ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРІЯ ТРЕНІЯ

ХОРОШО СМАЗАННАГО ШИПА ВЪ ПОДШИПНИКѢ.

А. В. Гречанинова.

§ 1. Прежде чѣмъ приступить къ изученію явленія тренія шипа въ подшипникѣ приметъ слѣдующія положенія:

1) Радіусъ цилиндрической поверхности шипа долженъ быть менѣе радіуса круглой цилиндрической поверхности подшипника.

2) Цилиндрическая поверхность шипа эксцентрична по отношенію къ цилиндрической поверхности подшипника.

3) Шипъ и подшипникъ абсолютно твердыя тѣла.

4) При вращеніи шипа образуется между цилиндрическими поверхностями шипа и подшипника слой смазывающей жидкости, благодаря внѣшнему и внутреннему тренію жидкости. Не будь тренія, невозможно было бы образованіе этого слоя, а при покоющемся шипѣ было бы непосредственное прикосновеніе металла шипа о металлъ подшипника.

5) Геометрическія оси шипа и подшипника параллельны.

6) Принимается гипотеза Ньютона о гидравлическомъ треніи.

7) Допустимъ гипотезу, по которой частицы жидкаго слоя перемѣщаются по нѣкоторымъ круговымъ траекторіямъ, плоскости которыхъ перпендикулярны къ геометрическимъ осямъ шипа и подшипника.

8) Если мысленно разсѣчемъ шипъ и подшипникъ плоскостью, перпендикулярною къ ихъ геометрическимъ осямъ, и соединимъ

центры полученныхъ круговыхъ сѣченій прямою, то эта линія эксцентриситета представитъ собою геометрическое мѣсто центровъ круговыхъ траекторій частицъ жидкаго слоя, находящихся въ сѣкущей плоскости.

9) Гидравлическія сопротивленія на основаніи гипотезы Ньютона, провѣренной многочисленными изслѣдованіями надъ истеченіемъ жидкостей изъ капиллярныхъ трубокъ, выражаются такими же функціями относительныхъ скоростей, какими функціями перемѣщеній выражаются нормальныя и касательныя напряженія въ изотропно-упругомъ тѣлѣ.

§ 2. Обусловивъ вышесказаннымъ вращеніе шипа въ подшипникѣ, перейдемъ къ аналитическому изслѣдованію вопроса о треніи.

Предполагая движеніе частицъ жидкаго слоя установившимся, на основаніи пункта 9, § 1, становится вполнѣ возможнымъ воспользоваться общими уравненіями равновѣсія силъ упругости для изотропно-упругаго тѣла, замѣняя въ нихъ перемѣщенія относительными скоростями частицъ жидкости и коэффиціентъ упругости коэффиціентомъ внутренняго тренія жидкости. Такое пользованіе уравненіями значительно обобщаетъ изслѣдуемый вопросъ и имѣетъ полное за собою основаніе, если принять въ соображеніе, что законы сложенія скоростей и перемѣщеній одни и тѣ же.

Пренебрежемъ ничтожнымъ вѣсомъ слоя жидкости между поверхностями шипа и подшипника сравнительно съ нагрузкою, дѣйствующею на шипъ. Тогда общія уравненія равновѣсія силъ упругости въ полуполярной системѣ координатъ примѣнительно къ данному вопросу дадутъ слѣдующія два уравненія:

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} p_{r2} + \frac{p_{r1} - p_{t2}}{r} = 0. \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{t1} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} p_{t2} + \frac{p_{t1} + p_{r2}}{r} = 0. \qquad (2)$$

Значки r и t указываютъ направленіе дѣйствія силъ, а именно значекъ r — направленіе по радіусу круглой траекторіи и значекъ t направленіе по перпендикуляру къ радіусу или по касательной къ траекторіи. Значки 1 и 2 указываютъ, къ какой координатной поверхности приложена сила, а именно — значекъ 1 указываетъ цилиндрическую поверхность, а значекъ 2 плоскость, проходящую черезъ ось цилиндрической поверхности.

Такимъ образомъ p_{r1} и p_{t2} суть нормальныя силы, а p_{r2} и p_{t1} — касательныя.

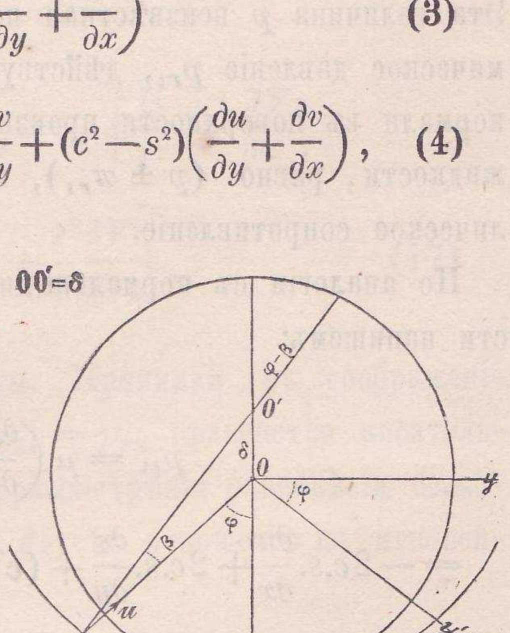
Принимая въ соображеніе пункты 7 и 8, обозначимъ черезъ u и v проекціи скорости частицы жидкости на оси x и y, а черезъ u' и v' проекціи той же скорости q, направленной по касательной, на прямоугольныя оси x' или r и y' или t.

Между частными производными скоростей въ двухъ координатныхъ системахъ найдемъ слѣдующую, извѣстную въ механикѣ, зависимость:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = c^2 . \frac{\partial u}{\partial x} + s^2 . \frac{\partial v}{\partial y} + c.s\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = s^2 . \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 . \frac{\partial v}{\partial y} - c.s\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = -2c.s\frac{\partial u}{\partial x} + 2c.s\frac{\partial v}{\partial y} + (c^2 - s^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{4}$$



гдѣ s и c суть синусы и косинусы угла φ. Разлагая скорость q по направленію радіуса-вектора и по направленію къ нему перпендикулярному и обозначая эти слагающія черезъ U и V, найдемъ:

$$u = cU - sV\ ;\ v = sU + cV,$$

откуда, дифференцируя, получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = c.\frac{\partial U}{\partial r} - s.\frac{\partial V}{\partial r} \quad (5) \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -U.s + c.\frac{\partial U}{\partial \varphi} - V.c - s.\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = s.\frac{\partial U}{\partial r} + c.\frac{\partial V}{\partial r} \quad (7) \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = U.c + s.\frac{\partial U}{\partial \varphi} - V.s + c.\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (8)$$

Замѣнимъ теперь въ частныхъ производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ перемѣнныя x и y новыми независимыми перемѣнными r и φ; найдемъ [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c.\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{s}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (9) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = s.\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{c}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = c.\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{s}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad (11) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = s.\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{c}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Обозначимъ черезъ p гидродинамическое давленіе, дѣйствующее по направленіи внутренней нормали къ поверхности шипа. Эта величина p неизвѣстная пока функція r и φ. Гидродинамическое давленіе p_{r_1}, дѣйствующее по направленію внутренней нормали въ поверхности произвольнаго безконечно тонкаго слоя жидкости, равно $(p \pm \pi_{r_1})$, гдѣ π_{r_1} есть нормальное гидравлическое сопротивленіе.

По аналогіи съ нормальными и касательными силами упругости напишемъ:

$$p_{t1} = \mu\left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'}\right) =$$

$$= -2c.s.\frac{\partial u}{\partial x} + 2c.s.\frac{\partial v}{\partial y} + (c^2 - s^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (13)$$

---

[1] На основаніи $x = rc$, $y = r.s$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Вставляя выраженія (5), (6), (7), (8) въ выраженія (9), (10), (11) и (12) и подставляя полученныя величины въ выраженіе (13), найдемъ:

$$p_{t1} = \pm \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right]. \qquad (14)$$

Тѣмъ же путемъ найдемъ:

$$\Theta = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U}{r} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \qquad (15)$$

гдѣ Θ — измѣненіе единицы объема, которое, по условію несжимаемости жидкости вообще, равно нулю. Это условіе составляетъ, такъ называемое въ гидравликѣ, условіе неразрывности струекъ.

Далѣе найдемъ: $\pi_{r1} = \lambda\Theta + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'} = 2\mu \frac{\partial U}{\partial r}.$

$$p_{r1} = (p \pm \pi_{r_1}) = p \pm 2\mu \frac{\partial U}{\partial r}{}^{1}. \qquad (16)$$

$$\pi_{t2} = \lambda\Theta + 2\mu . \frac{\partial v'}{\partial y'} = 2\mu \left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right]$$

$$p_{t2} = p \pm 2\mu \left(\frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^{1} \qquad (17)$$

λ и μ постоянные коэффиціенты. Принимая въ соображеніе эти значенія и замѣчая, что $p_{t1} = p_{r2}$ [равенство касательныхъ натяженій, вытекающее изъ разсмотрѣнія равновѣсія безконечно малаго объема $(r.\, \partial r.\, \partial \varphi.\, \partial z)$ по отношенію къ мгновен-

---

[1] Знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, для какой половины шипа, правой или лѣвой по отношенію оси x, разсматривается сопротивленіе при выбранномъ направленіи p и q.

ной оси, проходящей черезъ его центръ тяжести], подставимъ эти величины въ первыя два основныя уравненія, найдемъ:

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} = -\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] - \frac{(p_{r1} - p_{t2})}{r}$$

Такъ какъ $-(p_{r1} - p_{t2}) = 2\mu\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial r}\right]$, то

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} = -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] + \frac{2\mu}{r}\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial r}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} = -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] - \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{2.\partial V}{\partial r}\right] + $$

$$+ \frac{2\mu}{r}\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial r}\right].$$

На основаніи выраженія (15) найдемъ:

$$-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right] = -\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right] = \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[U + r\frac{\partial U}{\partial r}\right].$$

На основаніи того же

$$\frac{2\mu}{r}\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial r}\right] = -\frac{2\mu}{r}\frac{2\partial U}{\partial r} = -\frac{4\mu}{r}\frac{\partial U}{\partial r},$$

сумма послѣднихъ двухъ выраженій, дастъ $2\mu\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$ и первое основное уравненіе представится въ видѣ:

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} = \frac{\partial p}{\partial r} + 2\mu\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] + 2\mu\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

или окончательно:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right].$$

Второе основное уравненіе дастъ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}p_{t2} = -\frac{2p_{t1}}{r} - \frac{\partial p_{t1}}{\partial r}$$

или
$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{2\mu}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right].$$

На основаніи выраженія (15):

$$-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right] = -\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[-\frac{\partial U}{\partial r}\right] = \frac{2\mu}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r . \partial \varphi},$$

$$\frac{2\mu}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial r}\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] =$$

$$= \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] + \frac{2\mu}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] + \frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi} =$$

$$= \mu\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r}\right] =$$

$$= \frac{\mu}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r}\right].$$

Замѣчая, что

$$\frac{\mu}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right] + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi},$$

найдемъ окончательно

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=\mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}-\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right].$$

Такимъ образомъ первыя два основныя уравненія представятся въ видѣ слѣдующихъ двухъ:

$$\left.\begin{array}{r} -\mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Theta=\frac{\partial p}{\partial r} \\ \mu\frac{\partial}{\partial r}\Theta=\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} \end{array}\right\}\ \text{гдѣ}\ \Theta'=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}-\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}. \qquad \begin{array}{r}(18)\\(19)\end{array}$$

Исключая изъ этихъ уравненій p найдемъ $r\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial\Theta}{\partial r}=0$

— — — — Θ — $r\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial p}{\partial r}=0.$

Такъ что p и Θ суть интегралы одного и того же уравненія

$$r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial w}{\partial r}=0.$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ

$w=c+a\lg r+b\varphi+\psi(k)$, гдѣ $k=\lg r\pm\sqrt{-1}.\varphi$ а ψ произвольная функція. Для того, чтобы $w_1=p$ и $w_2=\Theta$ удовлетворяли исходнымъ нашимъ уравненіямъ (18) и (19), необходимо и достаточно, чтобы было

$$p=\alpha\mu[c+b\lg r-a\varphi\mp\sqrt{-1}.\psi(k)]$$

и

$$\Theta=-\alpha[c'+a\lg r+b\varphi+\psi(k)],$$

гдѣ a, b, c, α и c' суть произвольныя постоянныя. Отсюда

$$\left[\frac{p}{\alpha\mu}+a\varphi-b\lg r-c\right]^2+\left[\frac{\theta}{\alpha}+b\varphi+a\lg r+c'\right]^2=0$$

и $$p=(b\alpha\mu\lg r-a\alpha\mu\varphi+c\alpha\mu) \tag{20}$$

$$\theta=-(a\alpha\lg r+b\alpha\varphi+c'\alpha). \tag{21}$$

Отсюда усматриваемъ, что гидродинамическое давленіе увеличивается по мѣрѣ углубленія внутрь смазывающаго слоя и уменьшается съ увеличеніемъ угла φ.

§ 3. Въ случаѣ концентрическаго слоя жидкости уголъ $\beta=0$ (см. черт.) для всякаго безконечно-тонкаго слоя, заключающагося въ конечно-тонкомъ слоѣ жидкости между шипомъ и подшипникомъ, и для всякаго мѣста на его поверхности, что влечетъ за собою $U=0$, $V=q$ и уравненіе (18) дастъ $\frac{\partial p}{\partial r}=0$ или $\frac{b\alpha\mu}{r}=0$ (на основаніи выраженія 20), что возможно при $\alpha=0$ или $b=0$. Если принять $\alpha=0$, тогда $p=0$ и уравненіе (19) дастъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r^2}=0.$$

При $b=0$, $p=(c\alpha\mu-a\alpha\mu\varphi)$, $\theta=-(c'\alpha+a\alpha\lg r)$,

$$\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{V}{r}=c'\alpha+a\alpha\lg r \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r^2}=\frac{a\alpha}{r}. \tag{22}$$

Уравненіе (22), въ случаѣ концентричнаго съ подшипникомъ шипа, безъ сомнѣнія, удовлетворяетъ условію вопроса. Въ этомъ случаѣ $p = c\alpha\mu - a\alpha\mu\varphi$, какъ видно гидродинамическое давленіе не равно нулю[1].

Уравненіе (22), какъ относящееся къ чисто идеальному случаю концентричнаго шипа, не можетъ все-таки удовлетворить вполнѣ экспериментатора, ибо не соотвѣтствуетъ дѣйствительному явленію. Необходимо узнать, какое вліяніе имѣетъ эксцентриситетъ шипа на величину тренія и возможно ли пренебречь этимъ вліяніемъ.

§ 4. Обратимся къ этому послѣднему случаю, поставленному въ пунктѣ (2) § 1. Замѣтимъ при этомъ, что по смыслу вопроса r и φ суть перемѣнныя независимыя; уголъ β (см. черт.) измѣняется съ измѣненіемъ положенія частицы жидкости на ея траекторіи и съ переходомъ отъ одного безконечно-тонкаго слоя къ другому смежному на основаніи пункта (8) § 1. Такъ что $\beta = f(r, \varphi)$.

Замѣчая, что $U = q.\mathrm{sn}\beta$ и $V = q.\mathrm{cs}\beta$, найдемъ

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \mathrm{sn}\beta.\frac{\partial q}{\partial \varphi} + q.\,\mathrm{cs}\beta.\,\frac{\partial \beta}{\partial \varphi}\,; \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \mathrm{cs}\beta.\frac{\partial q}{\partial r} - q.\,\mathrm{sn}\beta.\,\frac{\partial \beta}{\partial r}.$$

По условію несжимаемости жидкости на основаніи выраженія (15) имѣемъ

$$-\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r}(U.r) = \frac{\partial}{\partial r}(q.r.\mathrm{sn}\beta).$$

Съ другой стороны

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mathrm{cs}\,\beta\cdot\frac{\partial q}{\partial \varphi} - \mathrm{sn}\,\beta.'q.\,\frac{\partial \beta}{\partial \varphi}.$$

---

[1] Уравненіе (22) было доложено мною еще въ февралѣ мѣсяцѣ 1886 года математическому обществу при харьковскомъ университетѣ.

Въ виду интереса, который въ настоящее время пріобрѣтаетъ вопросъ о треніи хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ, я рѣшился напечатать свою замѣтку.

Изъ сравненія этихъ производныхъ найдемъ

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \operatorname{tg}\beta . q . \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} - q . r . \frac{\partial \beta}{\partial r} - \operatorname{tg}\beta\left(r . \frac{\partial q}{\partial r} + q\right).$$

Подставляя найденныя значенія производныхъ въ выраженіе

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} = \theta = -\left(a\alpha \lg r + b\alpha\varphi + c'\alpha\right),$$

найдемъ слѣдующее простое уравненіе, относящееся къ случаю эксцентрическаго шипа:

$$\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{r}\left(1 - \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}\right) = \operatorname{cs}\beta\left(a\alpha \lg r + b\alpha\varphi + c'\alpha\right). \qquad (23)$$

Обозначимъ черезъ s' толщину слоя по оси x,

— s'_φ — — по радіусу-вектору r,

— r' радіусъ цилиндрич. поверхности шипа,

— ϱ' — — — подшипника,

— δ' эксцентриситетъ шипа и подшипника.

Тѣ же буквы безъ значковъ будутъ имѣть значенія, относящіяся къ произвольному безконечно-тонкому слою жидкости, заключенному между поверхностью шипа и подшипника. Такъ, r означаетъ радіусъ-векторъ кругового сѣченія безконечно тонкаго слоя, радіусъ котораго ϱ, центръ на линіи эксцентриситета шипа и подшипника, полюсъ въ точкѣ O — центрѣ кругового сѣченія шипа, а δ эксцентриситетъ сѣченія слоя по отношенію къ точкѣ O.

Изъ чертежа находимъ [1]

$$\operatorname{cs}\beta = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - \delta_1^2 \operatorname{sn}^2\varphi}}{\rho'}, \text{ откуда } \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = \frac{\delta' \operatorname{cs}\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 - \delta_1^2 \operatorname{sn}^2\varphi}},$$

[1] То же самое нашли бы изъ уравненія $r \operatorname{cs}\beta + \delta \operatorname{cs}(\varphi - \beta) = \rho$ и уравненія окружности, имѣющей полюсъ въ точкѣ O: $\rho^2 = r^2 + \delta^2 + 2\delta\, r \operatorname{cs}\varphi$.

$$\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}=\frac{\delta' cs\varphi}{\rho' cs\beta}.$$

Но $\frac{\delta''}{\rho'}=\frac{sn\beta}{sn\varphi}$, слѣдоват. $\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\frac{tg\beta}{tg\varphi}$ и $1-\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}=\frac{tg\varphi-tg\beta}{tg\varphi}=\frac{sn(\varphi-\beta)}{cs\beta . sn\varphi}$.

Замѣтимъ, что $tg\beta=\frac{\delta' sn(\varphi-\beta)}{r}$ съ точностью до величинъ третьяго порядка малости относительно β.

Тогда $1-\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}=\frac{r . tg\beta}{\delta' cs\beta . sn\varphi}=\frac{r . sn\beta}{\delta' cs^2\beta . sn\varphi}$. Подставляя найденное значеніе въ уравненіи (23) и умножая обѣ части равенства на $cs^2\beta$, найдемъ $\frac{\partial q}{\partial r}\cdot cs^2\beta+\frac{q . sn\beta}{\delta . sn\varphi}=cs^2\beta . A$,

гдѣ
$$A=a\alpha \lg r+\beta\alpha\varphi+c'\alpha.$$

Принимая $cs^2\beta=1$ (съ точностью до величины четвертаго порядка малости относительно β), найдемъ

$$\frac{\partial q}{\partial r}+\frac{q . sn\beta}{\delta . sn\varphi}=A. \qquad (24)$$

Замѣтивъ, что $\frac{sn\beta}{sn\varphi}=\frac{\delta}{\rho}$, найдемъ окончательно

$$\frac{\partial q}{\partial r}+\frac{q}{\rho}=A, \qquad (25)$$

уравненіе, относящееся къ произвольному безконечно-тонкому слою. На основаніи пункта (8) § 1 центры сѣченій этихъ безконечно-тонкихъ слоевъ распредѣлены равномѣрно по линіи эксцентриситета шипа и подшипника, а тогда $\frac{\delta}{s}=\frac{\delta'}{s'}=k$, гдѣ k нѣкоторое постоянное число. Затѣмъ далѣе для простоты вычисленій примемъ $\varrho = r + \delta . cs\varphi$ вмѣсто величины ϱ, опредѣляемой изъ уравненія окружности сѣченія безконечно тонкаго слоя, имѣющей полюсъ въ центрѣ сѣченія шипа:

$$\varrho^2 = r^2 + \delta^2 + 2\delta r . cs\varphi \, ; \; \varrho = \sqrt{r^2 + \delta^2 + 2\delta r cs\varphi} = r + \delta . cs\varphi .$$

На основаніи послѣдняго выраженія найдемъ, что при углѣ $\varphi = 0$

$$\varrho' = r' + s' + \delta' \text{ или } \varrho' - r' = s' + \delta',$$

а при произвольномъ углѣ φ

$$\varrho' = r' + s'_{\varphi} + \delta' . cs\varphi ;$$

откуда

$$s'_{\varphi} = \varrho' - r' - \delta' . cs\varphi = s' + \delta' - \delta' . cs\varphi = s' - \delta'(1 - cs\varphi)$$

или

$$s'_{\varphi} = s'(1 - \frac{\delta'}{s'}(1 - cs\varphi)) = s'(1 + k(1 - cs\varphi)).$$

Отсюда $$\frac{\delta'}{s'_{\varphi}} = \frac{\delta'}{s'} \cdot \frac{1}{1 + k(1 - cs\varphi)} .$$

Замѣчая, что $$\frac{\delta'}{s'} = \frac{\delta}{s} = k,$$

найдемъ $$\frac{\delta}{s_{\varphi}} = \frac{k}{1 + k(1 - cs\varphi)},$$

гдѣ s_{φ} толщина слоя, считаемая отъ поверхности шипа по радіусу-вектору r, для любого угла φ, до поверхности произвольнаго безконечно тонкаго слоя жидкости.

Тогда

$$\frac{\delta . cs\varphi}{s_{\varphi}} = \frac{k . cs\varphi}{1 + k(1 - cs\varphi)}, \quad r = r' + s_{\varphi}$$

и $dr = ds_\varphi = ds(1+k(1\text{-}cs\varphi))$; $\varsigma = r + \delta cs\varphi = r' + \delta cs\varphi + s_\varphi =$
$= r' + s_\varphi\left[1 + \frac{\delta cs\varphi}{s\varphi}\right] = r' + s_\varphi\left[1 + \frac{k.cs\varphi}{1+k(1-cs\varphi)}\right]$.

Обозначая для краткости $1+k(1-cs\varphi)$ чрезъ λ и замѣчая, что $s_\varphi = s.\lambda$, найдемъ окончательно

$$\varrho = r' + s.\lambda\left(1 + \frac{k.cs\varphi}{\lambda}\right) =$$
$$= r' + s.\lambda + s.k.cs\varphi = r' + s(\lambda + k.cs\varphi) \text{ или } \varrho = r' + s(1+k).$$

Уравненіе (25) представится въ видѣ:

$$\frac{1}{\lambda}.\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{q}{r'+s(1+k)} = A = a\alpha\lg(r'+s\lambda) +$$
$$+ b\alpha\varphi + c'\alpha. = a\alpha\lg r' + b\alpha\varphi + c'\alpha + \frac{a\alpha\lambda s}{r'}. \qquad (26)$$

Опредѣлимъ значеніе коэффиціента $a\alpha$. Взявъ абсолютную величину гидродинамическаго давленія независимо отъ направленія его, найдемъ, что

при $\varphi = 0$, $\qquad p_1 = b\alpha\mu\lg r + c\alpha\mu$
и при $\varphi = \varphi'$, $\qquad p_0 = b\alpha\mu\lg r + c\alpha\mu - a\alpha\mu.\varphi'$.

Вычитая находимъ $p_1 - p_0 = p' = a\alpha\mu.\varphi$, откуда $a\alpha = \frac{p'}{\mu'\varphi'}$

(p_0 атмосферное давленіе p', слѣдовательно, — избытокъ гидродинамическаго давленія надъ атмосфернымъ).

Принимая въ соображеніе, что величина p' доходитъ до 90 атмосферъ, будемъ считать $a\alpha = \frac{p'}{\mu\varphi'}$ за величину порядка $\frac{1}{s^2}$, а потому въ уравненіи (26) членами, содержащими величину s, пренебречь нельзя.

Обозначивъ для краткости $a\alpha \lg r' + b\alpha\varphi + c'\alpha$ черезъ A' и интегрируя уравненіе (26), найдемъ общій интегралъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$q = A'r' + a\alpha\,.\,\lambda s - a\alpha r' + \frac{C}{e^{\left(\frac{\lambda \lg r}{1+k}\right)} \,.\, e^{\left(\frac{s\lambda}{r'}\right)}},$$

гдѣ C новое произвольное постояное, а e основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ.

Опредѣлимъ величину A' изъ условій, относящихся къ предѣламъ жидкаго слоя на поверхности шипа и подшипника. Тогда, при $s=0$, $q=q'$, гдѣ q' скорость на окружности шипа, и при $s=s'$, $q=0$, т. е. примемъ для простоты, что коэффиціентъ внутренняго тренія весьма малъ сравнительно съ коэффиціентомъ внѣшняго тренія, а тогда скорость частицъ жидкости на поверхности подшипника почти равна нулю[1]. При этихъ условіяхъ:

$$q' = A'r' - a\alpha r' + \frac{C}{e^{\frac{\lambda.\lg r'}{1+k}} e},$$

откуда

$$0 = A'r' + a\alpha\lambda s' - a\alpha r' + \frac{C}{e^{\left(\frac{\lambda.\lg r'}{1+k}\right)} e^{\left(\frac{s'\lambda}{r'}\right)}},$$

откуда

$$A' = -\frac{q'r'}{s'\lambda r' - s_1{}^2.\lambda^2} - \frac{a\alpha s'\lambda}{r'} - \frac{a\alpha s_1{}^2\lambda^2}{r_1{}^2}$$

или, пренебрегая $s_1{}^2\lambda^2$ въ знаменателѣ,

$$= -A'\frac{q'}{s'\lambda} - \frac{p'.s'\lambda}{\mu.\varphi'.r'} - \frac{p'.s_1{}^2\lambda^2}{\mu.\varphi'.r_1{}^2}. \qquad (27)$$

---

[1] Какъ это было сдѣлано въ опытахъ Пуазейля съ трубками.

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ

$$A' = a\alpha \lg r' + b\alpha\varphi + c'\alpha = \frac{p'.\lg r'}{\mu.\varphi'} + b\alpha\varphi + c'\alpha$$

при углахъ φ, равныхъ нулю и нѣкоторому φ', опредѣлимъ $b\alpha$ и $c'\alpha$.

При $\varphi = 0, \lambda = 1, A' = \frac{p' \lg r'}{\mu\varphi'} + c'\alpha = -\frac{q'}{s'} - \frac{p'.s'}{\mu\varphi'.r'} - \frac{p'.s_1^2}{\mu\varphi'.r_1^2}$,

откуда

$$c'\alpha = -\frac{q'}{s'} - \frac{p'.s'}{\mu\varphi'.r'} - \frac{p'.s_1^2}{\mu\varphi'.r_1^2} - \frac{p'.\lg r'}{\mu\varphi'}.$$

При $\varphi = \varphi'$, $\lambda = \lambda'$ (если $\varphi = \varphi' = \frac{\pi}{2}$, $\lambda' = 1 + k$),

$$A' = \frac{p' \lg r'}{\mu\varphi'} + b\alpha\varphi' + c'\alpha = -\frac{q'}{s'\lambda'} - \frac{p'.s'\lambda'}{\mu\varphi'.r'} - \frac{p'.s_1^2\lambda_1^2}{\mu\varphi'.r_1^2},$$

откуда

$$b\alpha = \frac{q'}{s'\varphi'}\left[1 - \frac{1}{\lambda'}\right] - \frac{p'.s'}{\mu\varphi'.r'.\varphi'}[\lambda' - 1] - \frac{p'.s_1^2}{\mu\varphi_1^2 r_1^2}[\lambda_1^2 - 1]. \quad (28)$$

Тогда

$$A' = -\frac{q'}{s'}\left[1 - \frac{\lambda' - 1}{\lambda'\varphi'}.\varphi\right] -$$

$$-\frac{p's'}{r'\varphi'\mu}\left[1 + \frac{\lambda' - 1}{\varphi'}.\varphi\right] - \frac{p'.s_1^2}{\mu\varphi'.r'}\left[\frac{1}{r'} + \frac{\lambda_1^2 - 1}{\varphi' r'}.\varphi\right]. \quad (29)$$

Замѣтимъ теперь слѣдующее. Для простоты вычисленій было положено $\cs\beta = 1$, слѣдовательно $V = q$. Сличая выраженіе (14) съ выраженіемъ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}-\frac{\partial q}{\partial r}-\frac{q}{r}=-A$$

найдемъ

$$p_{t_1}=\mu\left(2.\frac{\partial q}{\partial r}-A\right)_{s=0} \quad \text{или} \quad p_{t_1}=\mu\left(2.\frac{\partial q}{\partial r}\right)_{s=0}-A'.\mu.$$

Изъ уравненія (25) находимъ

$$\left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)_{s=0}=A'-\frac{q'}{r'},$$

посему

$$p_{t_1}=\mu\,.\,A'-\frac{2\mu\,.\,q'}{r'}$$

Пренебрегая для простоты въ выраженіи (29) послѣднимъ членомъ, какъ очень малою величиной, найдемъ абсолютную величину тренія (на единицу поверхности шипа)

$$p_{t_1}=\frac{\mu q'}{s'}\left[1-\frac{\lambda'-1}{\lambda'\varphi'}.\varphi\right]+\frac{p's'}{r'.\varphi'}\left[1+\frac{\lambda'-1}{\varphi'}.\varphi\right]+\frac{2\mu q'}{r'}. \tag{30}$$

Изъ выраженія (20) находимъ: $\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{b\alpha\mu}{r}$. Если теперь для простоты допустить, что гидродинамическое давленіе p не измѣняется на протяженіи толщины слоя, который достигаетъ 0,001 миллиметра, то такое допущеніе приведетъ къ погрѣшности, величина коей будетъ порядка не менѣе s^2, а такими величинами условимся пренебрегать. Тогда $\frac{\partial p}{\partial r}=0$, что возможно, когда $b\alpha=0$. На основаніи сего изъ выраженія (28) находимъ:

$$\frac{q'}{s'\varphi'}\frac{(\lambda'-1)}{\lambda'}=\frac{p'.s'(\lambda'-1)}{\mu.\varphi'.r'.\varphi'}, \text{ откуда } s'=\sqrt{\frac{\mu.q'.r'\varphi'}{p'.\lambda'}}{}^{*}=\sqrt{\frac{\mu q'\sigma}{p'.\lambda'}}.$$

---

* Профессоръ Н. П. Петровъ нашелъ опытнымъ путемъ $s'=\frac{c}{\sqrt{p_1}}$, гдѣ

Обозначивъ дугу $r'\varphi'$ черезъ σ и подставивъ выраженіе s' въ уравненіе (30), найдемъ окончательно

$$p_{t1} = \sqrt{\frac{p'q'\lambda' \cdot \mu}{\sigma}} \cdot \left[1 + \frac{1}{\lambda'}\right] + \frac{2\mu . q'}{r'} \cdot \qquad (31)$$

Замѣтимъ, что, напр., для сурѣпнаго масла при температурѣ въ $30^\circ C_1$, $\mu = 0{,}0015$ килограмма на квадратный сантиметръ при скорости въ одинъ метръ. Отсюда понятно, что, при небольшихъ скоростяхъ и большихъ радіусахъ шиповъ, послѣдній членъ имѣетъ мало вліянія на треніе.

Для того, чтобы наглядно показать, какое вліяніе имѣетъ эксцентриситетъ шипа на величину тренія, сдѣлаемъ слѣдующее сравненіе. Полагая эксцентриситетъ равнымъ нулю, найдемъ

$$\lambda' = 1. \; ; \; p_{t1} = 2\sqrt{\frac{\mu \cdot p'q'}{\sigma}} \, .$$

Допустимъ затѣмъ, что s' есть толщина слоя жидкости при эксцентриситетѣ равномъ нулю, а s'' толщина слоя жидкости при эксцентриситетѣ равномъ 0,1 миллиметра.

Въ такомъ случаѣ при $s' = 0{,}01$ миллим., найдемъ изъ уравненія

$$s'' = \frac{s'}{\sqrt{\lambda''}} = \frac{s'\sqrt{s''}}{\sqrt{s'' + \delta'}} \, ,$$

что

$$s'' = 0{,}001^{mm}.$$

При этихъ значеніяхъ

$$k = \frac{\delta'}{s'} = 100 \; ; \; \lambda'' = 1 + k = 101;$$

и вычисляя p_{t1}, приблизительно получимъ

C постоянное. См. «Описаніе и результаты опытовъ надъ треніемъ жидкостей и машинъ». *Н. Петровъ.*

$$p_{t_1} = 10 \sqrt{\frac{\mu \cdot p' q'}{\sigma}},$$

т. е. треніе увеличилось въ пять разъ. Понятно, что въ точныхъ опытахъ надъ треніемъ смазанныхъ шиповъ невозможно упускать изъ виду вліяніе эксцентриситета.

Въ противномъ случаѣ, другимъ величинамъ, какъ напр. коэффиціенту внѣшняго тренія, теплопроводности, температурѣ, входящимъ косвеннымъ образомъ въ функцію, опредѣляющую величину μ, можно приписать такія значенія и такую степень важности, какихъ на самомъ дѣлѣ онѣ, можетъ быть, не оказываютъ на величину тренія шипа.

Изъ выраженій (16) и (20), опредѣляющихъ абсолютную величину гидродинамическаго давленія, усматриваемъ, что для лѣвой половины шипа оно увеличивается при возрастаніи абсолютной величины угла φ, а для правой, наоборотъ, уменьшается. По этому, какъ ни малъ эксцентриситетъ, шипъ долженъ нѣсколько *набѣжать* на подшипникъ, пока не установится равновѣсіе. Отсюда понятно, что при изнашиваніи шипа или подшипника увеличивается эксцентриситетъ, а, слѣдоват., и величина тренія должна значительно возрастать *даже при усиленной смазкѣ.* Улучшеніе конструкціи буксъ и въ особенности удачный выборъ металла для вкладышей подшипниковъ помогли бы дѣлу экономіи въ такихъ учрежденіяхъ, какъ желѣзныя дороги, на нашъ взглядъ, не менѣе чѣмъ исключительный выборъ вещества смазки, полезное вліяніе качества и количества которой можетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ значительно уменьшаться другими обстоятельствами, въ числѣ коихъ эксцентриситетъ, какъ видно, играетъ не маловажную роль. Нечего и говорить при этомъ о громадномъ значеніи надлежащаго техническаго надзора и разумнаго ремонта трущихся частей.

Примѣчаніе къ стр. 18.

Интегрированіе уравненія

$$r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial w}{\partial r}=0$$

было предложено профессоромъ М. Ѳ. Ковальскимъ въ томъ же засѣданіи, когда сообщалась статья А. В. Гречанинова.