УДК 517.9:532.2

*И. Д. ЧУЕШОВ*

# АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОБ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧКИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПРЕДЕЛЕ

Динамика упругой пологой оболочки, защемленной по контуру в сверхзвуковом потоке газа, описывается следующей системой уравнений [1]:

$$L_t^{\rho} u + \Delta^2 u - [u + f,\ v + \theta] + \rho \frac{\partial u}{\partial x_1} = p(x), \tag{1}$$

$$\Delta^2 v + [u + 2f,\ u] = 0,\ \ x = (x_1,\ x_2) \in \Omega, \tag{2}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = v\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x),\ \ \dot u\big|_{t=0} = u_1(x). \tag{4}$$

Здесь $\Omega$ — ограниченная область в $R^2$ с кусочногладкой границей, $\dot u = \frac{\partial u}{\partial t}$, $L_t^{\rho} u = (1 - \alpha\Delta)\ddot u + \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \sqrt{\rho} - \varepsilon_2 \Delta\right) \dot u$, $\alpha > 0$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqslant 0$

$$[u,\ v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, x x_2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\, \partial x_2}.$$

Предполагается, что $p(x) \in L^2(\Omega)$, $f \in (H^3 \cap H_0^2)(\Omega)$, $\theta \in H^4$, $u_0 \in H_0^2$, $u_1 \in H_0^1$ ($H^m$ — соболевское пространство порядка $m$). Параметр $\rho \geqslant 0$ определяется скоростью, набегающего вдоль оси $x_1$ потока. Случай $\alpha$, $\varepsilon_2 > 0$ отвечает учету инерции вращения элементов оболочки [2]. Как обычно [2—4], исключим функцию $v$ из системы (1) — (4). При сделанных предположениях задача (1) — (4) однозначно разрешима [2] и можно определить [3, 4] сильно непрерывную нелинейную полугруппу $S_t$ в пространстве $H = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ так, что $S_t y_0 = (u(t);\ \dot u(t))$, $u(t)$ — решение системы (1) — (4) с начальными условиями $y_0 = (u_0;\ u_1)$. Эта полугруппа обладает компактным максимальным аттрактором конечной хаусдорфовой размерности [3]. Если $\rho = 0$, то аттрактор имеет регулярную структуру [4]. Свойство регулярности сохраняется и при достаточно малых $\rho > 0$. Доказать это можно, использовав технику, развитую в [5].

В данной работе изучается асимптотическое поведение решений задачи (1) — (4) при $\rho \to \infty$, т. е. в гиперзвуковом пределе. Основным результатом является следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Представим решение* $u(t, x)$ *задачи (1) — (4) в виде* $u(t, x) = w_\rho(\sqrt{\rho}t, x)$. *Тогда для любого* $T > 0$

$$\lim_{\rho \to +\infty} \int_0^T (\| w_\rho(t) - w(t) \|^2_{H^1} + \| \dot{w}_\rho(t) - \dot{w}(t) \|^2_{H^1})\, dt = 0, \tag{5}$$

*где* $w(t)$ *— решение задачи*

$$(1 - \alpha\Delta)\ddot{w} + \varepsilon_1 \dot{w} + \frac{\partial}{\partial x_1} w = 0, \tag{6}$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0,\ w|_{t=0} = u_0,\ \dot{w}|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

Таким образом, динамика оболочки при $\rho \to +\infty$ описывается линейным эволюционным уравнением (6) с граничным и начальными условиями (7). В пространстве $H_0^1(\Omega)$ задача (6), (7) может быть представлена в виде $\ddot{u} + \varepsilon_1 G\dot{u} + Ku = 0$, $u|_{t=0} = u_0$, $\dot{u}|_{t=0} = 0$, где $G$ и $K$ — вполне непрерывные операторы в $H_0^1(\Omega)$, $G > 0$, $K^* = -K$. Поэтому эта задача однозначно разрешима и задает в пространстве $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ равномерно непрерывную линейную эволюционную полугруппу. При этом характер колебаний оболочки в пределе $\rho \to \infty$ определяется спектром квадратичного пучка:

$$\lambda^2(1 - \alpha\Delta)v + \lambda\varepsilon_1 v + \frac{\partial}{\partial x_1} v = 0,\ v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Этот спектр симметричен относительно вещественной оси, дискретен, имеет единственную точку сгущения, равную нулю, и лежит в области $\{0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda^2 \cdot \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. В том случае, когда $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, собственные числа пучка могут быть найдены из уравнений

$$\frac{1}{\lambda^4} + 4\varepsilon_1\alpha \frac{1}{\lambda} + 4\alpha + 4\alpha^2\pi^2 \left( \left(\frac{m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_2}\right)^2 \right) = 0,$$

где $m, n = 1, 2, \ldots$. Асимптотический анализ при $m, n \to \infty$ показывает, что имеется бесконечное число собственных чисел как с положительной, так и с отрицательной вещественной частью. Следовательно, в пределе $\rho \to +\infty$ происходит возбуждение бесконечного числа мод. В то же время при каждом фиксированном $\rho \geqslant 0$ асимптотическая динамика оболочки в существенном конечномерна [3].

Доказательство теоремы. Подставим $u(t)=w_\rho(\sqrt{\rho}\,t)$ в (1)—(4). Тогда энергетическое равенство для полученной системы имеет вид [3, 4]:

$$E_\rho(w_\rho(t),\ \dot{w}_\rho(t)) - E_\rho\left(u_0,\ \frac{u_1}{\sqrt{\rho}}\right) = -\int\limits_0^t \left(\varepsilon_1\dot{w}_\rho + \frac{\partial w_\rho}{\partial x_1},\ \dot{w}_\rho\right)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \left[-\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\rho}}\|\dot{w}_\rho\|^2 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\rho}}\|\nabla\dot{w}_\rho\|^2 + \frac{1}{\rho}(p,\ \dot{w}_\rho)\right]d\tau, \qquad (8)$$

где

$$E_\rho(w_0,\ w_1) = E^0_\rho(w_0,\ w_1) - \frac{1}{2\rho}([w_0+2f,\ w_0],\ \theta),$$

$$E^0_\rho(w_0,\ w_1) = \frac{1}{2}\left(\|w_1\|^2 + \alpha\|\nabla w_1\|^2 + \frac{1}{\rho}\|\Delta w\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|\Delta \tilde{w}_0\|^2\right),$$

$w_0\in H^2_0(\Omega)$ определяется из условия $\Delta^2\tilde{w}_0+[w_0+2f,\ w_0]=0$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Из (8) с помощью леммы 3.2 [3] получаем при $\rho\geqslant\rho_0>0$, $t\in[0,\ T]$ оценку

$$E^0_\rho(w_\rho(t),\ \dot{w}_\rho(t)) \leqslant \frac{c_1}{\rho} + c_2\int\limits_0^t (\|\dot{w}_\rho\|^2 + \|\nabla w_\rho\|^2)\,d\tau.$$

Отсюда благодаря неравенству $\|\nabla w_\rho(\tau)\|\leqslant\|\nabla u_0\|+\int\limits_0^t\|\nabla\dot{w}_\rho(s)\|\,ds$, имеем, что

$$\|\nabla w_\rho(t)\|^2 + \|\nabla\dot{w}_\rho(t)\|^2 \leqslant C_T,\ t\in[0,\ T], \qquad (9)$$

$$\frac{1}{\rho}(\|\Delta w_\rho(t)\|^2 + \|\Delta\tilde{w}_\rho(t)\|^2) \leqslant C_T,\ t\in[0,\ T]. \qquad (10)$$

Из (9), (10) вытекает, во-первых, $\ast$ — слабая компактность семейства $\{w_\rho;\ \dot{w}_\rho),\ \rho\geqslant\rho_0\}$ в $L^\infty(0,\ T;\ H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega))$, а, во-вторых, $\ast$ — слабая сходимость величины $(\sqrt{\rho})^{-1}w_\rho$ к нулю при $\rho\to+\infty$ в пространстве $L^\infty(0,\ T;\ H^2_0(\Omega))$. Это обстоятельство, а также свойства скобки $[u,\ v]$ (см. лемму 1.1 [3]) позволяет в системе уравнений для $w_\rho(t,\ x)$ в смысле обобщенных функций совершить предельный переход $\rho\to\infty$ и показать, что каждая предельная точка семейства $\{(w_\rho;\ \dot{w}_\rho)\}$ имеет вид $(w(t);\ \dot{w}(t))$, где $w(t)$ — решение задачи (6), (7). Ввиду однозначной разрешимости этой задачи предельная точка единственна.

Докажем теперь соотношение (5). С помощью теоремы Ю. А. Дубинского о компактности [6] получаем, что

$$\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_0^t\left(\frac{\partial}{\partial x_1}w_\rho,\ \dot{w}_\rho\right)d\tau = \int\limits_0^t\left(\frac{\partial}{\partial x_1}w,\ \dot{w}\right)d\tau.$$

А лемма 1.1 [3] и оценки (9), (10) позволяет доказать, что $|([w_\rho, w_\rho+f], \theta)| \leqslant C_T$. Поэтому, переходя в (8) к пределу $\rho\to\infty$ и пользуясь свойствами слабой сходимости, получаем, что

$$\overline{\lim_{\rho\to+\infty}} E_\rho^0(w_\rho, \dot w_\rho) \leqslant \int_0^t \left(-\varepsilon_1\dot w - \frac{\partial}{\partial x_1} w, \dot w\right) d\tau.$$

Использование энергетического равенства для системы (6), (7) приводит к неравенству

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}} \int_0^T E_\rho^0(w_\rho, \dot w_\rho)\, dt \leqslant \int_0^T (\|\dot w\|^2 + \alpha\|\nabla\dot w\|^2)\, dt. \tag{11}$$

Поэтому, ввиду слабой сходимости $\dot w_\rho \to \dot w$, получаем, что

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_0^T (\|\dot w_\rho\|^2 + \alpha\|\nabla\dot w_\rho\|^2)\, dt = \int_0^T (\|\dot w\|^2 + \alpha\|\nabla\dot w\|^2)\, dt. \tag{12}$$

Отсюда вытекает (5).

Отметим также, что из (5), (11), (12) следует соотношение:

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho} \int_0^T (\|\Delta w_\rho(t)\|^2 + \|\Delta\tilde w_\rho(t)\|^2)\, dt = 0. \tag{13}$$

Это соотношение и теорема 1 позволяют доказать приведенное ниже утверждение об асимптотической линеаризации задачи (1) — (4).

**Теорема 2.** *Для каждого $T>0$ имеет место соотношение*

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|w_\rho(t)-\varphi_\rho(t)\|_{H^1} + \|\dot w_\rho(t) - \dot\varphi_\rho(t)\|_{H^1}) \to 0 \tag{14}$$

*при $\rho\to\infty$, где $\varphi_\rho$ — решение следующей задачи:*

$$(1-\alpha\Delta)\ddot\varphi_\rho + \varepsilon_1\dot\varphi_\rho + \frac{1}{\rho}\Delta^2\varphi_\rho + \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_\rho = \frac{1}{\rho}p,$$

$$\varphi_\rho|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n}\varphi_\rho|_{\partial\Omega} = 0,\quad \varphi_\rho|_{t=0} = u_0,\quad \dot\varphi_\rho|_{t=0} = \frac{u_1}{\sqrt{\rho}}.$$

Доказательство. Очевидно, что разность $\psi_\rho = w_\rho - \varphi_\rho$ удовлетворяет уравнению

$$(1-\alpha\Delta)\ddot\psi_\rho + \varepsilon_1\dot\psi_\rho + \frac{1}{\rho}\Delta^2\psi_\rho + \frac{\partial}{\partial x_1}\psi_\rho = F(t, w_\rho, \rho), \tag{15}$$

где $F(t, w_\rho, \rho) = -\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\varepsilon_0 - \varepsilon_2\Delta)\dot w_\rho + \frac{1}{\rho}[w_\rho + f, \tilde w_\rho + \theta]$.

Свойства скобки $[u, v]$ позволяют с помощью (9), (10) доказать, что

$$\|[w_\rho+f, \tilde w_\rho+\theta]\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C_T\left(1+\sqrt{\rho}\,\|\Delta w_\rho\|\right),\quad t\in[0, T].$$

Отсюда и из (9) вытекает, что

$$\int_0^T \| F(t,\ w_\rho,\ \rho) \|^2_{H^{-1}}\, dt \leqslant \frac{C_T}{\rho}\left(1 + \int_0^T \| \Delta w_\rho(t) \|^2\, dt\right).$$

Использование энергетического равенства для уравнения (15) и свойства (13) дает возможность получить (14).

**Список литературы.** 1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., 1961. 339 с. 2. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., 1978. 184 с. 3. *Чуешов И. Д.* Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек//Мат. сб. 1987. **133**, № 4. С. 419—428. 4. *Чуешов И. Д.* Структура максимального аттрактора модифицированной системы уравнений Кармана//Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1987. Вып. 47. С. 99—104. 5. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения//Успехи мат. наук. 1986. **41**, вып. 4. С. 3—54. 6. *Дубинский Ю. А.* Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях//Мат. сб. 1965. **67**, № 4. С. 609—642.

*Поступила в редколлегию 01.10.87*

УДК 517.9

*В. С. ЗАЯЧКОВСКИЙ, А. А. ПАНКОВ*

## СЛАБАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИЙ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

В конечномерном комплексном пространстве $E$ рассмотрим полиномиальный операторный пучок $A(z) = z^n - 1_E + z^{n-1}A_1 + \cdots + A_n$. Факторизацией пучка $A(z)$ называется его представление в виде $A(z) = B(z)\,C(z)$. Пространство $P_n$ пучков степени $n$ с единичным старшим коэффициентом очевидным образом отождествляется с пространством $L(E)^n$ и, тем самым, наделяется естественной метрикой и комплексной структурой.

Введем отображение $m: P_k \times P_l \to P_n$, $n = k + l$, действующее по формуле $(B(z),\ C(z)) \mapsto B(z)\,C(z)$. Очевидно, что слой $m^{-1}(A)$, $A \in P_n$, состоит из всевозможных факторизаций пучка $A(z)$, у которых степень правого делителя равна $l$.

Представляет интерес исследование устойчивых в том или ином смысле факторизаций. Наиболее сильное понятие устойчивости изучалось в работах [1, 2]: факторизация называется устойчивой, если отображение $m$ биголоморфно в некоторой окрестности точки $(B,\ C)$ (замена условия биголоморфности условием липшицевой гомеоморфности [3] или даже просто гомеоморфности в силу известных результатов (см. [4], с. 290) не дает ничего нового).

Более слабое понятие устойчивости рассматривалось в [5, 6]. Факторизация $A = BC$ называется слабо устойчивой, если для любого пучка $A$, близкого к $A$, имеется (не обязательно единственная) факторизация $\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{C}$, где пучки $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ близки к $B$ и $C$ соответственно. Это равносильно открытости отображения $m$ в точке $(B,\ C)$ (определение отображения, открытого в точке, см. в [7]).