют уравнению $\Delta u-\lambda^2 u=0$ $(\lambda^2\geqslant 0)$, то в силу принципа максимума это неравенство имеет место всюду. Интегрируя его по всему пространству при $\lambda>0$, получаем

$$\int\limits_{\sigma}\varphi_n(x)\,dS_x\leqslant\int\limits_{\sigma}\psi_n(x)\,dS_x.\tag{18}$$

(При $\lambda=0$ соотношение (18) получим, разлагая правую и левую часть в (17) по степеням $\frac{1}{r}$ при больших r и сравнивая коэффициенты при $\frac{1}{r}$).

Функция $\varphi_n(x)-\varphi_m(x)$ удовлетворяет уравнению (15), когда в правой части вместо ψ_n стоит $\psi_n-\psi_m$. Разлагая $\psi_n-\psi_m$ на положительную и отрицательную части, точно так же установим, что

$$\int\limits_{\sigma}|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|\,dS_x\leqslant\int\limits_{\sigma}|\psi_n(x)-\psi_m(x)|\,dS_x,\tag{19}$$

откуда в силу (14) следует: существует такая функция $\varphi(x)\in L_1(\sigma)$, что

$$\|\varphi_n(x)-\varphi(x)\|_{L_1(\sigma)}\to 0\ \text{при}\ n\to\infty.\tag{20}$$

Нетрудно видеть, что φ есть решение уравнения (11) в $L_1(\sigma)$.

Делая в (16) и (18) предельный переход при $n\to\infty$ и учитывая (14), (20), получим

$$\varphi\geqslant 0,\ \|\varphi\|_{L_1(\sigma)}\leqslant\|\psi\|_{L_1(\sigma)}.$$

Нам осталось установить только неравенство (12) для случая знакопеременных ψ. Разбивая ψ на положительную и отрицательную части и используя уже полученные результаты, легко проверить, что (12) имеет место и для знакопеременных ψ. Лемма доказана.

Перейдем теперь к исследованию уравнения (10). Мы установим, что для решения этого уравнения можно дать оценки, не зависящие от множества S и функции $h(x)$, а именно имеет место

Лемма 2. *Существует такое $\lambda_0 > 0$, что при $k = i\lambda$ и $\lambda \geqslant \lambda_0$ для решения уравнения (10) справедливы оценки*

$$1.\quad \int\limits_S |\varphi(x, Q)|\, dS_x \leqslant C(Q)$$

$$2.\quad h(P)\,|\varphi(P, Q)| + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r(P, x)}}{r(P, x)} |\varphi(x, Q)|\, dS_x \leqslant C(Q),$$

где $C(Q)$ зависит лишь от Q и не зависит от множества S на поверхности Γ и функции $h(x)$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что правая часть уравнения (10) есть непрерывная функция, а ядро имеет слабую особенность, поэтому $\varphi(P, Q)$ — непрерывная функция P на Γ.

Учитывая представления для функций G_i и G_e, данные в работе [1], мы можем аналогично тому, как это сделано в [1], уравнение (10) переписать в виде

$$h(P)\varphi(P, Q) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P, x)} \varphi(x, Q)\, dS_x + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r(P, x)}}{r(P, x)} \hat{S}A[\varphi](x)\, dS_x +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r(P, x)}}{r(P, x)} \hat{S}[\nu_i](x)\, dS_x = 0. \tag{21}$$

Здесь $A[\varphi]$ интегральный оператор, определенный формулой

$$A[\varphi](x) = \int\limits_S A(x, y, \lambda)\, \varphi(y)\, dS_y, \quad x \in \Gamma, \tag{22}$$

где $A(x, y, \lambda)$ — функция, непрерывная на Γ при $x \neq y$ и удовлетворяющая неравенству

$$|A(x, y, \lambda)| \leqslant A\,|1 + \ln|x - y||; \tag{23}$$

$\hat{S}$ — оператор выметания с Γ на S, определенный равенством

$$\int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(P, x)}}{r(P, x)} f(x)\, dS_x = \int\limits_S \frac{e^{-\lambda r(P, x)}}{r(P, x)} \hat{S}[f](x)\, dS_x \quad P \in S$$

для любой непрерывной на Γ функции;

$\nu_i(P, Q)$ — непрерывная на Γ функция.

Отметим следующие свойства операторов $\hat{S}$ и A, указанные в [1]:

1) $\hat{S}$ — положительный оператор, т. е. если $f(x) > 0$, то

$$\hat{S}[f](x) > 0, \text{ и } \|\hat{S}[f]\|_{L_1(S)} \leqslant \|f\|_{L_1(\Gamma)}; \tag{24}$$

$$2)\ \lim_{\lambda\to\infty} \sup_{y \in \Gamma} \int\limits_\Gamma |A(x, y, \lambda)|\, dS_x = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим такие уравнения:

$$h(P)\tilde{\varphi}(P,Q)+\frac{1}{\pi}\int_S \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\tilde{\varphi}(x,Q)\,dS_x=\frac{1}{\pi}\int_S \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\hat{S}A[\varphi](x)\,dS_x; \qquad (26)$$

$$h(P)\tilde{\nu}_i(P,Q)+\frac{1}{\pi}\int_S \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\tilde{\nu}_i(x,Q)\,dS_x=\frac{1}{\pi}\int_S \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\hat{S}[\nu_i](x)\,dS_x \qquad (27)$$

для $P\in S$. Так как правые части их непрерывны, то и $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\nu}_i$ непрерывны.

Уравнение (21), учитывая (26) и (27), перепишем в виде

$$h(P)[\varphi(P,Q)+\tilde{\varphi}(P,Q)+\tilde{\nu}_i(P,Q)]+\frac{1}{\pi}\int_S \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}[\varphi(x,Q)+\tilde{\varphi}(x,Q)+$$
$$+\tilde{\nu}_i(x,Q)]\,dS_x=0.$$

Поскольку $h>0$, то отсюда сразу следует

$$\varphi(P,Q)=-\varphi(P,Q)-\tilde{\nu}_i(P,Q). \qquad (28)$$

$\tilde{\varphi}(P,Q)$ и $\tilde{\nu}_i(P,Q)$ — решения уравнений (26) и (27). Поэтому в силу леммы 1 и (24) имеют место оценки

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L_1(S)}\leqslant\|SA[\varphi]\|_{L_1(S)}\leqslant\|A[\varphi]\|_{L_1(\Gamma)}; \qquad (29)$$
$$\|\tilde{\nu}_i\|_{L_1(S)}\leqslant\|\hat{S}[\nu_i]\|_{L_1(S)}\leqslant\|\nu_i\|_{L_1(\Gamma)}. \qquad (30)$$

Из (22) и (25) имеем

$$\|A[\varphi]\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(\lambda)\|\varphi\|_{L_1(S)}, \qquad (31)$$

и $\varepsilon(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$.

Выбирая λ_0 таким, чтобы при всех $\lambda>\lambda_0$ $\varepsilon(\lambda)$ было меньше половины, получим из (28)—(31)

$$\|\varphi\|_{L_1(S)}\leqslant 2\|\nu_i\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant C(Q), \qquad (32)$$

и утверждение 1 леммы 2 доказано.

Для доказательства утверждения 2 разобьем $-\hat{S}A[\varphi]-\hat{S}[\nu_i]$ на положительную ψ^+ и отрицательную ψ^- части: $-\hat{S}A[\varphi]-\hat{S}[\nu_i]=\psi^+-\psi^-$, и обозначим через φ^+ (соответственно φ^-) решения уравнений

$$h(P)\varphi^{\pm}(PQ)+\frac{1}{\pi}\int_S \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\varphi^{\pm}(x,Q)\,dS_x=\frac{1}{\pi}\int_S \frac{e^{-\lambda r(P,x)}}{r(P,x)}\psi^{\pm}(x,Q)\,dS_x. \qquad (33)$$

В силу леммы 1 $\varphi^+(P,Q)\geqslant 0$ и $\varphi^-(P,Q)\geqslant 0$. Из определения функций $\psi^{\pm}$ и положительности оператора $\hat{S}$ имеем

$$\psi^{\pm}\leqslant\hat{S}[|A[\varphi]|]+\hat{S}[|\nu_i|].$$

Из этого неравенства и определения оператора $\hat{S}$ следует такая оценка для правой части (33):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r (P, x)}}{r(P, x)}\psi^{\pm}(x, Q)\,dS_x \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda r (P, x)}}{r(P, x)}|A[\varphi](x)|\,dS_x + $$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda r (P, x)}}{r(P, x)}|\nu_i(x, Q)|\,dS_x.$$

Из нее, учитывая (22), (23), (32), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r (P, x)}}{r(P, x)}\psi^{\pm}(x, Q)\,dS_x \leqslant C(Q),$$

где $C(Q)$ зависит лишь от Q и не зависит от множества S и функции h.

Отсюда в силу (33) имеем

$$h(P)\,\varphi^{\pm}(P, Q) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r (P, x)}}{r(P, x)}\varphi^{\pm}(x, Q)\,dS_x \leqslant C(Q),$$

а так как $\varphi(P, Q) = \varphi^{+}(P, Q) - \varphi^{-}(P, Q)$ и $\varphi^{\pm}(P, Q) \geqslant 0$, $h(P) > 0$, то

$$h(P)\,|\varphi(P, Q)| + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r (P, x)}}{r(P, x)}|\varphi(x, Q)|\,dS_x \leqslant C(Q).$$

Лемма доказана.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть выполнены условия теоремы 1. Рассмотрим последовательность функций Грина краевых задач (1) — (2) при $k = i\lambda$, $\lambda > \lambda_0$.

При каждом n функция Грина $G^{(n)}(P, Q, i\lambda)$ может быть записана в виде

$$G^{(n)}(P, Q, i\lambda) = \begin{cases} G_i(P, Q, i\lambda) + \int\limits_\Gamma G_i(P, x, i\lambda)\,\varphi^{(n)}(x, Q)\,dS_x & P \in D_i \\ -\int\limits_\Gamma G_e(P, x, i\lambda)\,\varphi^{(n)}(x, Q)\,dS_x & P \in D_e \end{cases} \qquad (34)$$
$$Q \in D_i,$$

где $\varphi^{(n)}(x, Q) = 0$ на $\Gamma \setminus S^{(n)}$, а на $S^{(n)}$ есть решение уравнения (10).

В силу леммы 2

$$\int\limits_\Gamma |\varphi^{(n)}(x, Q)|\,dS_x < C(Q).$$

Из этой оценки следует, что последовательность мер $\varphi^{(n)}(x, Q)\,dS_x$ слабо компактна, т. е. существует такая подпоследовательность n_k, что для любой непрерывной на Γ функции $F(x)$

$$\lim_{n=n_k \to \infty}\int\limits_\Gamma F(x)\,\varphi^{(n)}(x, Q)\,dS_x = \int\limits_\Gamma F(x)\,d\mu(x, Q).$$

Так как функция $G_i(P, x, i\lambda)$ непрерывна при $P \in D_i$, а функция $G_e(P, x, i\lambda)$ непрерывна при $P \in D_e$, то делая в (34) предельный переход при $n = n_k \to \infty$, получим

$$\lim_{n=n_k\to\infty} G^{(n)}(P, Q, i\lambda) = G(P, Q, i\lambda) \tag{35}$$

и

$$G(P, Q, i\lambda) = \begin{cases} G_i(P, Q, i\lambda) + \int\limits_\Gamma G_i(P, x, i\lambda)\, d\mu(x, Q) & P \in D_i \\ -\int\limits_\Gamma G_e(P, x, i\lambda)\, d\mu(x, Q) & P \in D_e, \end{cases} \tag{36}$$

причем сходимость в (35), как легко видеть, равномерна по точке P, пробегающей любое множество, находящееся на положительном расстоянии от поверхности Г.

Легко установить, что $\varphi^{(n)}(x, Q)$ непрерывно зависит от Q для Q, находящихся на положительном расстоянии от поверхности Г. Это позволяет выбрать последовательность n_k так, что сходимость в (35) будет равномерной на любом множестве точек P, Q, находящемся на положительном расстоянии от поверхности Г.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3. *Пусть φ есть решение уравнения*

$$h(P)\varphi(P) + \frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma \frac{\varphi(x)}{r(P, x)}\, dS_x = F(x), P \in \sigma \tag{37}$$

и $m \leqslant F(x) \leqslant M$, а множество σ такое, что для него введено понятие h-емкости. Тогда

$$mc_h(\sigma) \leqslant \int\limits_\sigma \varphi(x)\, dS_x \leqslant Mc_h(\sigma).$$

Доказательство. h-емкость множества σ определена соотношениями (4), (5). Умножая (5) на φ и интегрируя обе части получившегося равенства, получаем

$$\int\limits_\sigma h(P)\gamma(P)\varphi(P)\, dS_P + \frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma \left[\int\limits_\sigma \frac{\gamma(x)}{r(P, x)}\, dS_x\right]\varphi(P)\, dS_P = \int\limits_\sigma \varphi(P)\, dS_P.$$

Заменяя $h(P)\varphi(P)$ его выражением из (37), имеем

$$\int\limits_\sigma \varphi(P)\, dS_P = \int\limits_\sigma \gamma(P) F(P)\, dS_P,$$

и так как $\gamma(P) \geqslant 0$, то отсюда и из (4) непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Из условий теоремы 1 следует, что для любого куска ΔS поверхности Г, для которого введено понятие h-емкости, существует такое число $N = N(\Delta S)$, что при всех $n > N$*

$$c_{h^{(n)}}(\Delta S \cap S^{(n)}) \leqslant M \operatorname{mes} \Delta S,$$

где M не зависит от n и ΔS.

Мы не будем здесь приводить доказательство этой леммы, ибо оно по сути не отличается от доказательства леммы 2 работы [3]. Заметим только, что доказательство в работе [3] основано на свойствах монотонности и полуаддитивности емкости. Аналогичные свойства h-емкости доказаны в § 4.

Из утверждения 2 леммы 2 следует, что

$$h^{(n)} |\varphi^{(n)}(P, Q)| + \frac{1}{\pi} \int\limits_{S^{(n)}} \frac{|\varphi^{(n)}(x, Q)|}{r(P, x)} dS_x \leqslant C(Q),$$

где $C(Q)$ не зависит от n.

Отсюда, учитывая лемму 3, получаем

$$\int\limits_{\Delta S} |\varphi^{(n)}(x, Q)| dS_x \leqslant C(Q) c_{h^{(n)}} (\Delta S \cap S^{(n)}), \tag{38}$$

а в силу леммы 4 для $n > N(\Delta S)$

$$\int\limits_{\Delta S} |\varphi^{(n)}(x, Q)| dS_x \leqslant C(Q) M \operatorname{mes} \Delta S \tag{39}$$

для любого куска ΔS поверхности Γ.

Из слабой сходимости $\varphi^{(n)}$ и (39) следует

$$\lim_{n=n_k \to \infty} \int\limits_{\Delta S} \varphi^{(n)}(x, Q) dS_x = \int\limits_{\Delta S} d\mu(x, Q), \tag{40}$$

а в силу (39) и неравенство

$$\left| \int\limits_{\Delta S} d\mu(x, Q) \right| \leqslant C(Q) M \operatorname{mes} \Delta S$$

для любого куска ΔS поверхности Γ.

Из этого неравенства вытекает, что мера $d\mu$ абсолютно непрерывна и имеет на поверхности Γ ограниченную плотность $\varphi(x, Q)$, так что

$$\int\limits_{\Delta S} d\mu(x, Q) = \int\limits_{\Delta S} \varphi(x, Q) dS_x. \tag{41}$$

Поэтому (36) запишем в виде

$$G(P, Q, i\lambda) = \begin{cases} G_i(P, Q, i\lambda) + \int\limits_S G_i(P, x, i\lambda) \varphi(x, Q) dS_x & P \in D_i \\ \qquad - \int\limits_S G_e(P, x, i\lambda) \varphi(x, Q) dS_x & P \in D_e \end{cases} \tag{42}$$

и разность значений G на Γ

$$\begin{aligned} [G(P, Q, i\lambda)]_e - [G(P, Q, i\lambda)]_i = -G_i(P, Q, i\lambda) - \\ - \int\limits_\Gamma [G_i(P, x, i\lambda) + G_e(P, x, i\lambda)] \varphi(x, Q) dS_x \end{aligned} \tag{43}$$

есть непрерывная на Γ функция.

Пусть y — произвольная точка поверхности Г. Выберем два положительных числа ρ и ρ_1 и $\rho_1 > \rho$. Обозначим

$$S(y, \rho) = K(y, \rho) \cap \Gamma; \quad S^{(n)}(y, \rho) = S(y, \rho) \cap S^{(n)};$$
$$\Delta S(y, \rho, \rho_1) = S(y, \rho_1) \diagdown S(y, \rho); \quad \Delta S^{(n)} = \Delta S^{(n)}(y, \rho, \rho_1) = \\ = \Delta S(y, \rho, \rho_1) \cap S^{(n)};$$

$K(y, \rho)$ — открытый шар радиуса ρ с центром y.

В работе [1] показано, что

$$G_i(P, x, i\lambda) + G_e(P, x, i\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\lambda r(P, x)}}{r(P, x)} + \Phi(P, x),$$

где $\Phi(P, x)$ — непрерывная функция.

Перепишем основное уравнение (10) в виде

$$h^{(n)}(P)\varphi^{(n)}(P, Q) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{S(y, \rho)} \frac{\varphi^{(n)}(x, Q)}{r(P, x)} dS_x + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Delta S(y, \rho, \rho_1)} \frac{\varphi^{(n)}(x, Q)}{r(P, x)} dS_x =$$
$$= -G_i(y, Q, i\lambda) - \int\limits_{\Gamma} \{G_i(y, x, i\lambda) + G_e(y, x, i\lambda)\} \varphi(x, Q)\, dS_x + \varepsilon_1^{(n)}(P, \rho_1) +$$
$$+ \varepsilon_2^{(n)}(P, \rho_2) + \varepsilon_3(P, \rho, \rho_1) \quad (P \in S^{(n)}), \tag{44}$$

где

$$\varepsilon_1^{(n)}(P, \rho_1) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{S(y, \rho_1)} \left[\frac{1 - e^{-\lambda r(P, x)}}{r(P, x)} - \pi\Phi(P, x)\right] \varphi^{(n)}(x, Q)\, dS_x; \tag{45}$$

$$\varepsilon_2^{(n)}(P, \rho_1) = \int\limits_{\Gamma \diagdown S(y, \rho_1)} \{G_i(P, x, i\lambda) + G_e(P, x, i\lambda)\} [\varphi(x, Q) - \\ - \varphi^{(n)}(x, Q)]\, dS_x; \tag{46}$$

$$\varepsilon_3(P, \rho, \rho_1) = \int\limits_{S(y, \rho_1)} \{G_i(y, x, i\lambda) + G_e(y, x, i\lambda)\} \varphi(x, Q)\, dS_x + \\ + \int\limits_{\Gamma \diagdown S(y, \rho_1)} \{G_i(y, x, i\lambda) - G_i(P, x, i\lambda) + G_e(y, x, i\lambda) - \\ - G_e(P, x, i\lambda)\} \varphi(x, Q)\, dS_x + G_i(y, Q, i\lambda) - G_i(P, Q, i\lambda). \tag{47}$$

Так как функции $\Phi(P, x)$ и $\frac{e^{-\lambda r} - 1}{r}$ ограничены, то из (45) следует

$$|\varepsilon_1^{(n)}(P, \rho_1)| \leqslant C \int\limits_{S(y, \rho_1)} |\varphi^{(n)}(xQ)|\, dS_x,$$

откуда, согласно (39), при $n > N(y, \rho_1)$ вытекает неравенство

$$|\varepsilon_1^{(n)}(P, \rho_1)| \leqslant CC(Q) M \operatorname{mes} S(y, \rho_1). \tag{48}$$

Ввиду того, что $\varphi^{(n)}(x, Q)$ слабо сходится к $\varphi(x, Q)$ при $n = n_k \to \infty$, а функции $G_i(P, x, i\lambda)$ и $G_e(P, x, i\lambda)$ ограничены и непрерывны по $x \in \Gamma \diagdown S(y, \rho_1)$ равномерно относительно $P \in S(y, \rho)$ $(\rho < \rho_1)$, то

$$\lim_{n = n_k \to \infty} \varepsilon_2^{(n)}(P, \rho_1) = 0. \tag{49}$$

Функция φ ограничена, поэтому равномерно по $P \in S^{(n)}(y, \rho_1)$

$$|\varepsilon_3(P, \rho_1)| < \varepsilon(\rho_1), \tag{50}$$

где $\varepsilon(\rho_1) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Исследуем теперь функцию

$$\int\limits_{\Delta S(y, \rho, \rho_1)} \frac{\varphi^{(n)}(x, Q)}{r(P, x)} dS_x$$

(заметим, что интегрирование ведется фактически по $\Delta S^{(n)}(y, \rho, \rho_1)$).

Введем $\hat{S}$ — оператор выметания с $\Delta S^{(n)}(y, \rho, \rho_1)$ на $S^{(n)}(y, \rho)$ равенством

$$\int\limits_{\Delta S^{(n)}(y, \rho, \rho_1)} \frac{f(x)}{r(P, x)} dS_x = \int\limits_{S^{(n)}(y, \rho)} \frac{\hat{S}[f](x)}{r(P, x)} dS_x \quad P \in S^{(n)}(y, \rho). \tag{51}$$

Из общей теории потенциала известно [4], что

$$\|\hat{S}[f]\|_{L_1(S^{(n)}_{(y, \rho)})} \leqslant \|f\|_{L_1(\Delta S^{(n)})}. \tag{52}$$

Пусть теперь $\psi^{(n)}(P, Q)$ есть решение уравнения

$$h^{(n)}(P)\psi^{(n)}(P, Q) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{S^{(n)}(y, \rho)} \frac{\psi^{(n)}(x, Q)}{r(P, x)} dS_x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{S^{(n)}(y, \rho)} \frac{\hat{S}[\varphi^{(n)}](x)}{r(P, x)} dS_x$$

$$P \in S^{(n)}(y, \rho). \tag{53}$$

В силу леммы 1 и (51) имеем

$$\|\psi^{(n)}\|_{L_1(S^{(n)}(y, \rho))} \leqslant \|\hat{S}[\varphi]^{(n)}]\|_{L_1(S^{(n)}(y, \rho))} \leqslant \|\varphi^{(n)}\|_{L_1(\Delta S^{(n)})}.$$

Из этого неравенства для $n \geqslant N(y, \rho, \rho_1)$

$$\|\psi^{(n)}\|_{L_1(S^{(n)}(y, \rho))} < CM \operatorname{mes} \Delta S^{(n)}. \tag{54}$$

Учитывая (43), (51), (53), можно равенство (44) для $P \in S^{(n)}(y, \rho)$ записать в виде

$$h^{(n)}(P)[\varphi^{(n)}(P, Q) + \psi^{(n)}(P, Q)] + \frac{1}{\pi} \int\limits_{S^{(n)}(y, \rho)} \frac{\varphi^{(n)}(x, Q) + \psi^{(n)}(x, Q)}{r(P, x)} dS_x =$$

$$= [G(y, Q, i\lambda)]_e - [G(y, Q, i\lambda)]_i + \varepsilon_1^{(n)}(P, \rho_1) + \varepsilon_2^{(n)}(P, \rho_1) + \varepsilon_3(P, \rho, \rho_1). \tag{55}$$

Обозначим через $\varepsilon_1^{(n)}$, $\varepsilon_2^{(n)}$, ε_3 максимумы модулей $\varepsilon_1^{(n)}(P, \rho_1)$ $\varepsilon_2^{(n)}(P, \rho_1)$, $\varepsilon_3(P, \rho, \rho_1)$.

Применяя к (55) лемму 3, получим

$$\int\limits_{S(y, \rho)} \varphi^{(n)}(x, Q)\, dS_x \leqslant \{[G(y, Q, i\lambda)]_e - [G(y, Q, i\lambda)]_i +$$

$$+ \varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)} + \varepsilon_3\} \cdot C_{h^{(n)}}(y, \rho) - \int\limits_{S(y, \rho)} \psi^{(n)}(x, Q)\, dS_x;$$

$$\int\limits_{S(y, \rho)} \varphi^{(n)}(x, Q)\, dS_x \geqslant \{[G(y, Q, i\lambda)]_e - [G(y, Q, i\lambda)]_i -$$

$$- \varepsilon_1^{(n)} - \varepsilon_2^{(n)} - \varepsilon_3\} C_{h^{(n)}}(y, \rho) - \int\limits_{S(y, \rho)} \psi^{(n)}(x, Q)\, dS_x.$$

Заметим, что через $C_{h^{(n)}}(y, \rho)$ мы обозначаем $h^{(n)}$-емкость куска $S^{(n)}(y, \rho)$.

Переходя в этих неравенствах к пределу по подпоследовательности n_k и учитывая (40), (41), (48), (49) (50), (54), получаем

$$\int\limits_{S(y,\rho_1)} \varphi(x, Q)\, dS_x \leqslant \{[G(y, Q, i\lambda)]_e - [G(y, Q, i\lambda)]_i + CC(Q) M \operatorname{mes} S(y, \rho_1) + \varepsilon(\rho_1)\} c_{h^{(n)}}(y, \rho) + CM \operatorname{mes} \Delta S(y, \rho, \rho_1),$$

$$\int\limits_{S(y,\rho_1)} \varphi(x, Q)\, dS_x \geqslant \{[G(y, Q, i\lambda)]_e - [G(y, Q, i\lambda)]_i - CC(Q) M \operatorname{mes} S(y, \rho_1) - \varepsilon(\rho_1)\} c_{h^{(n)}}(y, \rho) - CM \operatorname{mes} \Delta S(y, \rho, \rho_1).$$

Устремим в этих неравенствах сначала ρ к ρ_1, затем поделим обе части получившихся неравенств на $\pi\rho^2$ и устремим ρ к нулю. В результате в силу условий теоремы 1, замечая, что $\operatorname{mes} S(y, \rho) \sim \pi\rho^2$ при $\rho \to 0$, найдем

$$\varphi(y, Q) = \{[G(y, Q, i\lambda)]_e - [G(y, Q, i\lambda)]_i\} f(y). \tag{56}$$

Так как функция $f(y)$ непрерывна по условию теоремы 1, а функции $[G(y, Q, i\lambda)]_e$, $[G(y, Q, i\lambda)]_i$ тоже непрерывны — см. (43), то и $\varphi(y, Q)$ — непрерывная на Γ функция.

Из непрерывности $\varphi(y, Q)$ и представления (42)

$$\left[\frac{\partial G(P, Q, i\lambda)}{\partial n_P}\right]_e = \left[\frac{\partial G(P, Q, i\lambda)}{\partial n_P}\right]_i = \varphi(P, Q) \quad P \in \Gamma. \tag{57}$$

Из формул (42), (56), (57) следует, что функция $G(P, Q, k)$ есть функция Грина краевой задачи (7), (8).

Таким образом, из последовательности $G^{(n)}(P, Q, i\lambda)$ (и, очевидно, из любой ее подпоследовательности) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к функции Грина краевой задачи (7), (8).

Отсюда, в силу единственности функции Грина краевой задачи (7) — (8) (это можно доказать обычным путем), вытекает, что вся последовательность $G^{(n)}(P, Q, i\lambda)$ сходится к $G(P, Q, i\lambda)$.

Теорема доказана для $k = i\lambda$ $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Переход к другим k ($\operatorname{Im} k \geqslant 0$) может быть сделан так же, как в работе [5].

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Функция $f(x)$ из граничного условия (8) в общем случае выражается через $h^{(n)}$-емкости кусков $S^{(n)}$. Мы укажем здесь случай, когда $f(x)$ выражается через плотности площадей $S^{(n)}$ и получим условия, более удобные для проверки, чем условия теоремы 1.

1) Пусть $h^{(n)}(x) = h(x)$ не зависит от n. Тогда, пользуясь определением h-емкости (4), (5) и учитывая непрерывность $h(x)$, нетрудно доказать, что

$$c_h(S^{(n)}(x_0, \rho)) = \frac{|S^{(n)}(x_0, \rho)|}{h(x_0)}(1 + 0(1))\ \rho \to 0,$$

где $|S^{(n)}(x_0, \rho)|$ — площадь куска $S^{(n)}(x_0, \rho)$ поверхности Γ. Отсюда, если выполнено условие теоремы 1, следует

$$\lim_{\rho \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{|S^{(n)}(x_0, \rho)|}{h(x_0)\pi\rho^2} = f(x_0). \tag{58}$$

Обратно, если выполнено (58), то при $h^{(n)}(x) = h(x)$ выполнено условие (*) теоремы (1).

2) Пусть при каждом фиксированном n множества $S^{(n)}$ можно представить в виде

$$S^{(n)} = (\bigcup_i S_{1i}^{(n)}) \cup (\bigcup_j S_{2j}^{(n)}),$$

где множества $S_{1i}^{(n)}$, $S_{2j}^{(n)}$ такие, что для них введено понятие h-емкости и при каждом n их конечное число.

Введем обозначения:

$d_{1i}^{(n)}$, $d_{2i}^{(n)}$ — диаметры множеств $S_{1i}^{(n)}$, $S_{2i}^{(n)}$;

$c_{h^{(n)}i}^{1}$, $c_{h^{(n)}i}^{2}$ — $h^{(n)}$ — емкость множества $S_{1i}^{(n)}$, $S_{2i}^{(n)}$;

$\sum\limits_{(x,\rho)} a_i^{(n)}$ — сумма, распространенная при данном значении n на все те i, при которых кусок поверхности с этим номером находится внутри шара $K(x, \rho)$ радиуса ρ с центром в x;

$r_{ij}^{(n)}$ — расстояние между множествами $S_{1i}^{(n)}$, $S_{1j}^{(n)}$.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть при $n \to \infty$ выполнены такие условия:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_i \{d_{1i}^{(n)}\} = \lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_i \{d_{2i}^{(n)}\} = 0;$

2) $\lim\limits_{\rho\to 0} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{(x,\rho)} c_{h^{(n)}i}^{1}}{\pi\rho^2} = f(x);$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_j \sum\limits_{\substack{i\neq j \\ r_{ij}^{(n)}<\rho}} \dfrac{c_{h^{(n)}i}^{1}}{r_{ij}^{(n)}} = \delta(\rho)$, $\delta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{(x,\rho)} c_{h^{(n)}i}^{2} = 0.$

Тогда имеют место равенства

$$\lim_{\rho\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{c_{h^{(n)}}(x,\rho)}{\pi\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{c_{h^{(n)}}(x,\rho)}{\pi\rho^2} = f(x)$$

Доказательство этой теоремы основано на свойствах 1), 2), 3) h-емкости (см. § 4) и в основном не отличается от доказательства теоремы 2 работы [3].

Теорема 2 дает условия во многих случаях более удобные для проверки, чем условия 1 теоремы 1.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА h-ЕМКОСТИ

В этом параграфе мы докажем те свойства h-емкости, которыми мы пользовались раньше, а именно:

1) положительность $c_h(\sigma) \geqslant 0$;
2) монотонность $c_h(\sigma_1) \leqslant c_h(\sigma_2)$, если $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$;
3) полуаддитивность $c_h(\sigma_1 \cup \sigma_2) \leqslant c_h(\sigma_1) + c_h(\sigma_2)$.

1) Поскольку правая часть в (5) положительна, то как это показано при доказательстве леммы 1,

$$\int_{\sigma} \frac{\gamma(x)}{r(P, x)} dS_x \geqslant 0,$$

откуда следует

$$c_h(\sigma) = \int_{\sigma} \gamma(x)\, dS_x \geqslant 0.$$

2) Пусть $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$. Так как

$$c_h(\sigma_i) = \int_{\sigma_i} \gamma_i(x)\, dS_x \quad (i = 1, 2),$$

где

$$h(P)\gamma_i(P) + \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_i} \frac{\gamma_i(x)}{r(P, x)} dS_x = 1 \quad P \in \sigma_i \ (\gamma_i(x) \geqslant 0),$$

то при $P \in \sigma_1$

$$h(P)[\gamma_1(P) - \gamma_2(P)] + \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1} \frac{\gamma_1(x) - \gamma_2(x)}{r(P, x)} dS_x = \int_{\sigma_2 \setminus \sigma_1} \frac{\gamma_2(x)}{r(P, x)} dS_x.$$

Это равенство перепишем в виде

$$h(P)[\gamma_1(P) - \gamma_2(P)] + \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1} \frac{\gamma_1(x) - \gamma_2(x)}{r(P, x)} dS_x = \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1} \frac{\hat{S}[\gamma_2](x)}{r(P, x)} dS_x, \tag{59}$$

где $\hat{S}$ — оператор выметания с $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ на σ_1. В связи с тем, что $\gamma_2(x) \geqslant 0$, в силу положительности оператора $\hat{S}$ $\hat{S}[\gamma_2] \geqslant 0$. Поэтому, учитывая, что

$$\| \hat{S}[f] \|_{L_1(\sigma_1)} \leqslant \| f \|_{L_1(\sigma_2 \setminus \sigma_1)}.$$

в силу леммы 1 имеем

$$\int_{\sigma_1} [\gamma_1(x) - \gamma_2(x)]\, dS_x \leqslant \int_{\sigma_1} \hat{S}[\gamma_2](x)\, dS_x \leqslant \int_{\sigma_2} \gamma_2(x)\, dS_x,$$

откуда следует, что

$$\int_{\sigma_1} \gamma_1(x)\, dS_x \leqslant \int_{\sigma_2} \gamma_2(x)\, dS_x,$$

то есть

$$c_h(\sigma_1) \leqslant c_h(\sigma_2).$$

3) Так как свойства 1, 2 уже установлены, то свойство 3 достаточно проверить лишь для случая, когда σ_1 и σ_2 не имеют общих точек.

Положим $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$, тогда

$$c_h(\sigma_i) = \int_{\sigma_i} \gamma_i(x)\, dS_x \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$h(P)\gamma_i(P) + \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_i} \frac{\gamma_i(x)}{r(P, x)} dS_x = 1 \quad P \in \sigma_i.$$

Из этих равенств получаем

$$h(P)[\gamma_1(P)-\gamma_3(P)]+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma_1}\frac{\gamma_1(x)-\gamma_3(x)}{r(P,x)}dS_x=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma_2}\frac{\gamma_3(x)}{r(P,x)}dS_x \quad P\in\sigma_1;$$

$$h(P)[\gamma_2(P)-\gamma_3(P)]+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma_2}\frac{\gamma_2(x)-\gamma_2(x)}{r(P,x)}dS_x=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma_1}\frac{\gamma_3(x)}{r(P,x)}dS_x \quad P\in\sigma_2.$$

Ввиду того, что правые части этих равенств непрерывны и неотрицательны, как это установлено при доказательстве леммы 1,

$$\int\limits_{\sigma_1}\frac{\gamma_1(x)-\gamma_3(x)}{r(P,x)}dS_x\geqslant 0, \quad \int\limits_{\sigma_2}\frac{\gamma_2(x)-\gamma_3(x)}{r(P,x)}dS_x\geqslant 0,$$

откуда следует

$$\int\limits_{\sigma_1}\gamma_1(x)\,dS_x\geqslant\int\limits_{\sigma_1}\gamma_3(x)\,dS_x, \quad \int\limits_{\sigma_2}\gamma_2(x)\,dS_x\geqslant\int\limits_{\sigma_2}\gamma_3(x)\,dS_x.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$c_h(\sigma_1\cup\sigma_2)\leqslant c_h(\sigma_1)+c_h(\sigma_2),$$

и, таким образом, полуаддитивность h-емкости доказана.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. В. А. Марченко, под руководством которого была выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Г. В. Сузиков. Вторая краевая задача в областях со сложной границей. Матем. сб., 69 (111) : 1, (1966).

2. О. А. Олейник. О свойствах решений краевых задач для уравнений эллиптического типа. «Матем. сб.», 30 (72) : 3, (1952), 695—702.

3. Е. Я. Хруслов. Первая краевая задача в областях со сложной границей. «Зап. мех. матем. ф-та ХГУ и ХМО» Изд. ХГУ, том 32, (1966).

4. Н. С. Ландкоф. Введение в современную теорию потенциала. Изд. Наука, (1966).

5. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. Матем. сб., 65 (107) : 3, (1964), 458—472.

Поступила 26 марта 1966 г.