ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГРУППОВЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Д. З. Аров

В настоящей работе вычисляется энтропия для одного класса эндоморфизмов связных компактных коммутативных групп конечной размерности. Вычисления проводятся в § 2 (для произвольного эндоморфизма конечномерного тора) и в § 3. В § 4 изучаются метрические свойства эндоморфизма конечномерного тора, связанные с понятием энтропии; в частности, выясняется, что существуют точные эндоморфизмы конечномерного тора, не обладающие образующей с конечной энтропией. Параграф 1 носит вспомогательный характер.

По поводу используемых в работе понятий метрической теории динамических систем (пространство Лебега, эндоморфизм, измеримое разбиение, энтропия и т. п.) см. [5], [6].

§ 1. Обозначения и вспомогательные предложения

Пусть M — пространство Лебега, T — эндоморфизм пространства M. Будем пользоваться следующими обозначениями: ε — разбиение рассматриваемого пространства на отдельные точки; запись $\xi \leqslant \eta$, где ξ и η — разбиения, означает, что η есть подразбиение ξ; $\prod$ — знак перемножения разбиений; $\xi\eta$ — произведение разбиений ξ и η; $H(\xi)$ — энтропия измеримого разбиения ξ; $H(\xi/\eta)$ — средняя условная энтропия измеримого разбиения ξ относительно измеримого разбиения η (определение функций $H(\xi)$ и $H(\xi/\eta)$ см. в [6]); Z — множество разбиений ξ с $H(\xi) < \infty$; ξ_T^n, ξ_T^- и ξ_T — разбиения, определяемые по разбиению ξ и эндоморфизму T формулами:

$$\xi_T^n = \prod_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi \quad (n \geqslant 1),\ \xi_T^- = \prod_{k=0}^{\infty} T^{-k}\xi,$$

$$\xi_T = \begin{cases} \xi_T^-, \text{ если } T \text{ не является автоморфизмом } \operatorname{mod} 0 \\ \prod\limits_{-\infty}^{\infty} T^{-k}\xi, \text{ если } T \text{ — автоморфизм } \operatorname{mod} 0; \end{cases}$$

$h(T, \xi)$ и $h(T)$ — функции, определяемые формулами:

$$h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n) = H(\xi/T^{-1}\xi_T^-), \tag{1.1}$$

$$h(T) = \sup h(T, \xi) \qquad (\xi \in Z). \tag{1.2}$$

Величина $h(T)$ называется энтропией эндоморфизма T ([1], [2], [4], [6]).

Определение. Конечное или счетное измеримое разбиение ξ называется образующей относительно эндоморфизма T, если $\xi_T = \varepsilon$.

Если эндоморфизм T обладает образующей $\xi \in Z$, то, как известно $h(T) = h(T, \xi)$ (см. [4], [6]).

Вычисления, проведенные в § 2 и 3, опираются на шесть лемм — три аппроксимационные и три алгебраические.

Лемма 1. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — такая последовательность разбиений из Z, что*

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \xi_n = \varepsilon \mod 0,$$

то для всякого эндоморфизма T пространства M

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T, \xi_n).$$

Лемма 2. *Если T — эндоморфизм пространства M и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — такая последовательность разбиений из Z, что*

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots, \quad \prod_{n=1}^{\infty} (\xi_n)_T = \varepsilon \mod 0,$$

то

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T, \xi_n).$$

Лемма 3. *Пусть T — эндоморфизм пространства M и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — такая последовательность измеримых разбиений этого пространства, что*

$$T^{-1}\zeta_n \leqslant \zeta_n, \quad \zeta_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant \ldots, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \zeta_n = \varepsilon \mod 0.$$

Если T_n — фактор-эндоморфизм эндоморфизма T по ζ_n, то

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T_n).$$

Доказательств лемм 1—3 приводить не будем, так как они ничем не отличаются от доказательств аналогичных утверждений для автоморфизма (см. [5], [4], [3]).

Лемму 2 можно рассматривать как частный случай леммы 3 (нужно положить $\zeta_n = (\xi_n)_T$ и учесть, что здесь $h(T_n) = h(T, \xi_n)$), лемму 1 — как частный случай леммы 2.

При доказательстве основных теорем будем пользоваться (§ 2, п. 3, 4; § 3, п. 4) следующей элементарной оценкой фиксированных миноров степеней матрицы. Для произвольной матрицы A конечного порядка r через $A(\sigma)$ обозначим ее минор s-го порядка $(1 \leqslant s \leqslant r)$, который задается системой σ номеров строк и столбцов матрицы A, $\sigma = \{1 \leqslant m_1 < < m_2 < \ldots < m_s \leqslant r;\ 1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leqslant r\}$, число s назовем порядком системы σ; для произвольного числа $a > 0$ через $s(a)$ обозначим число собственных значений матрицы A, по модулю не меньших a.

Лемма 4. *Пусть A — матрица конечного порядка r и $\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ — ее собственные значения. Если $s = s(a) > 0$ для $a > 0$, то для любой системы σ порядка s*

$$A^n(\sigma) = C_\sigma \prod_{|\lambda_i| \geqslant a} \lambda_i^n (1 + \alpha_n),$$

где C_σ — константа, не зависящая от n, $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. При этом существует такая система σ порядка s, что $C_\sigma \neq 0$.

Доказательство. Приведем матрицу A к жордановой нормальной форме:

$$A = P^{-1}JP, \tag{1.3}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & A_v & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & A_u \end{pmatrix}, \qquad A_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots 1 \\ 0 & & \cdot\ \mu_i \end{pmatrix} \qquad (1 \leqslant i \leqslant u),$$

A_i — клетки Жордана порядка ν_i, μ_i — собственные значения матрицы A,

$|\mu_i| \geqslant a$ при $1 \leqslant i \leqslant v$, $|\mu_i| < a$ при $v < i \leqslant u$; $\sum_{i=1}^{v} \nu_i = s(a)$, $\sum_{i=1}^{u} \nu_i = r$;

$\prod_{i=1}^{v} \mu_i = \prod_{|\lambda_i| \geqslant a} \lambda_i$; P — невырожденная матрица порядка r. Тогда, выбрав $n > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant u} \nu_i$, получим

$$A^n = P^{-1n}JP, \tag{1.3'}$$

где

$$J^n = \begin{pmatrix} A_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_u^n \end{pmatrix}, \qquad A_i^n = \begin{pmatrix} \mu_i^n C_n^1 \mu_i^{n-1} & \dots & C_n^{\nu_i - 1} \mu_i^{n - \nu_i + 1} \\ \mu_i^n & \dots & C_n^{\nu_i - 2} \mu_i^{n - \nu_i + 2} \\ 0 \qquad \ddots & & \vdots \\ & & \mu_i^n \end{pmatrix}.$$

Выражая минор s-го порядка матрицы-произведения A^n через миноры s-го порядка матриц-сомножителей P^{-1}, J^n и P, будем иметь (см. [10], стр. 19):

$$A^n \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_s \\ k_1, & \dots, & k_s \end{pmatrix} = \sum P^{-1} \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_s \\ \alpha_1, & \dots, & \alpha_s \end{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} \alpha_1, & \dots, & \alpha_s \\ \beta_1, & \dots, & \beta_s \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \beta_1, & \dots, & \beta_s \\ k_1, & \dots, & k_s \end{pmatrix},$$

где суммация проводится по всем индексам α и β таким, что $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s \leqslant r$, $1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s \leqslant r$.

Поскольку $J^n \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & s \\ 1, & 2, & \dots, & s \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{v} \mu_i^{n\nu_i} = \prod_{|\lambda_i| \geqslant a} \lambda_i^n$, а все другие миноры s-го порядка матрицы J^n являются $0\left(\prod_{i=1}^{v} \mu_i^{n\nu_i}\right)$ (при $n \to \infty$), то

$$A^n(\sigma) = A^n \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_s \\ k_1, & \dots, & k_s \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_s \\ 1, & \dots, & s \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1, & \dots, & s \\ k_1, & \dots, & k_s \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{v} \mu_i^{n\nu_i} +$$

$$+ 0\left(\prod_{i=1}^{v} \mu_i^{n\nu_i}\right) = C_\sigma \prod_{|\lambda_i| \geqslant a} \lambda_i^n (1 + \alpha_n),$$

где

$$C_\sigma = P^{-1} \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_s \\ 1, & \dots, & s \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1, & \dots, & s \\ k_1, & \dots, & k_s \end{pmatrix}, \quad \alpha_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Величина $C_\sigma \prod_{i=1}^{v} \mu_i^{n\nu_i}$ равна минору $B^n(\sigma)$ матрицы

$$B^n = P^{-1}\begin{pmatrix} A_1^n & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_v^n & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} P.$$

Так как ранг матрицы B^n равен s, то существует система σ порядка s такая, что $B^n(\sigma) \neq 0$, или $C_\sigma \neq 0$.

Наряду с минорами $A^n(\sigma)$ предыдущей леммы нам придется рассматривать (§ 2, п. 4; § 3, п. 4) определители, получающиеся путем замены одной из строк минора $A^n(\sigma)$ строкой из другого минора $A^m(\sigma')$, а также путем обрамления $A^n(\sigma)$ строкой и колонной. Обозначим через $a_{\alpha\beta}^{(k)}$ элементы матрицы A^k; через $A_{\alpha_0,\ i}^{(n,\ m)}$ — определитель, полученный путем замены в миноре $A^n\begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_s \\ k_1, & \dots, & k_s \end{pmatrix}$ строки $a_{m_{\alpha_0}k_1}^{(n)}, \dots, a_{m_{\alpha_0}k_s}^{(n)}$ строчкой $a_{ik_1}^{(m)}, \dots, a_{ik_s}^{(m)}$; через $A_{i,\ k_0,\ m}^{(n)}$ — определитель, полученный из $A^n\begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_s \\ k_1, & \dots, & k_s \end{pmatrix}$ обрамлением слева столбцом $a_{ik_0}^{(m)}, a_{m_1k_0}^{(n)}, \dots, a_{m_sk_0}^{(n)}$ и сверху строкой $a_{ik_0}^{(m)}, a_{ik_1}^{(m)}, \dots, a_{ik_s}^{(m)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r;\ k_0 \neq k_\beta,\ 1 \leqslant \beta \leqslant s;\ 1 \leqslant \alpha_0 \leqslant s)$.

Лемма 5. *Если $s = s(a)$ и $a \geqslant 1$, то при $0 \leqslant m \leqslant n$*

$$|A_{\alpha_0,\ i}^{(n,\ m)}| < K_1 n^{rs} a^{m-n} \prod_{|\lambda_i| \geqslant a} |\lambda_i|^n, \tag{1.4}$$

$$|A_{i,\ k_0,\ m}^{(n)}| < K_2 n^{r(s+1)} a^m \prod_{|\lambda_i| \geqslant a} |\lambda_i|^n, \tag{1.5}$$

где K_1 и K_2 — константы, не зависящие от n, m, i, α_0 и k_0.

Доказательство. Докажем неравенство (1.4). Пусть в (1.3)

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} & \dots & p_{1r}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{\nu_1 1}^{(1)} & \dots & p_{\nu_1 r}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{11}^{(u)} & \dots & p_{1r}^{(u)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{\nu_u 1}^{(u)} & \dots & p_{\nu_u r}^{(u)} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} q_{11}^{(1)} & \dots & q_{1\nu_1}^{(1)} & \dots & q_{11}^{(u)} & \dots & q_{1\nu_u}^{(u)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q_{r1}^{(1)} & \dots & q_{r\nu_1}^{(1)} & \dots & q_{r1}^{(u)} & \dots & q_{r\nu_u}^{(u)} \end{pmatrix}.$$

Тогда из (1.3') получаем:

$$a_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{j=1}^{u} \sum_{\tau=1}^{\nu_j} \sum_{l=\tau}^{\nu_j} q_{\alpha\tau}^{(j)} p_{l\beta}^{(j)} C_k^{l-\tau} \mu_j^{k-l+\tau} \qquad (1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant r). \tag{1.6}$$

Заменим элементы определителя $A_{\alpha_0,\ i}^{(n,\ m)}$ их выражением (1.6) через собственные значения матрицы A. Тогда $A_{\alpha_0,\ i}^{(n,\ m)}$ можно представить в виде:

$$A_{\alpha_0, i}^{(n, m)} = \sum_{j_1, \ldots, j_s=1}^{u} \sum_{\tau_1=1}^{\nu_{j_1}} \sum_{l_1=\tau_1}^{\nu_{j_1}} \cdots \sum_{\tau_s=1}^{\nu_{j_s}} \sum_{l_s=\tau_s}^{\nu_{j_s}} q_{m_1\tau_1}^{(j_1)} \ldots q_{i\tau_{\alpha_0}}^{(j_{\alpha_0})} \ldots q_{m_s\tau_s}^{(j_s)} C_n^{l_1-\tau_1} \ldots$$

$$\ldots C_m^{l_{\alpha_0}-\tau_{\alpha_0}} \ldots C_n^{l_s-\tau_s} \mu_{j_1}^{n-l_1+\tau_1} \ldots \mu_{\alpha_0}^{m-l_{\alpha_0}+\tau_{\alpha_0}} \ldots \mu_{j_s}^{n-l_s+\tau_s} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} p_{l_1k_1}^{(j_1)} & \ldots & p_{l_1k_s}^{(j_1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{l_{\alpha_0}k_1}^{(j_{\alpha_0})} & \ldots & p_{l_{\alpha_0}k_s}^{(j_{\alpha_0})} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{l_sk_1}^{(j_s)} & \ldots & p_{l_sk_s}^{(j_s)} \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

Пусть p — наибольший по модулю минор s-го порядка матрицы P, q — наибольший по модулю элемент матрицы $Q = P^{-1}$, L — число слагаемых в правой части (1.7). Имеем:

$$|q_{m_\alpha\tau_\alpha}^{(j_\alpha)}| \leqslant |q|, \quad |q_{i\tau_{\alpha_0}}^{(j_{\alpha_0})}| \leqslant |q|;$$

$$C_n^{l_\alpha-\tau_\alpha} \leqslant n^r, \; C_m^{l_{\alpha_0}-\tau_{\alpha_0}} \leqslant n^r \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant s);$$

если $j_\alpha \leqslant v$, то $|\mu_{j_\alpha}| \geqslant a \geqslant 1$; если $j_\alpha \leqslant v < j_\beta$, то $|\mu_{j_\alpha}| > |\mu_{j_\beta}|$; определители, стоящие в правой части (1.7), равны нулю, если индексы j_α равны k более, чем ν_k раз, а в остальных случаях они имеют модуль не больший, чем $|p|$. В связи с этим каждое слагаемое правой части равенства (1.7) имеет модуль не больший, чем $|q|^s n^{rs} |p| a^{m-n} \prod_{i=1}^{v} |\mu_i|^{n\nu_i}$ и, следовательно,

$$|A_{\alpha_0, i}^{(n, m)}| \leqslant L |q|^s |p| n^{rs} a^{m-n} \prod_{i=1}^{v} |\mu_i|^{n\nu_i} < K_1 n^{rs} a^{m-n} \prod_{|\lambda_i| \geqslant a} |\lambda_i|^n,$$

если взять $K_1 > L|q|^s|p|$.

Неравенство (1.5) доказывается аналогично.

Оценка энтропии сверху (§ 2 и § 3) основана на подсчете числа элементов произведения разбиений. Существенную роль при этом играет то обстоятельство, что эти элементы являются связными множествами. При доказательстве связности их (§ 2, п. 2; § 3, п. 4) используется следующая лемма.

Обозначим через $a_{\alpha\beta}$ элементы целочисленной матрицы A порядка r и через $a_{\alpha\beta}^{(k)}$ — элементы степеней A^k матрицы A.

Лемма 6. *Пусть a и q — фиксированные натуральные числа, удовлетворяющие условиям*

$$(a, |\det A|) = 1, \; q > q_0 = a - 1 + \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \sum_{\beta=1}^{r} |a_{\alpha\beta}|.$$

Тогда для любых натуральных чисел n и $j_\alpha^{(k)} \leqslant q$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant r,\ 0 \leqslant k \leqslant n)$ существует лишь одна система целых чисел $t_\alpha^{(k)}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant r,\ 0 \leqslant k \leqslant n)$ такая, что система $(n+1)\,r$ двойных неравенств

$$\frac{j_\alpha^{(k)} - 1}{q} + t_\alpha^{(k)} \leqslant a^{n-k} \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}^{(k)} \tilde{x}_\beta < \frac{j_\alpha^{(k)}}{q} + t_\alpha^{(k)} \tag{1.8}$$

$$1 \leqslant \alpha \leqslant r, \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

имеет решение из единичного куба $\tilde{X} = \{0 \leqslant \tilde{x}_\beta < 1,\ 1 \leqslant \beta \leqslant r\}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}^{(i)} = (\tilde{x}_1^{(i)}, \ldots, \tilde{x}_r^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ — две точки куба $\tilde{X}$, координаты которых удовлетворяют системе (1.8) соответственно при $t_\alpha^{(k)} = t_{\alpha, i}^{(k)}$ $(i = 1, 2)$. Требуется доказать, что $t_{\alpha, 1}^{(k)} = t_{\alpha, 2}^{(k)}$, если a и q удовлетворяют условиям леммы. Если $\Delta t_\alpha^{(k)} = t_{\alpha, 1}^{(k)} - t_{\alpha, 2}^{(k)}$ и $\Delta\tilde{x}_\beta = \tilde{x}_\beta^{(1)} - \tilde{x}_\beta^{(2)}$, то из системы двойных неравенств (1.8), записанных для $\tilde{x}_\beta = \tilde{x}_\beta^{(i)}$ и $t_\alpha^{(k)} = t_{\alpha, i}^{(k)}$ $(i = 1, 2)$, получаем:

$$-\frac{1}{q} + \Delta t_\alpha^{(k)} < a^{n-k} \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}^{(k)} \Delta\tilde{x}_\beta < \frac{1}{q} + \Delta t_\alpha^{(k)}, \tag{1.9}$$

$$-\frac{a}{q} + a\Delta t_\alpha^{(k+1)} < a^{n-k} \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}^{(k+1)} \Delta\tilde{x}_\beta < \frac{a}{q} + a\Delta t_\alpha^{(k+1)}. \tag{1.10}$$

Так как

$$\sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}^{(k+1)} \Delta\tilde{x}_\beta = \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} \sum_{\beta=1}^{r} a_{\gamma\beta}^{(k)} \Delta\tilde{x}_\beta,$$

то из (1.9) будем иметь

$$-\frac{1}{q}\sum_{\gamma=1}^{r} |a_{\alpha\gamma}| + \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma}\Delta t_\gamma^{(k)} < a^{n-k} \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}^{(k+1)} \Delta\tilde{x}_\beta < \frac{1}{q}\sum_{\gamma=1}^{r} |a_{\alpha\gamma}| + \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma}\Delta t_\gamma^{(k)}. \tag{1.11}$$

Сравнение (1.10) с (1.11) дает

$$\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma}\Delta t_\gamma^{(k)} - \frac{1}{q}\sum_{\gamma=1}^{r} |a_{\alpha\gamma}| < \frac{a}{q} + a\Delta t_\alpha^{(k+1)},$$

$$\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma}\Delta t_\gamma^{(k)} + \frac{1}{q}\sum_{\gamma=1}^{r} |a_{\alpha\gamma}| > -\frac{a}{q} + a\Delta t_\alpha^{(k+1)},$$

или

$$\left| a\Delta t_\alpha^{(k+1)} - \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma}\Delta t_\gamma^{(k)} \right| < \frac{1}{q}\left(a + \sum_{\gamma=1}^{r} |a_{\alpha\gamma}|\right). \tag{1.12}$$

Из (1.12) следует, что при $q > q_0 = a - 1 + \max\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \sum\limits_{\beta=1}^{r} |a_{\alpha\beta}|$

$$\left| a\Delta t_\alpha^{(k+1)} - \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma}\Delta t_\gamma^{(k)} \right| < 1.$$

Так как в полученном неравенстве левая часть — целое число, то

$$a\Delta t_\alpha^{(k+1)} = \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma}\Delta t_\gamma^{(k)} \qquad (1 \leqslant \alpha \leqslant r,\ 0 \leqslant k < n). \tag{1.13}$$

Решением системы (1.13) является система целочисленных векторов

$$\Delta T^{(k)} = \frac{1}{a^k}\Delta T^{(0)} A^k \quad (0 \leqslant k \leqslant n), \tag{1.14}$$

где

$$\Delta T^{(k)} = (\Delta t_1^{(k)}, \Delta t_2^{(k)}, \ldots, \Delta t_r^{(k)}).$$

Из (1.14) видно, что $\Delta T^{(0)}$ является решением системы сравнений:

$$\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma}^{(n)} \Delta t_{\gamma}^{(0)} \equiv 0 \pmod{a^n}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{1.15}$$

Так как в силу условия леммы число a^n — взаимно простое с $|\det(a_{\alpha\beta}^{(n)})| = |\det A|^n$, то решение системы (1.15) имеет вид $\Delta t_{\alpha}^{(0)} = c_\alpha a^n$, где c_α — целые числа, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$.

С другой стороны, из системы (1.8) (записанной для $\tilde{x}_\beta = \tilde{x}_\beta^{(i)}$ и $t_\alpha^{(k)} = t_{\alpha, i}^{(k)}$) при $k = 0$ получаем:

$$\frac{j_\alpha^{(0)} - 1}{qa^n} + \frac{t_{\alpha, i}^{(0)}}{a^n} \leqslant \tilde{x}_\alpha^{(i)} < \frac{j_\alpha^{(0)}}{qa^n} + \frac{t_{\alpha, i}^{(0)}}{a^n}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r; \; i = 1, 2. \tag{1.16}$$

Поскольку $0 \leqslant \tilde{x}_\alpha^{(i)} < 1$ и $1 \leqslant j_\alpha^{(0)} \leqslant q$, то из (1.16) вытекает, что

$$0 \leqslant t_{\alpha, i}^{(0)} < a^n \quad (i = 1, 2),$$

или

$$0 \leqslant t_{\alpha, 2}^{(0)} < a^n \text{ и } 0 \leqslant t_{\alpha, 2}^{(0)} + c_\alpha a^n < a^n,$$

откуда $c_\alpha = 0$. Получили $\Delta t_\alpha^{(0)} = 0$, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$.

Из (1.14) далее находим, что $\Delta t_\alpha^{(k)} = 0$, или $t_{\alpha, 1}^{(k)} = t_{\alpha, 2}^{(k)}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

§ 2. Вычисление энтропии эндоморфизма конечномерного тора

Пусть X — тор конечной размерности r и T — групповой эндоморфизм тора X на себя. Относительно заданной системы циклических координат в X эндоморфизм T представляется некоторой невырожденной целочисленной квадратной матрицей A порядка r. Эндоморфизм T является автоморфизмом тогда и только тогда, если $|\det A| = 1$.

Тор X с обычной (инвариантной) мерой можно рассматривать как пространство Лебега, а T — как метрический эндоморфизм этого пространства.

Я. Г. Синай [2] вычислил энтропию эргодического автоморфизма r-мерного тора, матрица A которого имеет r различных действительных собственных значений. В. А. Рохлин [6] показал, что для эндоморфизма двумерного тора в случае, когда оба собственных значения матрицы A по модулю больше единицы, энтропия равна $\lg|\det A|$. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Энтропия произвольного эндоморфизма T конечномерного тора X вычисляется по формуле*

$$h(T) = \sum_{|\lambda_i| \geqslant 1} \lg |\lambda_i|, \tag{2.1}$$

где λ_i — собственные значения матрицы A, представляющей эндоморфизм T относительно какой-нибудь системы циклических координат в X.

Формула (2.1) для эргодического автоморфизма тора есть в статье А. Л. Гениса [11].

Доказательство теоремы разобьем на несколько частей.

1. Тор X можно рассматривать как единичный куб $0 \leqslant \tilde{x}_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant r$, с отождествленными гранями $\tilde{x}_i = 0$ и $\tilde{x}_i = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Получаемое при этом естественное отображение куба $\tilde{X} = \{0 \leqslant \tilde{x}_i < 1,$

$1 \leqslant i \leqslant r\}$ на тор X обозначим через S. Ясно, что S является метрическим изоморфизмом куба $\tilde{X}$ на X. Циклические координаты x_β тора X будем рассматривать в пределах $-\infty < x_\beta < \infty$, так что x_β и x'_β тогда и только тогда являются координатами одной и той же точки тора, если $x_\beta - x'_\beta$ — целые числа, $1 \leqslant \beta \leqslant r$.

Для натурального числа q обозначим через $\xi(q)$ разбиение тора X на q^r равных кубов гиперплоскостями $x_\alpha = \frac{j'_\alpha}{q}$, j_α — целые. Тогда для любого натурального $p > 1$ будем иметь

$$\xi(p^n) < \xi(p^{n+1}) \quad (n \geqslant 1), \quad \prod_{n=1}^{\infty} \xi(p^n) = \varepsilon,$$

так что по лемме 1

$$h(T) = \lim_{n \to \infty} h(T, \xi(p^n)). \tag{2.2}$$

Покажем, что при достаточно большом q

$$h(T, \xi(q)) = \sum_{|\lambda_i| \geqslant 1} \lg |\lambda_i|. \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) следует (2.1).

2. Пусть эндоморфизм T тора X относительно заданной системы циклических координат в X представляется матрицей $A = (a_{\alpha\beta})$ и $a^{(k)}_{\alpha\beta}$ — элементы матрицы A^k $(1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant r)$. Элемент разбиения $T^{-k}\xi(q)$ состоит из $|\det A^k|$ гиперпараллелепипедов. Каждый из этих гиперпараллелепипедов в свою очередь может разбиться на несвязные части при рассмотрении $S^{-1}T^{-k}\xi(q)$, так что элементы разбиения $S^{-1}T^{-k}\xi(q)$, вообще говоря, являются несвязными множествами в $\tilde{X}$. Однако оказывается, что существует такое q_0, что при $q > q_0$ элементы разбиения $S^{-1}\xi^n_T(q) = S^{-1} \prod\limits_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi(q)$ являются связными выпуклыми множествами в $\tilde{X}$ при любом натуральном n. Действительно, элемент разбиения $S^{-1}T^{-k}\xi(q)$ определяется как совокупность точек $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r) \in \tilde{X}$, для которых

$$\frac{j^{(k)}_\alpha - 1}{q} + t^{(k)}_\alpha \leqslant \sum_{\beta=1}^{r} a^{(k)}_{\alpha\beta}\tilde{x}_\beta < \frac{j^{(k)}_\alpha}{q} + t^{(k)}_\alpha, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r,$$

где числа $j^{(k)}_\alpha$ $(1 \leqslant i^{(k)}_\alpha \leqslant q)$ для рассматриваемого элемента фиксированы; связную в $\tilde{X}$ компоненту элемента получим, фиксируя также $t^{(k)}_\alpha$ (числа $j^{(k)}_\alpha$ и $t^{(k)}_\alpha$ — целые).

Пусть точки $\tilde{x}^{(i)} = (\tilde{x}^{(i)}_1, \ldots, \tilde{x}^{(i)}_r) \in \tilde{X}$ принадлежат одному и тому же элементу разбиения $S^{-1}\xi^n_T(q)$ $(i = 1, 2)$. Тогда существуют целые числа $j^{(k)}_\alpha$ $(1 \leqslant j^{(k)}_\alpha \leqslant q)$ и $t^{(k)}_{\alpha, i}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant r;\ 0 \leqslant k < n;\ i = 1, 2)$ такие, что

$$\frac{j^{(k)}_\alpha - 1}{q} + t^{(k)}_{\alpha, i} \leqslant \sum_{\beta=1}^{r} a^{(k)}_{\alpha\beta}\tilde{x}^{(i)}_\beta < \frac{j^{(k)}_\alpha}{q} + t^{(k)}_{\alpha, i} \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant r;\ 0 \leqslant k < n;\ i = 1, 2).$$

Применяя лемму 6 (здесь $a = 1$), получаем $t^{(k)}_{\alpha, 1} = t^{(k)}_{\alpha, 2}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant r;$ $0 \leqslant k < n)$, если $q > q_0 = \max\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \sum\limits_{\beta=1}^{r} |a_{\alpha\beta}|$. Это означает, что точки $\tilde{x}^{(1)}$ и

$\tilde{x}^{(2)}$ принадлежат одной и той же связной компоненте элемента разбиения $S^{-1}\xi_T^n(q)$ при $q > q_0$ и любом n.

Таким образом, любые две точки, принадлежащие одному и тому же элементу разбиения $S^{-1}\xi_T^n(q)$, при $q > q_0$ принадлежат одной и той же связной компоненте элемента разбиения $S^{-1}\xi_T^n(q)$, то есть при $q > q_0 = \max\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant r} \sum\limits_{\beta=1}^{r} |a_{\alpha\beta}|$ и любом n элементы разбиения $S^{-1}\xi_T^n(q)$ являются связными множествами в $\tilde{X}$.

3. Приступим теперь к вычислению величины $h(T, \xi(q)) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n(q))$. Ввиду того, что разбиения $\xi_T^n(q)$ имеют довольно сложную структуру, не будем находить точные значения величин $H(\xi_T^n(q))$, а укажем для $\frac{1}{n} H(\xi_T^n(q))$ минорантную и мажорантную последовательности, пределы которых легко находятся и оказываются равными. Эти последовательности получаются следующим образом: указывается разбиение $\eta_n \leqslant \xi_T^{n+1}(q)$ на элементы одинаковой меры v_n такое, что число элементов разбиения $\xi_T^{n+1}(q)$, содержащихся в одном элементе разбиения η_n, не превосходит $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — многочлен относительно n, один и тот же для всех элементов разбиения η_n.

Тогда, с одной стороны, число элементов разбиения $\xi_T^{n+1}(q)$ не будет превосходить $\frac{1}{v_n}\cdot\varphi(n)$ и, следовательно, $H(\xi_T^{n+1}(q)) \leqslant \lg\left[\frac{1}{v_n}\cdot\varphi(n)\right]$; с другой стороны, так как $\eta_n \leqslant \xi_T^{n+1}(q)$, то $H(\xi_T^{n+1}(q)) \geqslant H(\eta_n') = \lg\frac{1}{v_n}$. Таким образом,

$$\lg\frac{1}{v_n} \leqslant H(\xi_T^{n+1}(q)) \leqslant \lg\left[\frac{1}{v_n}\cdot\varphi(n)\right],$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n(q)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg\frac{1}{v_n}. \tag{2.4}$$

Определим η_n $(n \geqslant 0)$ как разбиение тора X на гиперпараллелепипеды-множества точек тора X, циклические координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$\frac{j_\alpha - 1}{q} \leqslant \sum_{k=1}^{r} a_{m_\alpha k}^{(n)} x_k < \frac{j_\alpha}{q} \quad (1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant s), \tag{2.5}$$

$$i_k - 1 \leqslant x_k < i_k \text{ при } k \neq k_\beta$$

где s — число собственных значений матрицы A, по модулю не меньших единицы; система номеров $\sigma = \{1 \leqslant m_1 < \ldots < m_s \leqslant r;\ 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant r\}$ выбрана так, чтобы в соотношении

$$A^n(\sigma) = C_\sigma \prod_{|\lambda_i|\geqslant 1} \lambda_i^n (1 + \alpha_n)$$

имели $C_\sigma \neq 0$ (см. лемму 4, здесь $a = 1$).

Тогда, так как $S^{-1}\xi_T^{n+1}(q)$ — разбиение на связные множества в $\tilde{X}$ при $q > q_0$, то $S^{-1}\eta_n \leqslant S^{-1}\xi_T^{n+1}(q)$ при $q > q_0$, откуда $\eta_n \leqslant \xi_T^{n+1}(q)$.

Объем v_n элемента разбиения η_n равен

$$v_n = \frac{1}{q^s} \left| \det (a^{(n)}_{m_\alpha k_\beta}) \right|^{-1} = \frac{1}{q^s \mid C_\sigma \mid} \left| \prod_{|\lambda_i| \geqslant 1} \lambda_i \right|^{-n} | 1 + \alpha_n |^{-1},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{v_n} = \lg \prod_{|\lambda_i| \geqslant 1} | \lambda_i | = \sum_{|\lambda_i| \geqslant 1} \lg | \lambda_i |.$$

4. Теперь осталось показать, что в каждом элементе построенного нами разбиения η_n содержится не более, чем $\varphi(n)$ элементов разбиения $\xi_T^{n+1}(q)$, где $\varphi(n)$ — многочлен относительно n, не зависящий от рассматриваемого элемента разбиения η_n.

Элементы разбиения $\xi_T^{n+1}(q)$ получаются путем рассечения элементов разбиения η_n гиперплоскостями

$$\sum_{k=1}^{r} a^{(m)}_{ik} x_k = \frac{j}{q}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \ 0 \leqslant m \leqslant n, \ j \text{ — целое.} \tag{2.6}$$

Каждая гиперплоскость (2.6), пересекающая гиперпараллелепипед (2.5) — элемент разбиения η_n, должна пересечь по крайней мере одно его ребро. Оценим число точек пересечения фиксированного ребра гиперпараллелепипеда (2.5) с гиперплоскостями (2.6).

Рассмотрим сначала ребро, соединяющее вершины

$$x^{(i)} = (x^{(i)}_1, \ x^{(i)}_2, \ \ldots, \ x^{(i)}_r) \quad (i = 1, 2),$$

где

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a^{(n)}_{m_\alpha k} x^{(1)}_k = \frac{j_\alpha}{q} & (1 \leqslant \alpha, \ \beta \leqslant s) \\ x^{(1)}_k = i_k \ \text{при} \ k \neq k_\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a^{(n)}_{m_{\alpha_0} k} x^{(2)}_k = \frac{j_{\alpha_0} - 1}{q}, \ \alpha_0 \text{ — фиксированное,} \quad 1 \leqslant \alpha_0 \leqslant s, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a^{(n)}_{m_\alpha k} x^{(2)}_k = \frac{j_\alpha}{q}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant s, \quad \alpha \neq \alpha_0, \\ x^{(2)}_k = i_k \ \text{при} \ k \neq k_\beta, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant s \end{cases}$$

Для $\Delta x_k = x^{(1)}_k - x^{(2)}_k$ получаем

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a^{(n)}_{m_{\alpha_0} k} \Delta x_k = \frac{1}{q}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a^{(n)}_{m_\alpha k} \Delta x_k = 0, \ 1 \leqslant \alpha \leqslant s, \ \alpha \neq \alpha_0, \\ \qquad \Delta x_k = 0 \ \text{при} \ k \neq k_\beta, 1 \leqslant \beta \leqslant s, \end{cases}$$

откуда

$$\Delta x_{k_\gamma} = \frac{1}{q} \frac{A_{m_{\alpha_0} k_\gamma}}{\det (a^{(n)}_{m_\alpha k_\beta})}, \ 1 \leqslant \gamma \leqslant s, \tag{2.7}$$

где $A_{m_{\alpha_0}, k_\gamma}$ — алгебраическое дополнение элемента $a^{(n)}_{m_{\alpha_0} k_\gamma}$ матрицы $(a^{(n)}_{m_\alpha k_\beta})$.

Пусть $y^{(l)} = (y_1^{(l)}, \ldots, y_r^{(l)})$ $(l = 1,2)$ — две соседние точки пересечения рассматриваемого ребра теми параллельными гиперплоскостями (2.6), которые получаются при фиксированных i и m $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 0 \leqslant m \leqslant n)$ и различных j,

$$\begin{cases} y_k^{(1)} = x_k^{(2)} + \tau_1 \Delta x_k \ (1 \leqslant k \leqslant r) \\ \sum\limits_{k=1}^{r} a_{ik}^{(m)} y_k^{(1)} = \dfrac{j}{q} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_k^{(2)} = x_k^{(2)} + \tau_2 \Delta x_k \\ \sum\limits_{k=1}^{r} a_{ik}^{(m)} y_k^{(2)} = \dfrac{j-1}{q}. \end{cases}$$

Тогда для $\Delta y_k = y_k^{(1)} - y_k^{(2)}$ имеем:

$$\begin{cases} \Delta y_k = \Delta\tau \cdot \Delta x_k, \ \text{где} \ \Delta\tau = \tau_1 - \tau_2, \\ \sum\limits_{k=1}^{r} a_{ik}^{(m)} \Delta y_k = \dfrac{1}{q}, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{1}{\Delta\tau} = q \sum_{k=1}^{r} a_{ik}^{(m)} \Delta x_k.$$

Учитывая, что $\Delta x_k = 0$ при $k \neq k_\beta$, а Δx_{k_β} определяются из (2.7) $(1 \leqslant \beta \leqslant s)$, получаем, что число интересующих нас точек пересечения при фиксированных i и m с точностью до единицы равно

$$\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{r} (\Delta x_k)^2}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{r} (\Delta y_k)^2}} = \frac{1}{|\Delta\tau|} = q \left| \sum_{k=1}^{r} a_{ik}^{(m)} \Delta x_k \right| = |\det (a_{m_\alpha k_\beta}^{(n)})|^{-1} \left| \sum_{\gamma=1}^{s} a_{ik_\gamma}^{(m)} A_{m_{\alpha_0}, k_\gamma} \right| =$$

$$= |\det (a_{m_\alpha k_\beta}^{(n)})|^{-1} |A_{\alpha_0, i}^{(n, m)}|. \tag{2.8}$$

Здесь $A_{\alpha_0, i}^{(n, m)}$ — определитель, полученный путем замены в $\det (a_{m_\alpha k_\beta}^{(n)})$ строки $a_{m_{\alpha_0} k_1}^{(n)}, \ldots, a_{m_{\alpha_0} k_s}^{(n)}$ строчкой $a_{ik_1}^{(m)}, \ldots, a_{ik_s}^{(m)}$.

Используя лемму 4 и неравенство (1.4) леммы 5 (здесь $a = 1$), получаем, что в (2.8) справа стоит величина, не превосходящая $M_1 n^{rs}$, где M_1 — константа, не зависящая от α_0, i, m и n. Так как при этом $1 \leqslant i \leqslant r$, $0 \leqslant m \leqslant n$, то число всех точек пересечения рассматриваемого ребра с гиперплоскостями (2.6) не превосходит $C_1 n^{s+1}$, где C_1 — постоянная, не зависящая от n.

Рассмотрим теперь ребро, соединяющее вершины $x^{(1)}$ и $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, \ldots$ $\ldots, x_r^{(3)})$, где

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{r} a_{m_\alpha k}^{(n)} x_k^{(3)} = \dfrac{j_\alpha}{q}, \ 1 \leqslant \alpha \leqslant s, \\ x_{k_0}^{(3)} = i_{k_0} - 1, \ k_0 \text{ — фиксированное, } k_0 \neq k_\beta, \ 1 \leqslant \beta \leqslant s \\ x_k^{(3)} = i_k, \ k \neq k_\gamma, \ 0 \leqslant \gamma \leqslant s. \end{cases}$$

Тогда для $\Delta x_k = x_k^{(1)} - x_k^{(3)}$ имеем:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\beta=1}^{s} a_{m_\alpha k_\beta}^{(n)} \Delta x_{k_\beta} + a_{m_\alpha k_0}^{(n)} = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant s, \\ \Delta x_{k_0} = 1, \\ \Delta x_k = 0 \ \text{при} \ k \neq k_\gamma, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant s, \end{cases}$$

откуда

$$\Delta x_{k_\gamma} = -[\det (a^{(n)}_{m_\alpha k_\beta})]^{-1} A_{k_\gamma, k_0} \quad (1 \leqslant \gamma \leqslant s),$$

где A_{k_γ, k_0} — определитель, полученный заменой k_γ-го столбца в $\det (a^{(n)}_{m_\alpha k_\beta})$ столбцом $a^{(n)}_{m_\alpha k_0}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant s)$. Для соседних точек пересечения $y^{(l)} = (y^{(l)}_1, \ldots$ $\ldots, y^{(l)}_r)$ $(l = 3,4)$ рассматриваемого ребра с параллельными гиперплоскостями (2.6) будем иметь:

$$\begin{cases} \Delta y_k = y^{(3)}_k - y^{(4)}_k = \Delta\tau \cdot \Delta x_k, \ 1 \leqslant k \leqslant r \\ \sum\limits_{k=1}^{r} a^{(m)}_{ik} \Delta y_k = \dfrac{1}{q}, \end{cases}$$

откуда при фиксированных i и m число точек пересечения (с точностью до единицы) будет равно

$$\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{r} (\Delta x_k)^2}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{r} (\Delta y_k)^2}} = \frac{1}{|\Delta\tau|} = q \left| \sum_{k=1}^{r} a^{(m)}_{ik} \Delta x_k \right| = q \, | a^{(m)}_{ik_0} -$$

$$- [\det (a^{(n)}_{m_\alpha k_\beta})]^{-1} \sum_{\gamma=1}^{s} a^{(m)}_{ik_\gamma} A_{k_\gamma, k_0} | = q \, | \det (a^{(n)}_{m_\alpha k_\beta}) |^{-1} A^{(n)}_{i, k_0, m}, \qquad (2.9)$$

где $A^{(n)}_{i, k_0, m}$ — определитель, получающийся из $\det (a^{(n)}_{m_\alpha k_\beta})$ добавлением слева столбца $a^{(m)}_{ik_0}, a^{(n)}_{m_1 k_0}, \ldots, a^{(n)}_{m_s k_0}$ и сверху строки $a^{(m)}_{ik_0}, a^{(m)}_{ik_1}, \ldots, a^{(m)}_{ik_s}$.

Используя неравенство (1.5) леммы 5 и лемму 4 (здесь $a = 1$), получаем, что существует константа M_2, не зависящая от i, k_0, m и n, такая, что правая часть равенства (2.9) не превосходит величины $M_2 n^{r(s+1)}$. Так как $1 \leqslant i \leqslant r$ и $0 \leqslant m \leqslant n$, то число точек пересечения рассматриваемого ребра с гиперплоскостями (2.6) не больше, чем $C_2 n^{r(s+1)+1}$, где C_2 — постоянная, не зависящая от n.

Всего, таким образом, гиперпараллелепипед (2.5) пересекает не более, чем $[sC_1 n^{rs+1} + (r-s) C_2 n^{r(s+1)+1}]\, 2^{r-1}$ гиперплоскостей (2.6).

Следовательно, элемент разбиения η_n — гиперпараллелепипед (2.5) — содержит не более чем $Dn^{r(r^2+1)}$ элементов разбиения $\xi^{n+1}_T(q)$-частей, на которые разбивается параллелепипед (2.5) при его пересечении гиперплоскостями (2.6). Постоянная D не зависит от чисел n, j, i и m, то есть от n и элемента разбиения η_n. Следовательно, в пункте 3 можно взять $\varphi(n) = Dn^{r(r^2+1)}$, что завершает доказательство теоремы.

Дополнение к теореме 1. *Пусть $N(\xi^n_T(q))$ — число элементов положительной меры разбиения $\xi^n_T(q)$. Тогда существует такое q_0, что при $q > q_0$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg N(\xi^n_T(q)) = h(T). \qquad (2.10)$$

Действительно, пусть $q_0 = \max\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \sum\limits_{\beta=1}^{r} |a_{\alpha\beta}|$. Как было показано при доказательстве теоремы 1, если $q > q_0$, то

$$h(T, \xi(q)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{v_n} = h(T), \qquad (2.11)$$

где v_n — мера элемента разбиения η_n.

С другой стороны, при $q > q_0$ имеем:

$$\frac{1}{v_n} \leqslant N(\xi_T^{n+1}(q)) \leqslant \frac{1}{v_n} \cdot \varphi(n),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg N(\xi_T^n(q)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{v_n}. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) следует (2.10).

§ 3. Обобщение теоремы 1

Пусть G — связная компактная коммутативная группа конечной размерности r и T — эндоморфизм этой группы на себя. Тогда группу G с мерой Хаара можно рассматривать как пространство Лебега, а T — как метрический эндоморфизм пространства G [7]. В настоящем параграфе будет дано обобщение теоремы 1 на один класс таких эндоморфизмов (теорема 2).

Группа характеров G^* группы G — (дискретная) коммутативная группа ранга r, все элементы которой, за исключением нуля, свободны (см. [8], § 38).

Рассмотрим произвольный эндоморфизм T^* группы G^*. Пусть q_1^*, $q_2^*, \ldots, q_r^*$ — некоторая максимальная линейно-независимая система элементов группы G^*; такую систему будем называть базисом группы G^*. Тогда для каждого $q^* \in G^*$ имеет место целочисленное соотношение

$$cq^* = \sum_{i=1}^{r} a_i q_i^* \qquad (c \neq 0) \tag{3.1}$$

Ввиду линейной независимости элементов q_i^* $(1 \leqslant i \leqslant r)$, рациональные числа $s_i(q^*) = \frac{a_i}{c}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ при фиксированном базисе определены по q^* однозначно. С другой стороны, из отсутствия в группе G^* элементов конечного порядка следует, что если $s_i(q^*) = s_i(q^{*1})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, то $q^* = q^{*1}$. Числа $s_i(q^*)$ будем называть координатами элемента q^* в базисе q_i^* $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Рассмотрим систему элементов $T^* q_k^*$.

Пусть $s_i(T^* q_k^*) = s_{ki}$, a — общий наименьший знаменатель рациональных чисел $s_{ki} = \frac{a_{ki}}{a}$, a_{ki} — целые числа $(1 \leqslant i,\ k \leqslant r)$. Тогда для произвольного $q^* \in G^*$ из (3.1) получаем

$$cT^* q^* = \sum_{i=1}^{r} a_i T^* q_i^*,$$

или

$$caT^* q^* = \sum_{i=1}^{r} a_i a T^* q_i^* = \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k=1}^{r} a_{ik} q_k^* = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} a_i a_{ik}\right) q_k^*,$$

откуда видно, что в фиксированном базисе $q_1^*, \ldots, q_r^*$ эндоморфизм T^* задается квадратной матрицей B порядка r вида

$$B = \frac{1}{a} A, \tag{3.2}$$

где A — квадратная целочисленная матрица (a_{ik}) порядка r.

При фиксированном базисе матрица B однозначно определяется по T^* и, наоборот, по матрице B однозначно восстанавливается эндоморфизм

T^*. Однако для фиксированного эндоморфизма T^* задающая его матрица B зависит от выбора базиса в G^*.

Если эндоморфизм T^* взаимно однозначен, то матрица B невырождена.

В дальнейшем будем рассматривать лишь такие эндоморфизмы, которые задаются в некотором базисе группы G^* матрицей $B = \frac{1}{a} A$, удовлетворяющей условию

$$(a, |\det A|) = 1. \tag{3.3}$$

(Для натуральных чисел a и b через (a, b) обозначаем их общий наибольший делитель).

Замечания: 1. Существуют эндоморфизмы T^*, для которых в любом базисе матрица, задающая эндоморфизм, не удовлетворяет условию (3.3). Таким, например, является автоморфизм группы векторов с рациональными координатами двумерного векторного пространства, который задается матрицей B с $\det B = \frac{1}{6}$.

2. Условие (3.3) не инвариантно относительно выбора базиса в G^*.

Теорема 2. *Пусть T — эндоморфизм связной компактной коммутативной группы конечной размерности r. Если сопряженный эндоморфизм группы характеров задается в некотором базисе матрицей $B = \frac{1}{a} A$, удовлетворяющей условию* (3.3), *то*

$$h(T) = \sum_{i=1}^{r} \lg \max\{a, |\mu_i|\} = r \lg a + \sum_{|\lambda_i|>1} \lg |\lambda_i|, \tag{3.4}$$

где λ_i — собственные значения матрицы B, $\mu_i = a\lambda_i$ — собственные значения матрицы A $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Замечание. Теорема 1 и теорема Л. М. Абрамова [3] об энтропии автоморфизма соленоидальной группы являются следствиями теоремы 2. Действительно, полагая $r = 1$ в теореме 2, получим результат Абрамова; теорему 1 можно получить, если взять в теореме 2 в качестве исходной группы тор размерности r (так как в этом случае эндоморфизм задается целочисленной матрицей, то $a = 1$ и условие (3.3) выполнено).

Доказательство теоремы 2 разобьем на несколько частей.

1. Пусть T^* — сопряженный эндоморфизм группы характеров G^* и в группе G^* выбран такой базис $q_1^*, q_2^*, \ldots, q_r^*$, что матрица $B = \frac{1}{a} A$, задающая эндоморфизм T^* в этом базисе, удовлетворяет условию (3.3).

Каждому элементу $q^* \in G^*$ поставим в соответствие вектор

$$(s_1(q^*), \quad s_2(q^*)), \ldots, s_r(q^*)),$$

где $s_i(q^*)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — координаты элемента q^* в выбранном базисе. Полученное при этом отображение группы G^* в r-мерное пространство $R^{(r)}$ векторов с рациональными координатами является изоморфизмом группы G^* на некоторую подгруппу R_0 группы $R^{(r)}$. Обозначим его через Q. Тогда $Q(q_i^*) = e_i$, где e_i — вектор из $R^{(r)}$ с координатами δ_{ij} (δ_{ij} — символ Кронекера), $1 \leqslant i \leqslant r$. Поэтому группа R_1 целочисленных векторов из $R^{(r)}$ содержится в R_0.

Имеем

$$R_1 \subset R_0 \subset R^{(r)}. \tag{3.5}$$

Умножение векторов из R_0 на матрицу B является эндоморфизмом QT^*Q^{-1} группы R_0.

2. Покажем, что из (3.3), (3.5) и из того, что в группе R_0 определено умножение на матрицу B, следует включение

$$R_a \subset R_0, \tag{3.6}$$

где R_a — группа векторов из $R^{(r)}$ с a-рично рациональными координатами.

Умножение векторов из $R^{(r)}$ на любую невырожденную матрицу r-го порядка C с рациональными элементами является автоморфизмом группы $R^{(r)}$. Обозначим его через S_c. Вместо $S_{\frac{1}{m}E}$, где E — единичная матрица порядка r, а m — натуральное число, будем писать $S_{\frac{1}{m}}$. Автоморфизм $S_{\frac{1}{m}}$ коммутирует с любым эндоморфизмом группы $R^{(r)}$.

Так как $S_{A^k}R_1$ $(k > 0)$ — подгруппа ранга r группы R_1 (матрица A^k — целочисленная, невырожденная), то в R_1 можно выбрать систему $x_i^{(k)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ линейно-независимых образующих и систему натуральных чисел $d_i^{(k)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ таких, что элементы $d_i^{(k)}x_i^{(k)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ составляют систему линейно-независимых образующих группы $S_{A^k}R_1$, причем $|\det A^k| = \prod_{i=1}^{r} d_i^{(k)}$ (см. [8], § 6).

Так как

$$S_{B^k}R_0 \subset R_0 \text{ и } R_1 \subset R_0,$$

то

$$S_{\frac{1}{a^k}} S_{A^k}R_1 = S_{B^k}R_1 \subset R_0,$$

откуда

$$\frac{d_i^{(k)}}{a^k} x_i^{(k)} = S_{\frac{1}{a^k}} d_i^{(k)} x_i^{(k)} \in R_0.$$

Из (3.3) следует, что $(a^k, d_i^k) = 1$, а потому существуют целые числа $l_i^{(k)}$ и $m_i^{(k)}$ такие, что $l_i^{(k)}a^k + m_i^{(k)}d_i^{(k)} = 1$. Получаем

$$\frac{1}{a^k} x_i^{(k)} = l_i^{(k)}x_i^{(k)} + m_i^{(k)}\frac{d_i^{(k)}}{a^k}x_i^{(k)} \in R_0 \qquad (k > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant r).$$

Следовательно, $S_{\frac{1}{a^k}} R_1 \subset R_0$ при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$, что дает $R_a \subset R_0$.

3. Введем обозначения:

$$G_0 = R_0,\ G_1 = R_a,\ G_m = S_{\frac{1}{m}} G_{m-1} = S_{\frac{1}{m!}} R_a,\ m \geqslant 2. \tag{3.7}$$

Тогда

$$G_m \subset G_{m+1}\ (m \geqslant 1),\ \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = R^{(r)},\ G_1 \subset G_0 \subset R^{(r)}. \tag{3.8}$$

Пусть Y — группа характера группы $R^{(r)}$. Компактную коммутативную группу Y с мерой Хаара можно рассматривать как пространство Лебега, а любой эндоморфизм группы Y на себя — как метрический эндоморфизм пространства Y. Пусть ζ_k — измеримое разбиение группы Y на классы смежности по аннулятору группы G_k в Y $(k \geqslant 0)$. Из (3.8) следует, что

$$\zeta_k \leqslant \zeta_{k+1}\ (k \geqslant 1),\ \prod_{k=1}^{\infty} \zeta_k = \varepsilon \text{ и } \zeta_1 \leqslant \zeta_0.$$

Фактор-пространство $Y_k = Y/\zeta_k$ в хорошо известном смысле является группой характеров группы G_k $(k \geqslant 0)$. Пусть P — автоморфизм группы Y, сопряженный автоморфизму S_B. Так как

$$S_B G_k = S_B S_{\frac{1}{k!}} R_a = S_{\frac{1}{k!}} S_B R_a \subset S_{\frac{1}{k!}} R_a = G_k \quad (k \geqslant 1)$$

и $S_B G_0 = S_B R_0 \subset R_0 = G_0$, то для автоморфизма P имеем $P^{-1}\zeta_k \leqslant \zeta_k$ $(k \geqslant 0)$, так что P индуцирует в Y_k некоторый эндоморфизм. Обозначим его через P_k $(k \geqslant 0)$.

В силу того, что $S_B S_{\frac{1}{k!}} = S_{\frac{1}{k!}} S_B$, эндоморфизмы P_k при $k \geqslant 1$ изоморфны эндоморфизму P_1, так что

$$h(P_k) = h(P_1) \quad (k \geqslant 1). \tag{3.9}$$

Из (3.9) и леммы 3 следует, что

$$h(P_1) = h(P). \tag{3.10}$$

Так как $\zeta_1 \leqslant \zeta_0 \leqslant \varepsilon$, то

$$h(P_1) \leqslant h(P_0) \leqslant h(P).$$

Учитывая (3.10), получаем

$$h(P_0) = h(P_1).$$

Групповые эндоморфизмы T и P_0 изоморфны, так как изоморфны сопряженные им эндоморфизмы группы характеров. Поэтому T и P_0 метрически изоморфны, откуда $h(T) = h(P_0)$. Таким образом получили

$$h(T) = h(P_1). \tag{3.11}$$

4. Так как сопряженные эндоморфизмы T^* и P_1^* задаются одной и той же матрицей B, то в связи с (3.11) достаточно доказать теорему 2 для случая, когда $R_0 = R_a$.

Итак, пусть T — эндоморфизм группы G, группа характеров которой G^* изоморфна группе R_a, и пусть сопряженный эндоморфизм T^* группы G^* описывается как умножение векторов из R_a на матрицу $B = \frac{1}{a} A$, удовлетворяющую условию (3.3). Докажем, что тогда имеет место равенство (3.4).

Характеры $\varphi \in G^*$ будем записывать с индексами-векторами из R_a, которым они изоморфны. Тогда

$$\varphi_\tau (T^k g) = (T^*)^k \varphi_\tau (g) = \varphi_{\tau B^k}(g), \quad g \in G, \quad \varphi \in G^*, \quad \tau = Q\varphi \in R_a.$$

Каждый ненулевой характер $\varphi_\tau(g)$ есть гомоморфизм пространства Лебега G на пространство Лебега E — отрезок $[0, 1)$ с обычной мерой Лебега. При фиксированном $\tau \in R_a$ каждому измеримому разбиению ζ пространства E соответствует измеримое разбиение $\xi = \varphi_\tau^{-1}(\zeta)$ пространства G.

Для натурального числа q обозначим через $\zeta(q)$ разбиение отрезка E на q равных отрезков $\left[\frac{j-1}{q}, \frac{j}{q}\right)$, $1 \leqslant j \leqslant q$, а через $\xi(q)$ — разбиение $\prod_{\alpha=1}^{r} \varphi_{e_\alpha}^{-1}(\zeta(q))$ пространства G. Тогда элементом разбиения $T^{-k}\xi(q)$ является множество всех тех $g \in G$, для которых

$$\frac{j_\alpha - 1}{q} \leqslant \varphi_{e_\alpha}(T^k g) < \frac{j_\alpha}{q},$$

где j_α $(1 \leqslant j_\alpha \leqslant q)$ — фиксированные целые числа, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$.

Пусть $a^{(k)}_{\alpha\beta}$ — элементы матрицы A^k, $a^{(1)}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$. Так как для натурального числа n при $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\varphi_{e_\alpha}(T^k g) = \varphi_{e_\alpha B^k}(g) = \varphi_{\frac{1}{a^k}(a^{(k)}_{\alpha 1},\, \ldots,\, a^{(k)}_{\alpha r})}(g) = a^{n-k}\sum_{\beta=1}^{r} a^{(k)}_{\alpha\beta}\varphi_{\frac{1}{a^n}e_\beta}(g) \pmod 1,$$

то элементом разбиения $\xi^{n+1}_T(q) = \prod_{k=0}^{n} T^{-k}\xi(q)$ является множество всех тех $g \in G$, для которых

$$\frac{j^{(k)}_\alpha - 1}{q} + t^{(k)}_\alpha \leqslant a^{n-k}\sum_{\beta=1}^{r} a^{(k)}_{\alpha\beta}\varphi_{\frac{1}{a^n}e_\beta}(g) < \frac{j^{(k)}_\alpha}{q} + t^{(k)}_\alpha,$$

где целые числа $j^{(k)}_\alpha$ $(1 \leqslant j^{(k)}_\alpha \leqslant q)$ — фиксированы, $t^{(k)}_\alpha$ — произвольные целые числа, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Обозначим через $\Phi_n(g)$ гомоморфизм группы G на группу векторов r-мерного тора X, который задается равенством

$$\Phi_n(g) = (x_1, x_2, \ldots, x_r), \quad x_\beta = \varphi_{\frac{1}{a^n}e_\beta}(g), \quad 1 \leqslant \beta \leqslant r.$$

Тогда $\Phi_n(g)$ — метрический гомоморфизм пространства Лебега G на пространство Лебега X. Если $\zeta^n(q)$ — разбиение куба $\widetilde{X} = \{0 \leqslant \widetilde{x}_\beta < 1,\ 1 \leqslant \beta \leqslant r\}$, элементы которого определяются неравенствами

$$\frac{j^{(k)}_\alpha - 1}{q} + t^{(k)}_\alpha \leqslant a^{n-k}\sum_{\beta=1}^{r} a^{(k)}_{\alpha\beta}\widetilde{x}_\beta < \frac{j^{(k)}_\alpha}{q} + t^{(k)}_\alpha,$$

где целые числа $j^{(k)}_\alpha$ $(1 \leqslant j^{(k)}_\alpha \leqslant q)$ — фиксированы, $t^{(k)}_\alpha$ — произвольные целые числа, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, $0 \leqslant k \leqslant n$ и S — естественное отображение куба $\widetilde{X}$ на тор X, то

$$\xi^{n+1}_T(q) = \Phi_n^{-1}S\zeta^n(q).$$

Условие (3.3) дает возможность применить лемму 6, из которой следует, что элементами разбиения $\zeta^n(q)$ при

$$q > q_0 = a - 1 + \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant r}\sum_{\beta=1}^{r}|a_{\alpha\beta}|$$

являются связанные множества единичного куба $\widetilde{X}$.

Покажем, что при $q > q_0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\zeta^n(q)) = \sum_{i=1}^{r}\lg\max\{a, |\mu_i|\}, \tag{3.12}$$

где μ_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — собственные значения матрицы A. Для этого выберем систему $\sigma = \{1 \leqslant m_1 < \ldots < m_s \leqslant r;\ 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant r\}$ номеров строк и столбцов; порядок которой s равен числу $s(a)$ собственных значений матрицы A по модулю не меньших a, такую, чтобы

$$A^n(\sigma) = \det\left(a^{(n)}_{m_\alpha k_\beta}\right) = C_\sigma\prod_{|\mu_i|\geqslant a}\mu_i^n(1+\alpha_n), \quad C_\sigma \neq 0.$$

Такая система σ существует по лемме 4.

Рассмотрим разбиение η_n тора X на гиперпараллелепипеды одинаковой меры, определяемое в циклических координатах неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{j_\alpha - 1}{q} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{r} a_{m_\alpha k}^{(n)} x_k < \dfrac{j_\alpha}{q}, & 1 \leqslant \alpha \leqslant s, \\ \dfrac{i_k - 1}{qa^n} \leqslant x_k < \dfrac{i_k}{qa^n}, & k \neq k_\beta, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant s, \end{cases}$$

где j_α и i_k — фиксированные целые числа для элемента разбиения η_n. Мера v_n элемента разбиения η_n равна

$$v_n = \frac{1}{q^r a^{(r-s)n}} \left| \det \left(a_{m_\alpha k_\beta}^{(n)}\right) \right|^{-1} = \frac{1}{q^r \, | C_\sigma |} \left| a^{r-s} \prod_{|\mu_i| \geqslant a} \mu_i \right|^{-n} |1 + \alpha_n|^{-1},$$

откуда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\eta_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{v_n} = (r - s) \lg a + \lg \prod_{|\mu_i| \geqslant a} |\mu_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lg \max \{a, \ |\mu_i|\}.$$

Из того, что $\zeta^n(q)$ при $q > q_0$ является разбиением куба $\tilde{X}$ на связные множества, следует, что $\eta_n \leqslant S\zeta^n(q)$ при $q > q_0$. Поэтому $H(\eta_n) \leqslant \leqslant H(\zeta^n(q))$ и

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\zeta^n(q)) \geqslant \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\eta_n) = \sum_{i=1}^{r} \lg \max \{a, \ |\mu_i|\}. \tag{3.13}$$

С другой стороны, пользуясь леммами 4 и 5, аналогично тому, как это сделано в § 2, можно показать, что разбиение $S\zeta^n(q)$ получается путем подразбиения каждого элемента разбиения η_n не более, чем на $\varphi(n)$ частей, где $\varphi(n)$ — некоторый многочлен от n, не зависящий от элемента разбиения η_n. В связи с этим число элементов разбиения $\zeta^n(q)$ не превосходит величины $\frac{1}{v_n} \cdot \varphi(n)$ и потому

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\zeta^n(q)) \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \lg \left[\frac{1}{v_n} \cdot \varphi(n)\right] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{v_n} = \sum_{i=1}^{r} \lg \max \{a, \ |\mu_i|\}. \tag{3.14}$$

Неравенства (3.13) и (3.14) дают равенство (3.12).

Так как $\xi_T^{n+1}(q) = \Phi_n^{-1} S\zeta^n(q)$ и Φ_n — гомоморфизм пространства G на пространство X, а S — изоморфизм $\tilde{X}$ на X, то $H(\xi_T^{n+1}(q)) = H(\zeta^n(q))$ и, следовательно,

$$h(T, \ \xi(q)) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n(q)) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\zeta^n(q)) = \sum_{i=1}^{r} \lg \max \{a, \ |\mu_i|\} \tag{3.15}$$

при $q > q_0 = a - 1 + \max\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \sum\limits_{\beta=1}^{r} |a_{\alpha\beta}|$.

5. Пусть теперь $p > 1$ — любое натуральное число и $\xi_k = \xi(p^k)$. Ясно, что $\xi_k \leqslant \xi_{k+1}$ $(k \geqslant 1)$. Покажем, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} (\xi_k)_T^{-} = \varepsilon. \tag{3.16}$$

Тогда из (3.15) и леммы 2 следует (3.4).

Равенство (3.16) будет доказано, если для любых двух точек $g^{(1)} \neq g^{(2)}$, $g^{(i)} \in G$ $(i = 1,2)$ укажем такие натуральные числа k и n, что $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ принадлежат различным элементам разбиения

$$(\xi_k)_T^n = \prod_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi(p^k).$$

Векторы $\frac{1}{a^n} e_\alpha$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; 1 \leqslant \alpha \leqslant r)$ составляют систему образующих группы R_a. Поэтому для $g^{(1)} \neq g^{(2)}$ найдутся такие n_0 и α_0, что $\varphi_{\frac{1}{a^{n_0}} e_{\alpha_0}}(g^{(1)}) \neq \varphi_{\frac{1}{a^{n_0}} e_{\alpha_0}}(g^{(2)})$.

Обозначим через $\tilde{x}_{\alpha_0}^{(i)} = \varphi_{\frac{1}{a^{n_0}} e_{\alpha_0}}(g^{(i)})$, $\tilde{x}^{(i)} = (0, \ldots, \tilde{x}_{\alpha_0}^{(i)}, \ldots, 0)$, $i = 1,2$. Тогда легко найти такое k_0, что $\tilde{x}^{(1)}$ и $\tilde{x}^{(2)}$ принадлежат различным элементам разбиения $\zeta^{n_0}(p^{k_0})$. Это значит, что $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ принадлежат различным элементам разбиения $\xi_T^{n_0+1}(p^{k_0}) = (\xi_{k_0})_T^{n_0+1}$, ибо

$$\xi_T^{n_0+1}(p^{k_0}) = \Phi_{n_0}^{-1} S \zeta^{n_0}(p^{k_0}).$$

Таким образом, имеет место (3.16) и доказательство теоремы 2 завершено.

§ 4. Некоторые метрические свойства эндоморфизмов конечномерного тора

В этом параграфе изучаются метрические свойства эндоморфизмов конечномерного тора, связанные с понятием энтропии. Предварительно будут доказаны две общие теоремы об эндоморфизмах пространства Лебега.

Теорема 3. *Эндоморфизм (автоморфизм) с конечной энтропией в том и только в том случае является эндоморфизмом (автоморфизмом) Бернулли, если он обладает образующей $\xi \in Z$ такой, что*

$$h(T) = H(\xi). \tag{4.1}$$

(Для автоморфизмов эта теорема есть в обзорной статье В. А. Рохлина [5] § 11.2).

Необходимость условия (4.1) очевидна. Докажем его достаточность. Так как ξ — образующая относительно T, то $h(T) = h(T, \xi)$.

Нам нужно показать, что при любом натуральном n разбиения ξ, $T^{-1}\xi, \ldots, T_\xi^{-n}$ взаимно независимы. В силу (4.1)

$$h(T) = h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n) = \inf_n \frac{1}{n} H(\xi_T^n) = H(\xi),$$

откуда при любом натуральном n имеем

$$H(\xi_T^n) \geqslant nH(\xi).$$

С другой стороны,

$$H(\xi_T^n) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} H(T^{-k}\xi) = nH(\xi).$$

Таким образом,

$$H(\xi_T^n) = nH(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} H(T^{-k}\xi),$$

что возможно тогда и только тогда, когда разбиения $T^{-k}\xi$, $0 \leqslant k < n$, взаимно независимы [9].

Теорема 4. *Пусть T — эндоморфизм пространства Лебега. Если $0 < H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) < \infty$ и $T^{-1}\varepsilon$ обладает независимым дополнением ξ, то фактор-эндоморфизм T_ζ эндоморфизма T по $\zeta = \xi_T^-$ является эндоморфизмом Бернулли и*

$$h(T_\zeta) = H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon). \tag{4.2}$$

Доказательство. Так как ξ — независимое (измеримое) дополнение для $T^{-1}\varepsilon$, то $\xi T^{-1}\varepsilon = \varepsilon$ и

$$H(\xi) = H(\xi/T^{-1}\varepsilon) = H(\xi T^{-1}\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) = H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) < \infty,$$

а потому ξ — конечное, либо счетное измеримое разбиение (mod 0). Следовательно, ξ является образующей относительно эндоморфизма T_ζ, $\zeta = \xi_T^-$ и $\xi \in Z$.

С одной стороны, имеем

$$h(T_\zeta) = h(T, \xi) = H(\xi/T^{-1}\xi_T^-) \geqslant H(\xi/T^{-1}\varepsilon) = H(\xi).$$

С другой стороны,

$$h(T_\zeta) = h(T, \xi) \leqslant H(\xi).$$

Таким образом,

$$h(T_\zeta) = H(\xi) = H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon). \tag{4.3}$$

Из (4.3) и теоремы 3 следует, что фактор-эндоморфизм T_ζ — эндоморфизм Бернулли и имеет место (4.2).

Пусть теперь X — тор конечной размерности r, T — его эндоморфизм, A — целочисленная невырожденная матрица порядка r, которой представляется эндоморфизм T относительно некоторой системы циклических координат в X, и пусть $\delta = |\det A|$.

Теорема 5.

(*a*) $$H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) = \lg \delta.$$

(*b*). *Если эндоморфизм T не является автоморфизмом, то у него существует фактор-эндоморфизм T_ζ, являющийся эндоморфизмом Бернулли с энтропией*

$$h(T_\zeta) = H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) \tag{4.4}$$

и пространством состояний, составленным из δ точек одинаковой меры.

(*c*). *Если все собственные значения матрицы A по модулю не меньше единицы, то указанный в (b) фактор-эндоморфизм T_ζ таков, что*

$$h(T_\zeta) = h(T). \tag{4.5}$$

(*d*). *Если эндоморфизм T не является автоморфизмом и матрица A имеет по крайней мере одно собственное значение, по модулю меньше единицы,* то имеет место *строгое неравенство*

$$h(T) > H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) \tag{4.6}$$

и потому T не обладает образующей $\xi \in Z$.

(*e*). *Если T — эргодический эндоморфизм и все собственные значения матрицы A по модулю не меньше единицы, то T — точный эндоморфизм.*

Доказательство. (*a*) Если $\delta = 1$, то T — автоморфизм и равенство (*a*) очевидно. Если же $\delta > 1$, то для разбиения $T^{-1}\varepsilon$ легко построить независимое дополнение ξ, которое состоит из δ элементов одинаковой меры. Поэтому

$$H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) = H(\xi T^{-1}\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) = H(\xi/T^{-1}\varepsilon) = H(\xi) = \lg \delta.$$

(b). При $\delta > 1$ разбиение $T^{-1}\varepsilon$ обладает независимым дополнением ξ, которое состоит из δ элементов одинаковой меры и $0 < H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) = \lg\delta < < \infty$.

Таким образом, если эндоморфизм T не является автоморфизмом ($\delta > 1$), то выполнены условия теоремы 4 и потому фактор-эндоморфизм T_ζ эндоморфизма T по $\zeta = \zeta_T^-$ является эндоморфизмом Бернулли и имеет место (4.4).

Так как точками пространства состояний эндоморфизма Бернулли T_ζ являются элементы разбиения ξ, то пространство состояний составлено из δ точек одинаковой меры.

(c). Имеем, согласно (a) и (b),

$$h(T_\zeta) = H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) = \lg\delta.$$

С другой стороны, если λ_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — собственные значения матрицы A, то по теореме 1

$$h(T) = \sum_{|\lambda_i| \geqslant 1} \lg|\lambda_i| \geqslant \sum_{i=1}^{r} \lg|\lambda_i| = \lg\delta = H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon),$$

причем равенство $h(T) = H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon)$ имеет место тогда и только тогда, если $|\lambda_i| \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Таким образом, если все собственные значения матрицы A по модулю не меньше единицы, то

$$h(T) = H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon) = h(T_\zeta).$$

(d). Если по крайней мере одно собственное значение матрицы A по модулю меньше единицы, то $h(T) > H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon)$.

С другой стороны, если эндоморфизм T не является автоморфизмом ($\delta > 1$) и обладает образующей $\xi \in Z$, то $h(T) = H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon)$ (см. [6], § 2.8).

e). Пусть X^* — группа характеров группы X и T^* — эндоморфизм группы X^*, сопряженный эндоморфизму T. Из общей теоремы (см. [6], § 2.9) следует, что эндоморфизм T точен в том и только в том случае, если пересечение $\bigcap_{n=0}^{\infty} (T^*)^n X^* = X_0^*$ есть нулевая подгруппа группы X^*.

Пусть эндоморфизм T удовлетворяет условиям пункта (e) теоремы 5, но не точен. Тогда X_0^* — ненулевая подгруппа группы X^* с конечным числом независимых образующих, у которой все элементы, кроме нуля, свободны, и $T^*X_0^* = X_0^*$.

Так как T — эндоморфизм X на себя, то эндоморфизм T^* взаимнооднозначен. Таким образом, T_0 индуцирует в X_0^* автоморфизм.

Из теоремы двойственности Л. С. Понтрягина следует, что T индуцирует автоморфизм в фактор-группе $X_0 = X/(X_0^*)'$ тора X по аннулятору $(X_0^*)'$ группы X_0^* в X. Обозначим его через T_{X_0}. Легко видеть, что группа X_0 является тором, размерность которого равна рангу группы X_0^*, а T_{X_0} — автоморфизм этого тора.

Так как по условию T — эргодический эндоморфизм, то T_{X_0} — эргодический автоморфизм тора X_0. Собственные значения матрицы A_{X_0}, описывающей автоморфизм T_{X_0} в некоторой системе циклических координат в X_0 являются собственными значениями матрицы A. Так как по условию матрица A не имеет собственных значений по модулю меньших единицы, то все собственные значения матрицы A_{X_0} по модулю не меньше единицы.

С другой стороны, произведение всех собственных значений равно определителю и поэтому у матрицы A_{X_0} собственных значений по модулю меньших единицы может не быть только в случае, если все собственные значения по модулю равны единице ($|\det A_{X_0}| = 1$, ибо T_{X_0} — автоморфизм). Но тогда они являются корнями из единицы и автоморфизм T_{X_0} не эргодичен [7]. Получили противоречие в связи с допущением, что эндоморфизм T не точен.

Замечания. 1. Фактор-эндоморфизм T_ζ, указанный в пунктах (b), (c) теоремы 5, вообще говоря, не совпадает с эндоморфизмом T (mod 0), даже если T — точный эндоморфизм. Точнее говоря, независимое дополнение ξ для $T^{-1}\varepsilon$ может не быть образующей относительно T.

Действительно, пусть T — эндоморфизм двумерного тора X, который в некоторой системе циклических координат в X представляется матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда $\det A = 4 > 1$ и собственные значения матрицы A равны 2. Следовательно, T — эргодический эндоморфизм, удовлетворяющий условиям пункта (e) теоремы 5 и потому он точен. Тем не менее разбиение тора ξ (2) (см. § 2, п. 1) есть независимое дополнение для $T^{-1}\varepsilon$, но не является образующей относительно T.

2. Среди эндоморфизмов, удовлетворяющих условиям пункта (d) теоремы 5, имеются точные. Такие, например, эндоморфизмы двумерного тора, у которых $\delta > 1$ и матрица A имеет одно собственное значение, по модулю меньшее единицы (см. [6], § 2.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизма. «Докл. АН СССР», **124**, № 4 (1959).
2. Я. Г. Синай. О понятии энтропии динамической системы. «Докл. АН СССР», **124**, № 4, (1959).
3. Л. М. Абрамов. Энтропия автоморфизма соленоидальной группы. «Теория вероятностей и ее применение», **4**, № 3 (1959).
4. В. А. Рохлин. Об энтропии метрического автоморфизма. «Докл. АН СССР», **124**, № 5 (1959).
5. В. А. Рохлин. Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой. «Усп. матем. наук», **25**, вып. 4 (1960).
6. В. А. Рохлин. Точные эндоморфизмы пространства Лебега. «Изв. АН СССР, серия матем.», **25**, № 4 (1961).
7. В. А. Рохлин. Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп. «Изв. АН СССР, серия матем.», **13**, 329—340 (1949).
8. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954.
9. А. Я. Хинчин. Понятие энтропии в теории вероятностей. «Усп. матем. наук», вып. 3, 3—20 (1953).
10. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц, М., 1953.
11. А. Л. Генис. Метрические свойства эндоморфизмов r-мерного тора. «Докл. АН СССР», **138**, № 5 (1961).