УДК 517.51

К. М. СЛЕПЕНЧУК

ОБ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ В СТЕПЕНИ p ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Преобразуем двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl}, \tag{1}$$

частичные суммы которого $S_{m,n}$, с помощью матриц $\Gamma = \| \gamma_{kl}(x, y) \|$ $(\Gamma = \| \gamma_{kl}^{(mn)} \|$ и $A = \| a_{kl}(x, y) \|$ $(A = \| a_{kl}^{(mn)} \|)$:

$$\Gamma(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}(x, y)\, u_{kl} \left(\Gamma_{mn} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}^{(mn)} u_{kl} \right), \tag{2}$$

$$A(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}(x, y)\, S_{kl} \left(A_{mn} = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}^{(mn)} S_{kl} \right)$$

при условии, что ряды сходятся в $D\{a \leqslant x < \infty, \quad b \leqslant y < \infty\}$ или для $m > m_0$, $n > n_0$.

Двойной ряд (1) (или $\{S_{mn}\}$) абсолютно сходится в степени $p \geqslant 1$ к S, если $\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl} = S$ $(S_{mn} \to S,\ m, n \to \infty)$ и

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^{p-1} |u_{kl}|^p < \infty \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^{p-1} |\Delta S_{kl}|^p < \infty, \right. \tag{3}$$

$\Delta S_{kl} = S_{kl} - S_{k-1\,l} - S_{k\,l-1} + S_{k-1\,l-1}$ и абсолютно сходится в степени p, если имеет место (3). Двойной ряд (1) $|\Gamma|_p$ суммируем к S, $p \geqslant 1$, если

$$\Gamma(x, y) \to S,\ x, y \to \infty \ (\Gamma_{mn} \to S,\ m, n \to \infty) \text{ и}$$

$$\int_a^{\infty}\int_b^{\infty} (xy)^{p-1} \left| \frac{\partial^2 \Gamma(x,y)}{\partial x\, \partial y} \right|^p dx dy < \infty \left(\sum_{k,\, l=1}^{\infty} (mn)^{p-1} |\Delta \Gamma_{mn}|^p < \infty, \right. \tag{4}$$

и $|\Gamma|_p$ суммируем, если имеет место (4).

Аналогично определяется $|A|_p$ — суммируемость $\{S_{mn}\}$.

В работе обобщаются результаты, полученные в [1], на случай матричных преобразований двойных рядов.

Лемма 1. *Для того чтобы абсолютно сходящийся в степени $p > 1$ к S двойной ряд (1) при фиксированном p преобразовывался с помощью $\{\alpha_{k_l}\}$ в сходящийся ряд*

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \alpha_{kl} u_{kl}, \tag{5}$$

достаточно, чтобы $\sum_{k,\, l=1}^{\infty} |\alpha_{kl} - a|^q / kl < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a = \lim_{k,\, l \to \infty} \alpha_{kl}$.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда из неравенства Гельдера

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} |\alpha_{kl} - a\|u_{kl}| \leq \left\{ \sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{kl} - a|^q}{kl} \right\}^{1/q} \left\{ \sum_{k,\, l=1}^{\infty} (kl)^{p-1} |u_{kl}|^p \right\}^{1/p}$$

следует сходимость ряда $\sum\limits_{k,\, l=1}^{\infty} (\alpha_{kl} - a)\, u_{kl}$, а сходимость ряда (5) следует из тождества

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \alpha_{kl} u_{kl} = \sum_{k,\, l=1}^{\infty} (\alpha_{kl} - a)\, u_{kl} + a \sum_{k,\, l=1}^{\infty} u_{kl}. \tag{6}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай: $\gamma_{kl}(x, y) = \gamma_k(x)\, \gamma_l(y)$.

Теорема 1. *Для того чтобы Г-преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени $p > 1$ к S двойных рядов (1) при фиксированном p, достаточно, чтобы* $\lim\limits_{k \to \infty} \gamma_k(x) = \gamma(x)$, $\lim\limits_{l \to \infty} \gamma_l(y) = \gamma(y)$ и

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{|\gamma_k(x)\, \gamma_l(y) - \gamma(x)\, \gamma(y)|}{kl} < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если при этом $\gamma_k(x)$, $\gamma_l'(y)$ — конечные в D и

$$1^\circ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_k'(x)| = 0(1), \quad \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_l'(y)| = 0(1),$$

$$2^\circ \int_a^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left|\gamma_k'(x)\right| dx = 0,(1), \quad \int_b^{\infty} \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_l'(y)|\, dy = 0(1),$$

то двойной ряд (1) $|\Gamma|_p$ — суммируем.

Доказательство. Существование Г-преобразования двойного ряда (1) следует из леммы 1. Далее, если $p > 1$, то

$$\int_a^M \int_b^N (xy)^{p-1} \left| \frac{\partial^2 \Gamma(x, y)}{\partial x \partial y} \right|^p dx dy \leq$$

$$\leq \int_a^M \int_b^N \left\{ \sum_{k,\, l=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_k'(x)| \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_l'(y)|\, (kl)^{p-1} |u_{kl}|^p \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \left(\frac{xy}{kl}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\gamma_k'(x)|\, |\gamma_l'(y)| \right)^{p/q} \right\} dxdy = 0(1).$$

Теорема будет доказана, если оправдаем почленное дифференцирование ряда (2). Для этого достаточно доказать равномерную сходимость продифференцированного ряда. Из неравенства

$$\sum_{k=1}^{m+S}\sum_{l=1}^{n+r}\gamma_k'(x)\,\gamma_l(y)\,u_{kl}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\gamma_k'(x)\,\gamma_l(y)\,u_{kl}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{x^{1/q}}\Big\{\Big(\sum_{k=m+1}^{m+S}\sum_{l=1}^{n+r}\left(\frac{x}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k(x)|\,|\gamma_l(y)|\,(kl)^{p-1}|u_{kl}|^p\Big)^{1/p}\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=m+1}^{m+S}\sum_{l=1}^{n+r}\left(\frac{x}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)|\,|\gamma_l(y)|\Big)^{1/q}+$$

$$+\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\left(\frac{x}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)|\,|\gamma_l(y)|\,(kl)^{p-1}|u_{kl}|^p\Big)^{1/p}\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\left(\frac{x}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)|\,|\gamma_l(y)|\Big)^{1/q}\Big\}$$

следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k,\,l=1}^{\infty}\gamma_k'(x)\,\gamma_l(y)\,u_{kl}$, а из неравенства

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{m+s}\sum_{l=1}^{n+r}\gamma_k'(x)\,\gamma_l'(y)\,u_{kl}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\gamma_k'(x)\,\gamma_l'(y)\,u_{kl}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{y^{1/q}}\Big\{\Big(\sum_{k=m+1}^{m+s}\sum_{l=1}^{n+r}\left(\frac{y}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)|\,|\gamma_l'(y)|\,(kl)^{p-1}|u_{kl}|^p\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=m+1}^{m+s}\sum_{l=1}^{n+r}\left(\frac{y}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)|\,|\gamma_l'(y)|\Big)^{1/q}+$$

$$+\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\left(\frac{y}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)|\,|\gamma_l'(y)|\,(kl)^{p-1}|u_{kl}|^p\Big)^{1/p}\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+r}\left(\frac{y}{kl}\right)^{1/q}|\gamma_k'(x)|\,|\gamma_l(y)|\Big)^{1/q}$$

следует равномерная сходимость продифференцированного ряда.

Лемма 2. *Для того чтобы абсолютно сходящийся в степени $p>1$ к S двойной ряд* (1) *преобразовывался с помощью* $\{\alpha_{kl}\}$ *в сходящийся ряд* (5), *достаточно, чтобы* $\sum\limits_{k,\,l=1}^{\infty}|\alpha_{kl}-a|/_{kl}<\infty$, $a=\lim\limits_{k,\,l\to\infty}\alpha_{kl}$.

Доказательство. Из неравенства

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} |\alpha_{kl} - a| \leqslant \left\{ \sum_{k,\, l=1}^{\infty} |\alpha_{kl} - a| (kl)^{p-1} |u_{kl}|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{kl} - a|}{kl} \right\}^{1/q}$$

следует сходимость ряда $\sum_{k,\, l=1}^{\infty} (\alpha_{kl} - a)\, u_{kl}$. В таком случае сходимость ряда (5) следует из тождества (6).

Теорема 2. *Для того чтобы Г-преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени $p > 1$ к S двойных рядов (1), достаточно, чтобы* $\sum_{k,\, l=1}^{\infty} |\gamma_k(x)\gamma_l(y) - \gamma(x)\gamma(y)|/_{kl} < \infty$. *Если при этом $\gamma_k'(x)$, $\gamma_l'(y)$ — конечные в D и*

$$3^\circ \sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{x}{k} |\gamma_k'(x)| = 0(1), \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{y}{l} |\gamma_l'(y)| = 0(1),$$

$$4^\circ \int_a^{\infty} |\gamma_k'(x)|\, dx = 0(1), \quad \int_b^{\infty} |\gamma_l'(y)|\, dy = 0(1),$$

то двойной ряд (1) $|\Gamma|_p$ — *суммируем.*

Доказательство. Существование Г-преобразования следует из леммы 2, а $|\Gamma|_p$-суммируемость из неравенства

$$\int_a^M \int_b^N (xy)^{p-1} \left| \frac{\partial^2 \Gamma(x, y)}{\partial x\, \partial y} \right|^p dxdy \leqslant \int_a^M \int_b^N \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |\gamma_k'(x)|\, |\gamma_l'(y)| \times \right.$$

$$\left. \times (kl)^{p-1} |u_{kl}|^p \left(\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{xy}{kl} |\gamma_k'(x)|\, |\gamma_l'(y)| \right)^{p/q} \right\} dxdy = 0(1).$$

Легко показать справедливость почленного дифференцирования ряда (2).

Докажем следующие теоремы.

Теорема 3. *Для того чтобы Г-преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени $p>1$ двойных рядов (1) при фиксированном p, достаточно, чтобы* $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k(x)|^q/_k < \infty$, $\sum_{l=1}^{\infty} |\gamma_l(y)|^q/_l < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Если при этом имеют место* 1° и 2°, *то двойной ряд (1) $|\Gamma|_p$-суммируем.*

Теорема 4. *Для того чтобы Г-преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени $p > 1$ двойных рядов* (1), *достаточно, чтобы* $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k(x)|/_k < \infty$, $\sum_{l=1}^{\infty} |\gamma_l(y)|/_l < \infty$.

Если при этом выполнены 3° и 4°, то двойной ряд (1) $|\Gamma_p|$-суммируем.

Теорема 5. *Для того чтобы A-преобразование существовало на классе абсолютно сходящихся в степени $p > 1$ к S двойных $\{S_{mn}\}$, для которых $S_{mn} = 0(1)$, достаточно, чтобы 5° $\sum_{k,\,l=1}^{\infty} |a_{kl}(x, y)| < \infty$. Если при этом $\delta_k'(x)$ и $\delta_l'(y)$ — конечные в D, где*

$$\delta_k(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i(x), \quad \delta_l(y) = \sum_{i=l}^{\infty} a_i(y); \quad a_{kl}(x, y) = a_k(x)\, a_l(y),$$

$$6° \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k} |\delta_k'(x)| = 0(1), \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{y}{l} |\delta_l'(y)| = 0(1),$$

$$7° \int_a^{\infty} |\delta_k'(x)|\, dx = 0(1), \quad \int_b^{\infty} |\delta_l'(y)|\, dy = 0(1),$$

то $\{S_{mn}\}\, |A|_p$ — суммируема.

Доказательство. Так как $S_{mn} = 0(1)$, то 5° обеспечивает существование A-преобразования. В силу преобразования Харди

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} \delta_k(x)\, \delta_l(y) = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{N-1} a_k(x)\, a_l(y)\, S_{kl} + \delta_M(x)\, \delta_N(y) \times$$

$$\times S_{MN} + \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=N}^{\infty} a_k(x)\, a_l(y)\, S_{KN} + \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{k=M}^{\infty} a_k(x)\, a_l(y)\, S_{Ml},$$

откуда

$$\sum_{k,\,l=1}^{\infty} \delta_k(x)\, \delta_l(y)\, u_{kl} = \sum_{k,\,l=1}^{\infty} a_k(x)\, a_l(y)\, S_{kl}.$$

Осталось применить теорему 2 по отношению $\| \delta_k(x)\, \delta_l(y) \|$, заметив, что в нашем случае $\gamma(x) = 0$, $\gamma(y) = 0$.

В частности, имеют место теоремы.

Теорема 6. *Для того чтобы абсолютно сходящийся в степени $p > 1$ к S двойной ряд (1) был $|\Gamma|_p$-суммируем Γ-методом, сохраняющим сходимость на классе ограниченных рядов, достаточно, чтобы имели место 3° и 4°.*

Теорема 7. *Для того чтобы абсолютно сходящаяся в степени $p > 1$ к S $\{S_{mn}\}$ была $|A|_p$-суммируема A-методом, сохраняющим сходимость на классе ограниченных $\{S_{mn}\}$, достаточно, чтобы имели место 6° и 7°.*

Г- или A-преобразования, сохраняющие абсолютную сходимость в степени p, обозначим соответственно через $|\gamma|_p$ или $|a|_p$. Пусть

$$C_{mn}^{(\alpha,\,\beta)} = \sum_{k,\,l=1}^{m,\,n} \frac{E_{m-k}^{\alpha-1}\, E_{n-l}^{\beta-1}}{E_m^{\alpha}\, E_n^{\beta}} u_{kl}, \quad \varphi(x, y) = e^{-x} e^{-y} \sum_{k,\,l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!\, l!} S_{kl}.$$

C, α, β) и B — средние.

Теорема 8. (C, α, β)- и *B-методы являются соответственно* $|\gamma|_p$ и $|a|_p$-методами ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).

Доказательство. В нашей работе* доказано, что условия 3°, 4°, 6° и 7° для этих методов выполнены. Осталось применить теоремы 6 и 7.

Поступила в редколлегию 17.01.83.