

6. Гиперсингулярные интегральные операторы в пространствах тригонометрических и алгебраических полиномов.

6.1. Прежде чем давать определение гиперсингулярного интеграла 2π -периодической функции $f(\varphi)$, преобразуем сингулярный интеграл с ядром котангенс от производной $f'(\varphi)$ в случае, когда эта производная удовлетворяет условию Гёльдера. Интегрируя по частям, находим при достаточно малых $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_0-\varepsilon} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\varphi_0}{2} f'(\varphi) d\varphi + \int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\varphi_0}{2} f'(\varphi) d\varphi = \int_0^{\varphi_0-\varepsilon} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} + \\ + \int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} - [f(\varphi_0-\varepsilon) + f(\varphi_0+\varepsilon)] \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получаем

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\varphi_0}{2} f'(\varphi) d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_0^{\varphi_0-\varepsilon} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} + \int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} - \frac{4f(\varphi_0)}{\varepsilon} \right\} \quad (6.1)$$

Полученное тождество служит поводом для такого *определения*.

Определение 1: Пусть заданная 2π -периодическая функция $f(\varphi)$, такая что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют интегралы

$$\int_0^{\varphi_0-\varepsilon} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}}, \quad \int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}},$$

и существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_0^{\varphi_0-\varepsilon} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} + \int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} - \frac{4f(\varphi_0)}{\varepsilon} \right\},$$

тогда этот предел называют *интегралом в смысле конечной части по Адамару* и пишут

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)d\varphi}{2\sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_0^{\varphi_0-\varepsilon} \frac{f(\varphi)d\varphi}{2\sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} + \int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} \frac{f(\varphi)d\varphi}{2\sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} - \frac{4f(\varphi_0)}{\varepsilon} \right\} \quad (6.2)$$

Достаточное условие существования интеграла в смысле конечной части по Адамару (2): $f(\varphi) \in C^{1,\alpha}(R)$.

Это следует из (1), причем имеет место равенство («правило интегрирования по частям»):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)d\varphi}{2\sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\varphi_0}{2} f'(\varphi)d\varphi$$

$$f(\varphi+2\pi) = f(\varphi), f \in C^{1,\alpha} \quad (6.3)$$

6.2. Теперь, наряду с операторами Гильберта и дифференцирования, введенными ранее (соответственно (2.25) и (3.13)), определим ещё на пространстве тригонометрических полиномов Π оператор

$$A : \Pi \mapsto \Pi^0 : f(\varphi) \mapsto (Af)(\varphi_0)$$

$$(Af)(\varphi_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)d\varphi}{2\sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} \quad (6.4)$$

в силу (3) имеем

$$A = HD \quad (6.5)$$

и, с учетом (2.27), (2.28) и (2.29),

$$A : e^{ik\varphi} \mapsto -|k|e^{ik\varphi_0}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.6)$$

$$A : \cos k\varphi \mapsto -k \cos k\varphi_0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

$$\boxed{A : \sin k\varphi \mapsto -k \sin k\varphi_0, k = 0, 1, 2, \dots} \quad (6.8)$$

Пусть, далее, $f(\varphi)$ - конечная тригонометрическая сумма

$$f(\varphi) = \sum_{k \neq 0} c_k e^{ik\varphi},$$

тогда $(Af)(\varphi_0) = -\sum_{k \neq 0} k |c_k| e^{ik\varphi_0}.$

В пространстве тригонометрических полиномов, ортогональных константам, введем скалярное произведение

$$\boxed{(f, g)_w \equiv \int_0^{2\pi} (f(\varphi) \overline{g(\varphi)} + f'(\varphi) \overline{g'(\varphi)}) d\varphi} \quad (6.9)$$

Соответствующая норма $\|\bullet\|_w$ определяется так

$$\boxed{\|f\|_w^2 \equiv \int_0^{2\pi} [|f(\varphi)|^2 + |f'(\varphi)|^2] d\varphi} \quad (6.10)$$

Пространство Π^0 со скалярным произведением $(\bullet, \bullet)_w$ обозначим Π_w^0 . Имеем $(f, g)_w = (f, g) + (Df, Dg)$. Пусть $f, g \in \Pi_w^0$, конечные тригонометрические суммы $f = \sum_{k \neq 0} c_k e_k$, $g = \sum_{k \neq 0} d_k e_k$, а

$e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\varphi}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ортонормированный базис в пространстве Π^0 . Имеем

$$(f, g)_w = \sum_{k \neq 0} (1 + k^2) c_k \overline{d_k} \quad (6.11)$$

$$\|f\|_w^2 = \sum_{k \neq 0} (1 + k^2) |c_k|^2 \quad (6.12)$$

При $f \neq 0$ для оператора $D : \Pi_w^0 \rightarrow \Pi^0$, $\|Df\|^2 = \sum k^2 |c_k|^2$ и

$$\boxed{\|Df\| < \|f\|_w} \quad (6.13)$$

а для оператора $A : \Pi_w^0 \rightarrow \Pi^0$, $\|Af\|^2 = \sum k^2 |c_k|^2$ и

$$\boxed{\|Af\| < \|f\|_w} \quad (6.14)$$

В заключение отметим, что наряду с соотношением (5), на пространстве тригонометрических полиномов Π выполняется операторное равенство

$$\boxed{A = DH} \quad (6.15)$$

которое непосредственно проверяется на базисных элементах $e^{ik\varphi}, k \in \mathbb{Z}$, линейной комбинацией конечного числа которых является любой элемент $f(\varphi)$ пространства Π .

Используя «явные выражения» для операторов, входящих в равенство (15) получаем при $f \in \Pi$ соотношение

$$\boxed{\frac{d}{d\varphi_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} f(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}} \quad (6.16)$$

которое можно рассматривать как «правило дифференцирования по параметру интеграла с ядром котангенс».

6.3. Для мотивировки определения гиперсингулярного интеграла по интервалу (a, b) с ядром $(x - x_0)^{-2}$ и «плотностью» $F(x), x \in [a, b]$ рассмотрим сингулярный интеграл по тому же интервалу с ядром Коши $(x - x_0)^{-1}, x_0 \in (a, b)$ и «плотностью» $F'(x), x \in [a, b]$ в предположении, что эта производная удовлетворяет условию Гёльдера.

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{F'(x) dx}{x - x_0} &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{F'(x) dx}{x - x_0} + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{F'(x) dx}{x - x_0} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{F(x) dx}{(x - x_0)^2} + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{F(x) dx}{(x - x_0)^2} - \frac{2F(x_0)}{\varepsilon} \right] + \frac{F(a)}{x_0 - a} + \frac{F(b)}{b - x_0} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Определение 2: Пусть $F(x), x \in [a, b]$ заданная функция, такая что существуют (для достаточно малых $\varepsilon > 0$) интегралы

$$\int_a^{x_0-\varepsilon} \frac{F(x)dx}{(x-x_0)^2}, \quad \int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{F(x)dx}{(x-x_0)^2}$$

и существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_a^{x_0-\varepsilon} \frac{F(x)dx}{(x-x_0)^2} + \int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{F(x)dx}{(x-x_0)^2} - \frac{2F(x_0)}{\varepsilon} \right\},$$

тогда этот предел называют *интегралом в смысле конечной части по Адамару* и пишут

$$\boxed{\int_a^b \frac{F(x)dx}{(x-x_0)^2} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_a^{x_0-\varepsilon} \frac{F(x)dx}{(x-x_0)^2} + \int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{F(x)dx}{(x-x_0)^2} - \frac{2F(x_0)}{\varepsilon} \right\}} \quad (6.18)$$

Достаточным условием существования интеграла (18) является требование, чтобы «плотность» $F(x), x \in [a, b]$ имела производную, удовлетворяющую условию Гёльдера (как это видно из тождества (17))

$$F(x) \in C^{1,\alpha}[a, b].$$

При этом, в силу (17), имеем

$$\boxed{\int_a^b \frac{F(x)dx}{(x-x_0)^2} = \int_a^b \frac{F'(x)dx}{x-x_0} - \frac{F(a)}{x_0-a} - \frac{F(b)}{b-x_0}} \quad (6.19)$$

Определенный выше интеграл в смысле конечной части по Адамару обладает некоторыми «экзотическими» свойствами. Так, например, полагая в (19) $a = -1$, $b = 1$, $x_0 = 0$ и $F(x) \equiv 1$, $x \in [-1, 1]$, получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -2$$

В приложениях, как правило, «плотность» $F(x), x \in [a, b]$ на концах отрезка интегрирования обращается в нуль и в этом случае, в силу (19), имеем

$$\int_a^b \frac{F(x)dx}{(x-x_0)^2} = \int_a^b \frac{F'(x)dx}{x-x_0}, \quad F(a) = F(b) = 0, F(x) \in C_{[a,b]}^{1,\alpha} \quad (6.20)$$

Обычно с помощью линейной замены $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}, t \in [-1,1]$ интегралы приводят к «стандартным пределам» $-1, +1$. В приложениях, обычно, «плотность» $F(t) = u(t)\sqrt{1-t^2}$, где $u(t), t \in [-1,1]$ достаточно гладкая функция.

6.4. Пусть $u(t) \in C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$. Будем рассматривать гиперсингулярный интеграл

$$(Au)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{(t-t_0)^2} \sqrt{1-t^2} dt \quad (6.21)$$

В силу (20), имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{(t-t_0)^2} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(u(t)\sqrt{1-t^2})'}{t-t_0} dt \quad (6.22)$$

Определим на пространстве алгебраических многочленов Π^H гиперсингулярный интегральный оператор

$$A: \Pi^H \rightarrow \Pi^H : p(t) \mapsto (Ap)(t_0) \quad (6.23)$$

Полагая в (22) $u(t) = U_{n-1}(t), n \in N$, используя тождество

$$\sqrt{1-t^2} (U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2})' = -nT_n(t), \quad *)$$

а также фундаментальное соотношение (4.21), последовательно находим

* Пусть $\theta = \arccost t$, тогда

$$\sqrt{1-t^2} (U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2})' = \sin \theta \frac{(\sin n\theta)'}{(\cos \theta)'} = -n \cos n\theta = -nT_n(t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{U_{n-1}(t)}{(t-t_0)^2} \sqrt{1-t^2} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} \left(U_{n-1}(t) \sqrt{1-t^2} \right)'}{(t-t_0)^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\
&= -n \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -n U_{n-1}(t_0)
\end{aligned}$$

Так что имеем

$$\boxed{A : U_{n-1}(t) \mapsto -n U_{n-1}(t_0), n \in N} \quad (6.24)$$

Разложим многочлен степени $n-1$ $p_{n-1}(t) \in \Pi_{n-1}^H$ по ортонормированному базису $\left\{ \overset{\vee}{U}_{k-1}(t) \right\}_{k=1}^n$ (4.14): $p_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \overset{\vee}{U}_{k-1}(t)$, где $c_k = (p_{n-1}, \overset{\vee}{U}_{k-1})$.

$$\text{Здесь } \|p_{n-1}\|_H^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2.$$

В силу (24), находим $(Ap_{n-1})(t_0) = -\sum_{k=1}^n k c_k \overset{\vee}{U}_{k-1}(t_0)$ и $\|Ap_{n-1}\|_H^2 = \sum_{k=1}^n k^2 |c_k|^2$.

Далее, наряду с гиперсингулярным интегральным оператором $A : \Pi^H \rightarrow \Pi^H : U_{n-1}(t) \mapsto -n U_{n-1}(t_0), n \in N$,

рассмотрим сингулярный интегральный оператор, определенный в четвертом разделе (4.28): $\Gamma^{-1} : \Pi^H \rightarrow \Pi^{I,0} : U_{n-1} \mapsto T_n(t_0), n \in N$, и оператор дифференцирования $D : \Pi^{I,0} \rightarrow \Pi^H : T_n(t_0) \mapsto n U_{n-1}(t_0), n \in N$.

На базисных элементах пространства Π^H непосредственно проверяется такое соотношение между этими тремя операторами

$$A = -D\Gamma^{-1}, \quad (6.25)$$

которое можно рассматривать как «правило дифференцирования интеграла с ядром Коши». В силу (25), с учетом (4.29) и (21), имеем

$$\boxed{\frac{d}{dt_0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{t_0 - t} \sqrt{1-t^2} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{(t_0 - t)^2} \sqrt{1-t^2} dt} \quad (6.26)$$

В заключение рассмотрим ещё один экземпляр пространства алгебраических полиномов Π^{III} со скалярным произведением

$$(f, g)_{III} \equiv \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} \sqrt{1-t^2} dt + \int_{-1}^1 (\sqrt{1-t^2} f(t))' (\sqrt{1-t^2} g(t))' \sqrt{1-t^2} dt \quad (6.27)$$

и соответствующей нормой

$$\|f\|_{III}^2 \equiv \int_{-1}^1 |f(t)|^2 \sqrt{1-t^2} dt + \int_{-1}^1 \left| (\sqrt{1-t^2} f(t))' \right|^2 \sqrt{1-t^2} dt \quad (6.28)$$

Будем теперь рассматривать гиперсингулярный интегральный оператор, определенный представлением (21), на паре пространств

$$\boxed{A: \Pi^{III} \rightarrow \Pi^{II}} \quad (6.29)$$

Для двух произвольных полиномов $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k \check{U}_{k-1}(t)$ и $g(t) = \sum_{l=1}^n b_l \check{U}_{l-1}(t)$ найдем скалярное произведение в пространстве Π^{III} . Поскольку

$$\int_{-1}^1 \check{U}_{k-1}(t) \check{U}_{l-1}(t) \sqrt{1-t^2} dt \equiv (\check{U}_{k-1}, \check{U}_{l-1})_{II} = \delta_{kl}$$

в силу (4.16), а с использованием тождества (4.32) имеем при $k, l \in N$

$$\int_{-1}^1 (\sqrt{1-t^2} \check{U}_{k-1}(t))' (\sqrt{1-t^2} \check{U}_{l-1}(t))' \sqrt{1-t^2} dt = kl \int_{-1}^1 \check{T}_k(t) \check{T}_l(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \equiv kl (\check{T}_k, \check{T}_l)_I = kl \delta_{kl},$$

то для искомого скалярного произведения получаем окончательно такое выражение

$$(f, g)_{III} = \sum_{k=1}^n (1+k^2) a_k \overline{b_k} \quad (6.30)$$

Для нормы полинома $f \in \Pi^{III}$ имеем выражение через коэффициенты $a_k = (f, \check{U}_{k-1})_{II}$ его разложения по «нормированным» многочленам Чебышева 2-го рода:

$$\|f\|_{III}^2 = \sum_{k=1}^n (1+k^2) |a_k|^2 \quad (6.31)$$

Сравнивая это выражение с выражением для нормы $\|Af\|_{II} = \sum_{k=1}^n k^2 |a_k|^2$, имеем при $f \neq 0$:

$$\|Af\|_{II} < \|f\|_{III} \quad (6.32)$$