УДК 517.9

А. М. БЛОХ, М. Ю. ЛЮБИЧ

О ТИПИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОТРЕЗКА

1. Формулировка результатов. Рассмотрим кусочно-монотонное гладкое преобразование f отрезка $[0, 1]$. Через f^n обозначим его n-ю итерацию. В настоящее время имеется детальная *топологическая* картина динамики полученной одномерной динамической системы [1, 2]. В частности, описано асимптотическое поведение траекторий $\{f^n x\}_{n=0}^{\infty}$ для массивного* множества начальных точек x. Иначе обстоит дело в понимании *измеримой* динамики, т. е. типичных** свойств траектории по отношению к мере Лебега λ. Здесь достигнута ясность только в случае унимодальных преобразований, т. е. имеющих одну критическую точку (подробная библиография приведена в работе [3]). Настоящая работа содержит продвижения в общей ситуации.

Следуя Милнору [4], *аттрактором* мы будем называть такой компакт $A \subset [0, 1]$, что подмножество $\rho(A) = \{x : \omega(x) \subset A\}$ имеет положительную λ-меру и, более того, $\lambda(\rho(A) \setminus \rho(A')) > 0$ для любого собственного замкнутого подмножества $A' \subset A$. Аттрактор называется *минимальным*, если он не содержит меньших аттракторов, и *неразложимым*, если он не является объединением двух меньших аттракторов.

* Множество называется *массивным*, если его дополнение имеет первую категорию по Бэру.

** Свойство называется *типичным*, если оно выполняется почти всюду по мере Лебега.

Пусть Λ — класс преобразований $f: [0, 1] \to [0, 1]$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $f \in C^3[0, 1]$, 2) f имеет конечное число критических точек, 3) f имеет отрицательный шварциан: $Sf \equiv f''' / f' - \frac{3}{2} (f''/f')^2 < 0$ вне критических точек.

Отрезок $I \subset [0,1]$ называется *периодическим*, если $f^p I \subset I$; при этом $\bigcup\limits_{k=0}^{p-1} f^k I$ называется *циклом отрезков.* Если дополнительно преобразование $f^p: I \to I$ топологически транзитивно (т. е. имеет плотную траекторию), то I называется *транзитивным (периодическим)* отрезком. Через $\omega(x)$ обозначим предельное множество траектории $\{f^n x\}_{n=0}^{\infty}$. Точка x называется *рекуррентной*, если $x \in \omega(x)$. Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.*

Теорема. *Пусть $f \in \Lambda$. Тогда для п. в. $x \in [0, 1]$ имеет место одна из следующих возможностей:*

а) $\omega(x)$ *совпадает с циклом* $\{f^k \alpha\}_{k=0}^{p-1}$ *периодической точки* α;

б) $\omega(x)$ *совпадает с циклом* $\bigcup\limits_{k=0}^{p-1} f^k I$ *транзитивного отрезка* I;

в) $\omega(x)$ *совпадает с предельным множеством* $\omega(c)$ *некоторой рекуррентной критической точки* c.

Следующий результат дает ответ на некоторые вопросы Милнора [4]:

Следствие 1. а) *Преобразование $f \in \Lambda$ с d критическими точками имеет не более $d + 2$ неразложимых аттракторов.* б) *Пусть f — унимодальное преобразование с экстремумом c, $f(c) = 1$, $f(1) = 0$. Тогда f имеет единственный аттрактор A и $\omega(x) = A$ для п. в. x.*

Интервал $J \subset [0, 1]$ называется *гомтервалом*, если 1) итерации f^n не имеют критических точек внутри J ($n = 0, 1, 2, \ldots$); 2) $\omega(x)$ бесконечно при $x \in J$ (определение не вполне стандартно — см. [3]).

Следствие 2. *Предположим, что любая рекуррентная критическая точка функции $f \in \Lambda$ является периодической. Тогда а) f не имеет гомтервалов;* б) *каждый минимальный аттрактор является циклом периодической точки или транзитивного отрезка; в) для п. в. x множество $\omega(x)$ совпадает с некоторым минимальным аттрактором.*

Отметим, что результаты настоящей работы имеют прототип в теории комплексно-аналитических динамических систем, который послужил для нас отправной точкой [5]. Вообще, отрицательный шварциан в теории преобразований отрезка является адекватным аналогом комплексной аналитичности.

2. Обозначения, терминология и предварительные сведения. Через $\mathbf{N}$ мы, как обычно, обозначаем натуральный ряд $\{0, 1, 2, \ldots\}$. *Интервалами* мы будем называть как открытые, так и замкнутые, и полуоткрытые интервалы. Через $(\alpha, \beta)_0$ мы будем обозначать (открытый) интервал с концами в точках α, β, не предполагая, что $\alpha < \beta$.

---

* В конце статьи будет дана более полная формулировка.

Пусть $C = \{c : f'(c) = 0\}$ — множество критических точек функции f. Под *монотонностью* функции f на интервале I будем понимать монотонность по первой производной: $f'(x) \neq 0$ внутри I. *Интервалы монотонности* функции f — это замкнутые интервалы, на которые множество C разбивает отрезок $[0, 1]$. Через $C_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}C$ обозначим множество критических точек функции f^n; через $H_n(x)$ — интервал монотонности этой функции, содержащий точку x; $M_n(x) = f^n H(x)$. Концами интервалов $M_n(x)$ являются точки множества $\bigcup_{k=1}^{n} f^k(C \cup \{0, 1\})$. Центральную роль в дальнейшем играет функция $r_n(x)$ — расстояние от точки $f^n x$ до ближайшего конца интервала $M_n(x)$.

Пусть α — периодическая точка функции f с периодом p, $\underline{\alpha} = \{f^k\alpha\}_{k=0}^{p-1}$ — ее цикл. Число $s = (f^p)'(\alpha)$ называется *мультипликатором*. Тогда α (цикл $\underline{\alpha}$) называется *притягивающей*, если $|s| < 1$; *нейтральной*, если $|s| = 1$; *отталкивающей*, если $|s| > 1$.

Теорема Зингера (см. [3, § II, 4]). *Пусть* $\underline{\alpha} = \{f^k\alpha\}_{k=0}^{p-1}$ — *притягивающий или нейтральный цикл функции* $f \in \Lambda$. *Тогда существует такое* i *и такая точка* $c \in C \cup \{0, 1\}$, *что* $f^n x \to \alpha$ $(n \to \infty)$ *при* $x \in [c, f^i\alpha]$.

Множество X называется *блуждающим*, если $f^n X \cap X = \varnothing$ $(n \geqslant 1)$ и *сильно блуждающим*, если $f^n X \cap f^m X = \varnothing$ $(n > m \geqslant 0)$. Точка x называется *блуждающей*, если у нее есть блуждающая окрестность, и *неблуждающей* — в противном случае. Множество неблуждающих точек преобразования f обозначим через $\Omega = \Omega(f)$. Структура множества Ω для произвольного непрерывного отображения отрезка детально описана в [6]. Нам понадобится следующий факт.

Предложение 1. *Пусть* $f \in \Lambda$. *Тогда* а) *множество* $\overline{\operatorname{int} \Omega(f)}$ *является объединением транзитивных отрезков;* б) *каждый цикл* L *транзитивных отрезков содержит критическую точку;* в) *для любого интервала* $I \subset L$ *существует такое* N, *что* $\bigcup_{k=0}^{N} f^k I = L$.

Через $H_\infty(x)$ обозначим интервал $\bigcap_{n=0}^{\infty} H_n(x)$ (возможно, состоящий из одной точки x). Это максимальный интервал, на котором монотонны все функции f^n $(n = 0, 1, \ldots)$. Очевидно, что $fH_\infty(x) \subset H_\infty(fx)$, и если концы интервала $H_\infty(x)$ не являются прообразами критических точек и отличны от точек 0, 1, то $fH_\infty(x) = H_\infty(fx)$. Рассмотрим последовательность интервалов $J_n = H_\infty(f^n x)$. Возможны два случая: 1) $J_{n+p} \subset J_n$ при некоторых n, $p > 1$. Тогда все траектории из интервала J_0 сходятся к некоторому притягивающему или нейтральному циклу; 2) $J_n \cap J_m = \varnothing$ $(n > m \geqslant 0)$. В этом случае J_0 является гомтервалом. Такие гомтервалы являются максимальными: любой гомтервал J содержится в максимальном: $J \subset H_\infty(x)$ $(x \in J)$. Таким образом, любой гомтервал J сильно блуждает и, значит, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(f^n J) \leqslant 1$. Поэтому предельное множество $\omega(x)$ не зависит от $x \in J$; обозначим его через $\omega(J)$. С деталями читатель может познакомиться по [3, § II, 5].

Сформулируем теперь те свойства функций с отрицательным шварцианом, которыми мы будем фактически пользоваться (см. [3, § II, 4]).

1) *Если* $f \in \Lambda$, *то* $f^n \in \Lambda$.

2) *Пусть* $I = [\alpha, \beta]$, $\varphi : I \to J$, $S\varphi < 0$, $\varphi^{-1} : J \to I$ — *обратная функция. Тогда функция* $|(\varphi^{-1})'(y)|$ *выпукла на интервале* J (см. [3, с. 160]).

Из свойства 2) легко вытекает следующее:

3) Принцип минимума: $|\varphi'(x)| \geqslant \min(|\varphi'(\alpha)|, |\varphi'(\beta)|)$.

4) *Пусть* Y_1, Y_2 — *измеримые множества в* J, $\sup Y_1 \leqslant y \leqslant \inf Y_2$. *Тогда*

$$|(\varphi^{-1})'(y)| \leqslant \max_{i=1,2} \lambda(\varphi^{-1} Y_i)/\lambda(Y_i). \tag{1}$$

5) *Пусть интервал* J *разбит на интервалы* J^- *и* J^+ *точкой* y; E — *измеримое подмножество в* J, $0 < \eta < 1$. *Тогда существует такой интервал* $K_\eta = [y, z_\eta]_0$, *содержащийся в некотором* J^γ, $\gamma \in \{+, -\}$, *для которого*

$$\frac{\lambda(\varphi^{-1}(E \cap K_\eta))}{\lambda(\varphi^{-1}K_\eta)} \geqslant \eta \frac{\lambda(E \cap J^\gamma)}{\lambda(J^\gamma)}. \tag{2}$$

Поскольку это важное для динамики свойство не отмечено в литературе, мы приведем доказательство.

Лемма 1. *Рассмотрим две системы масс* m_k *и* M_k, *сосредоточенных в точках* y_k *и* $\tilde{y}_k$ *соответственно* ($k = 1, \ldots, n$). *Пусть* c — *центр масс первой системы*, C_l — *центр первых* l *масс второй системы. Предположим, что* $\tilde{y}_k \geqslant y_k$ *и* $M_{k+1}/M_k \geqslant m_{k+1}/m_k$. *Тогда существует* l, *для которого* $C_l \geqslant c$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{y_k\}_{k=1}^n$ монотонно убывает. Тогда $y_1 > c$, и можно положить $l = 1$. В противном случае найдется k, для которого $y_{k+1} \geqslant y_k$. Заменим пару масс m_k, m_{k+1} на суммарную массу $m = m_k + m_{k+1}$, сосредоточенную в центре масс $y = (m_k y_k + m_{k+1} y_{k+1})/(m_k + m_{k+1})$. Аналогично поступим с массами M_k, M_{k+1}. Мы получим два набора из $(n - 1)$ масс, удовлетворяющих условиям леммы. Индукция завершает доказательство.

Доказательство свойства 5). Так как функция $|(\varphi^{-1})'|$ выпукла, то она монотонна на некотором интервале J^γ. Заметим теперь, что неравенство (2) инвариантно относительно аффинных преобразований интервалов I, J. Поэтому можно считать, что $y = 0$, $J^\gamma = \varphi^{-1}J^\gamma = [0, 1]$, а множество E содержится в $[0, 1]$. Пусть $q = \lambda(E)$, $\psi = \varphi^{-1}$; $[0, 1] \to [0, 1]$. Тогда функция $|\psi'(x)|$ монотонно возрастает на интервале $[0, 1]$, а неравенство (2) принимает вид

$$\frac{\lambda(\psi(E \cap K_\eta))}{\lambda(\psi(K_\eta))} \geqslant \eta q. \tag{3}$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на интервалы $J_1, \ldots, J_n$, для которых $|\psi'(x)/\psi'(y)| \geqslant \eta$ при $x, y \in J_k$; положим $E_k = E \cap J_k$. Существует такая точка $\xi_k \in J_k$, для которой $\lambda(\psi(J_k)) = |\psi'(\xi_k)| \lambda(J_k)$. Обозначив $|\psi'(\xi_k)| = M_k$, $\lambda(J_k) = \lambda_k$, запишем

$$\lambda(\psi(\bigcup_{k=1}^{l} J_k)) = \sum_{k=1}^{l} M_k\lambda_k. \tag{4}$$

Но $\lambda(\psi(E_k)) = \int\limits_{E_k} |\psi'(z)|\, dz \geqslant \eta M_k \lambda(E_k)$. Полагая $\lambda(E_k) = \mu_k\lambda(E) = \mu_k q$, получаем

$$\lambda(\psi(\bigcup_{k=1}^{l} E_k)) \geqslant \eta q \sum_{k=1}^{l} M_k\mu_k. \tag{5}$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 = \sum_{k=1}^{n} \mu_k. \tag{6}$$

Воспользуемся теперь леммой 1 для систем масс $m_k = 1$ и M_k, сосредоточенных в точках $y_k = \tilde{y}_k = \mu_k - \lambda_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Условия леммы сводятся к возрастанию последовательности $\{M_k\}_{k=1}^{n}$, которая имеет место в силу возрастания функции $|\psi'(x)|$. В силу (6) центр масс c первой системы находится в нуле. Следовательно, существует такое l, для которого $\sum\limits_{k=1}^{l} M_k(\mu_k - \lambda_k) \geqslant 0$. Воспользовавшись (4) и (5), получаем $\lambda(\psi(\bigcup\limits_{k=1}^{l} E_k)) \geqslant \eta q \lambda(\psi(\bigcup\limits_{k=1}^{l} J_k))$. Интервал $K_\eta = \bigcup\limits_{k=1}^{l} J_k$ — искомый.

3. Множество λ-неблуждающих точек. В этом параграфе мы будем считать, что f — функция класса Λ. Будем говорить, что точка x является *λ-блуждающей*, если любая ее окрестность содержит блуждающее множество положительной меры. Множество λ-блуждающих точек обозначим через W_λ, а дополнительное множество λ-неблуждающих точек — через Ω_λ. Как легко видеть, множество W_λ замкнуто и если $x \in W_\lambda \setminus (f(C \cup \{0, 1\}))$, то $f^{-1}x \in W_\lambda$. Преобразование f называется *консервативным* на инвариантном множестве X, если X не содержит блуждающих множеств положительной меры. Если $f: X \to X$ консервативно и $Y \subset X$, то траектория почти каждой точки $y \in Y$ возвращается в Y.

Лемма 2. а) *Множество Ω_λ является объединением внутренностей* нескольких циклов транзитивных отрезков;* б) *преобразование $f: \overline{\Omega}_\lambda \to \overline{\Omega}_\lambda$ консервативно;* в) *для п. в. $x \in \Omega_\lambda$ множество $\omega(x)$ совпадает с циклом транзитивных отрезков, содержащим x.*

Доказательство. Ясно, что $\Omega_\lambda \subset \operatorname{int}\Omega$. Пусть I — транзитивный отрезок, $L = \bigcup\limits_{k=0}^{p-1} f^k I$ — его цикл. Пусть L содержит блуждающее

* «Внутренность» понимается в смысле топологии отрезка $[0, 1]$.

множество X, $\lambda(X)>0$ и x — точка плотности множества X, не содержащаяся в $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^n C \cup \{0,\ 1\}$. Тогда точка x и все ее прообразы являются λ-блуждающими. Так как множество прообразов плотно в L (предложение 1) $L\subset W_\lambda$. Это влечет а) и б).

Пусть теперь $L=\bigcup\limits_{k=0}^{p-1} f^k I$ — цикл такого периодического транзитивного отрезка, что $\operatorname{int} I\subset\Omega_\lambda$. Рассмотрим открытый интервал $J\subset L$ и инвариантный компакт $K=L\diagdown\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}J$. В силу предложения 1 множество K нигде не плотно. Предположим, что $\lambda(K)>0$. Рассмотрим любой интервал $R\subset L\diagdown K$. Из предложения 1 следует, что $\lambda(f^n R\cap K)>0$ при некотором n. Взяв первый такой номер n, рассмотрим множество $S=R\cap f^{-n}K$. При $i\geqslant n$ имеем $f^i S\cap S\subset K\cap\cap R=\varnothing$. Пусть $1<i<n$, $Q_i=f^i S\cap S$. Тогда $Q_i\subset S$ и $f^{n-i}Q_i\subset\subset f^n S\subset K$. В силу определения n, имеем: $\lambda(Q_i)=0$. Пусть $T==S\diagdown\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} f^{-i}S$. Тогда множество T блуждает и $\lambda(T)=\lambda(S\diagdown\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f^{-i}Q_i)>>0$, вопреки консервативности преобразования $f: L\to L$. Следовательно, $\lambda(K)=0$. Чтобы завершить доказательство, рассмотрим счетную базу интервалов J_s и соответствующие множества K_s. Тогда $\lambda(\bigcup K_s)=0$ и $\omega(x)=L$ при $x\in[0,\ 1]\diagdown\bigcup K_s$.

Лемма 3. (ср. [5]). *Для п. в. $x\in[0,\ 1]$ выполняется одно из свойств:* а) $r_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$; б) $f^N x\in\Omega_\lambda$ *при некотором* N.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и $0<\rho<\varepsilon$. Через $V(\alpha)$ обозначим дополнение к α-окрестности множества Ω_λ. Разобьем множество $V(\varepsilon-\rho)$ на интервалы J_k, длины которых не превышают $\frac{1}{2}\rho$. Каждый интервал J_k содержит некоторое блуждающее множество S_k положительной меры. Положим $\delta=\min\lambda(S_k)$.

Рассмотрим теперь множество $X_n=X_n(\varepsilon,\ \rho)=\{x: f^n x\in V(\varepsilon),\ r_n(x)\geqslant\rho\}$. Его связные компоненты $X_{n,j}$ являются интервалами вида $X_n\cup H_{n,j}$, где $H_{n,j}$ — интервал монотонности функции f^n. Интервал $f^n X_{n,j}$ содержится в интервале $M_{n,j}=f^n H_{n,j}$ и отстоит от его концов на расстояние, не меньше, чем ρ. Следовательно, каждый интервал $I^\gamma_{n,j}$ $(\gamma\in\{+,\ -\})$ множества $M_{n,j}\diagdown f^n X_{n,j}$ содержит некоторый интервал $J_k=J^\gamma_{n,j}$ и соответствующее множество $S_k=S^\gamma_{n,j}$, где $k=k(n,\ j,\ \gamma)$. Через f_j^{-n} обозначим функцию, обратную к $f^n: H_{n,j}\to\to M_{n,j}$. Свойство 4) функций с отрицательным шварцианом (§ 2) влечет $\lambda(X_{n,j})\leqslant\max\limits_\gamma\lambda(f_j^{-n}S^\gamma_{n,j})/\delta$. Суммируя по j, получаем $\lambda(X_n)\leqslant\leqslant\delta^{-1}\sum\limits_k\lambda(f^{-n}S_k)$. Наконец, просуммируем по n: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda(X_n)\leqslant\delta^{-1}\times\times\sum\limits_k\lambda(f^{-n}S_k)$. Так как множества S_k блуждают, то последняя сумма конечна. По лемме Бореля-Кантелли $\lambda\{x\mid\exists n_k\to\infty: x\in X_{n_k}\}=0$. Таким образом, для п. в. x справедливо

Свойство P. *Если* $n_k\to\infty$ *и* $\inf \operatorname{dist}(f^{n_k}x,\ \Omega_\lambda)>0$, *то* $r(f^{n_k}x)\to 0\ (k\to\infty)$.

Осталось проверить, что если точка x обладает свойством P и $\operatorname{dist}(f^{l_k}x,\ \Omega_\lambda)\to 0$ для некоторой последовательности $l_k\to 0$, но $f^nx\bar{\in}\Omega_\lambda$ ни при каком n, то $\lim\limits_{k\to\infty} r(f^{l_k}x)=0$. Множество $\partial\Omega_\lambda\cap\omega(x)=$ $=\overline{\Omega}_\lambda\cap\omega(x)$ конечно и инвариантно. Поэтому задача сводится к случаю, когда $\{f^{l_k}x\}$ сходится к периодической точке $\alpha\in\partial\Omega_\lambda$, которую можно считать неподвижной. Точка α не может быть притягивающей, так как лежит на границе транзитивного отрезка J. Предположим, что α — отталкивающая. Подберем такое β, что $|f'(x)|>1$ при $|x-\alpha|\leqslant\beta$. Тогда найдется последовательность n_k, такая что $|f^ix-$ $-\alpha|\leqslant\beta/2$ $(l_k\leqslant i\leqslant n_k-1)$, но $|f^{n_k}x-\alpha|>\dfrac{\beta}{2}$. Легко видеть, что $r_{n_k}(x)\geqslant\min(r_{l_k}(x),\ \beta/2)$. Так как x обладает свойством P, то $\lim r_{n_k}(x)=0$, и значит, $\lim r_{l_k}(x)=0$.

Наконец, предположим, что α — нейтральная неподвижная точка. По теореме Зингера найдется интервал $[c,\ \alpha]$, такой что $c\in C\cup\{0,\ 1\}$ и $f^nx\to\alpha\ (n\to\infty)$ при $x\in[c,\ \alpha]$. Этот интервал и транзитивный интервал J имеют лишь одну общую точку α. Так как $f^{l_k}x\to\alpha\ (k\to\infty)$, но $f^{l_k}x\bar{\in}J$, то $f^{l_k}x\in(c,\ \alpha)$ при некоторых k. Тогда $r_{l_{k+s}}(x)\leqslant|\alpha-$ $-f^sc|\to 0\ (s\to\infty)$. Лемма полностью доказана.

Пусть L — цикл транзитивного отрезка. Из доказанной леммы следует, что если преобразование $f:L\to L$ не консервативно, то $r_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$ для почти всех $x\in L$. Докажем аналогичный факт для неэргодических преобразований.

Лемма 4. *Пусть L — цикл транзитивного отрезка. Предположим, что преобразование $f:L\to L$ не эргодично. Тогда $r_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$ для почти всех $x\in L$.*

Доказательство. Пусть $L=X_1\cup X_2$ — разбиение множества на два инвариантных подмножества положительной меры. Тогда $\lambda(X_1\cap J)>0$ для любого интервала J. Действительно, в противном случае $\lambda(X_1\cap f^nJ)=0$ $(n=0,\ 1,\ \ldots)$ и в силу предложения 1 $\lambda(X_1)=0$. Следовательно, $\lambda_1(\varepsilon)=\inf\lambda(X_1\cap J)>0$, где inf берется по всем интервалам $J\subset[0,\ 1]$ длины ε.

Рассмотрим множество $Y=\{x:\overline{\lim}\, r_n(x)>0\}$. Пусть $x\in Y$; тогда $r_{n_k}(x)>\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$, $n_k\to\infty$. Применим к отображению $f^{n_k}:H_{n_k}(x)\to M_{n_k}(x)$ свойство 5) функций с отрицательным шварцианом. Получим, что для некоторого интервала $K_j\subset H_{n_j}(x)$, примыкающего к точке x, выполняется неравенство: $\lambda(K_j\cap X_1)/\lambda(K_j)\geqslant$ $\geqslant\dfrac{1}{2}\lambda_1(\varepsilon)$. Так как транзитивный отрезок не содержит гомтервалов, то $\lambda(K_j)\leqslant\lambda(H_{n_j}(x))\to 0$. Следовательно, верхняя плотность множества X_1 в точке x* положительна. Отсюда вытекает, что x не

* Т. е. $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\dfrac{\lambda(X_1\cap[x-\varepsilon,\ x+\varepsilon])}{2\varepsilon}$.

является точкой плотности множества X_2. По теореме Лебега о точках плотности $\lambda(Y \cap X_2) = 0$. Поменяв ролями X_1 и X_2, получим, что $\lambda(Y \cap X_1) = 0$. Следовательно, $\lambda(Y) = 0$, и лемма доказана.

Соберем воедино результаты этого параграфа.

Теорема (предварительный вариант). *Пусть $f : [0, 1] \to [0,1]$— преобразование класса Λ. Для типичной точки $x \in [0, 1]$ выполняется одно из свойств:* а) $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$; б) *существует цикл L транзитивного отрезка, такой что $f^N x \in L$ при некотором N и $\omega(x) = L$; преобразование $f : L \to L$ консервативно и эргодично.*

Следствие. *Если J — гомтервал, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ при $x \in J$.*

Замечание. Авторам неизвестно, может ли преобразование $f^p\colon I \to I$ транзитивного отрезка I быть неконсервативным или неэргодическим. В комплексно-аналитическом случае такое возможно. Простейшая целая функция $z \to e^z$ неконсервативна и неэргодична [7, 8].

4. **Асимптотическое поведение траекторий, для которых $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$.** Результаты этого параграфа, предшествующие лемме 9, относятся к произвольному гладкому кусочно-монотонному преобразованию $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Для критической точки $c \in C$ через $[c^-, c]$, $[c, c^+]$ обозначаем максимальные интервалы (быть может, вырожденные), на которых монотонны все итерации f^n. Через c^γ, где $\gamma \in \{\pm 1\}$, мы будем обозначать одну из точек c^+, c^-. Отметим сразу, что $\omega(c) = \omega(c^+) = \omega(c^-)$. Пусть $C(x)$ — множество таких точек $c \in C$, для которых $\forall \varepsilon > 0 \exists n$, $t \in \mathbf{N}$ $(t \leqslant n)$, что интервал $f^{n-t} H_n(x)$ примыкает к точке c и $|f^n x - f^t c| < \varepsilon$. Если при этом $f^{n-t} H_n(x)$ находится слева от c, то будем считать $c^- \in C^-(x)$. Аналогично определим множество $C^+(x)$.

Введем следующие обозначения, которые мы будем использовать на протяжении всего параграфа. Пусть $\beta > 0$. Тогда $p(\beta)$ — это наименьшее p, для которого функция f^p имеет критическую точку $d^\gamma(c)$ в каждом интервале $(c^\gamma, c^\gamma + \gamma\beta)_0$; $\delta = \delta(\beta) > 0$ — любое число, для которого интервал $(c^\gamma + \gamma\delta, c^\gamma + \gamma(\beta - \delta))_0 \equiv I^\gamma(c, \beta, \delta)$ также содержит точку $d^\gamma(c)$. Наконец, $\varepsilon(\beta) = \min\{\lambda(f^k I^\gamma(c, \beta, \delta)) \colon k = 0, \ldots, p(\beta) - 1, c^\gamma \in C^+(x) \cup C^-(x)\}$.

Лемма 5. *Пусть $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:* а) $x \in \{0, 1\} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n} C$; б) *$x$ содержится в гомтервале, концом которого является точка множества $\{0, 1\} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n} C$;* в) *траектория точки x сходится к притягивающему или нейтральному циклу;* г) *любая точка $c^\gamma \in C^\gamma(x)$ содержится в $\omega(x)$; если при этом $c \neq c^\gamma$, то $[c, c^\gamma]_0$— гомтервал.*

Доказательство. Пусть $\beta > 0$, $c^\gamma \in C^\gamma(x)$ и для определенности $\gamma = -1$. Найдем такие n, $t \in \mathbf{N}$ $(t \leqslant n)$, что интервал $f^{n-t} H_n(x)$ примыкает слева к точке c и $|f^n x - f^t c| < \varepsilon(\beta)$. Если $f^{n-t} x \geqslant c^-$, то имеет место один из случаев а)—в). Далее считаем, что $f^{n-t} x \leqslant c^-$. Покажем, что $f^{n-t} x > c^- - \beta$. Если $t < p(\beta)$, то это вытекает из неравенства $|f^t(c) - f^t(c^- - \beta)| \geqslant \varepsilon(\beta)$. Если $t \geqslant p(\beta)$, то функция f^t монотонна на интервале $[f^{n-t} x, c]$, а на интервале $(c^- -$

$-\beta,\ c]$ монотонность нарушается. Таким образом, $f^{n-t}x \in (c^- - \beta,\ c^-)$. Поскольку $\beta > 0$ произвольно, то $c^- \in \omega(x)$. Осталось заметить, что $[c^-,\ c]$ может не быть гомтервалом при $c \neq c^-$ только в одном случае: если c^- — нейтральная периодическая точка и траектория сходится к ее циклу. При этом реализуется случай в).

Через X обозначим множество таких точек x, что $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, но x не обладает свойствами а)—в) леммы 5. Для конечного множества $S \subset [0,\ 1]$ через S_* мы будем обозначать максимальные элементы в S относительно квазипорядка: $x \prec y$, если $\omega(x) \subset \omega(y)$. Кроме того, положим $\omega(S) = \bigcup_{x \in S} \omega(x)$.

Лемма 6. *Если* $x \in X$, *то* $\omega(x) = \omega(C_*(x)) = \omega(C_*^+(x) \cup C_*^-(x))$.

Доказательство. Из определений X и $C(x)$ вытекает, что $\omega(x) \subset \omega(C(x) \cup \{0,\ 1\})$. Если при этом точку $a \in \{0,\ 1\}$ нельзя отбросить, то интервал $H_n(x)$ примыкает к a при всех n. Тогда либо $x = a$, либо траектория точки x сходится к циклу, либо $[a,\ x]_0$ — гомтервал. Все три возможности исключены для $x \in X$. Таким образом, $\omega(x) \subset \omega(C(x)) = \omega(C_*(x))$. С другой стороны, по лемме 5 $\omega(C_*^+(x) \cup C_*^-(x)) \subset \omega(x)$. Осталось заметить, что $\omega(C_*(x)) = \omega(C_*^+(x) \cup C_*^-(x))$, ибо $\omega(c) = \omega(c^+) = \omega(c^-)$ для любой точки $c \in C$.

Лемма 7. *Пусть* $x \in X$. *Тогда любая точка* $c^\gamma \in C_*^\gamma(x)$ *рекуррентна.*

Доказательство. Из лемм 5, 6 следует, что $c^\gamma \in \omega(b)$ для некоторой точки $b \in C(x)$. Тогда $\omega(c) = \omega(c^\gamma) \subset \omega(b)$. Так как c — максимальный элемент множества $C(x)$, то $\omega(c^\gamma) = \omega(b)$. Следовательно, $c^\gamma \in \omega(c^\gamma)$.

Определим теперь число $\rho > 0$ и функцию $\sigma(x)$ $(x \in X)$ следующими свойствами:

Свойство A. *Если* $b, c \in C$, $0 < |f^n c - b^\nu| < \rho$, *то* $b^\nu \in \omega(c)$.

Свойство B. *Пусть* $x \in X$, $c \in C$, $t \leqslant n$. *Пусть интервал* $f^{n-t}H_n(x)$ *примыкает к точке* c *слева (справа) и* $|f^n x - f^t c| < \sigma(x)$. *Тогда* $c^- \in C^-(x)$ *(соотв.* $c^+ \in C^+(x)$*).*

Лемма 8. *Пусть* $x \in X$. *Тогда* $\omega(x) = \omega(c)$ *для любой точки* $c \in C_*(x)$.

Доказательство. Зафиксируем точку $c^\nu \in C_*^\gamma(x)$; пусть для определенности $\gamma = +1$. Пусть $0 < \alpha < \delta(\rho) \equiv \delta$ и $\alpha(\|f'\| + 1) < \rho$*. Существует такое $k \in N$, что $f^k x \in (c^+,\ c^+ + \alpha)$ и $r_n(x) < \min(\alpha,\ \varepsilon(\rho),\ \sigma(x))$ при $n \geqslant k$. Покажем, что тогда $\operatorname{dist}(f^{k+j}x,\ \omega(c)) < \alpha$ при $j \in N$**. Пусть это не так и j — наименьшее натуральное число, для которого выполнено противоположное неравенство. Отметим сразу, что $j > 0$, ибо $\operatorname{dist}(f^k x,\ \omega(c)) \leqslant f^k x - c^+ < \alpha$.

При некотором $t \leqslant k + j$ интервал $f^{k+j-t}H_{k+j}(x)$ примыкает к некоторой точке $b \in C$ и $|f^{k+j}x - f^t b| = r_{k+j}(x)$. Пусть $\operatorname{sgn}(f^{k+j-t}x - b) = \gamma$. Тогда $b^\nu \overline{\in} \omega(c)$. Действительно, в противном случае $\operatorname{dist} \times (f^{k+j}x,\ \omega(c)) \leqslant |f^{k+j}x - f^t b^\nu| \leqslant r_{k+j}(x) < \alpha$, вопреки выбору j.

Далее, поскольку $|f^{k+j}x - f^t b| = r_{k+j}(x) < \sigma(x)$, то $b^\nu \in C^\nu(x)$ (свойство B). Покажем, что $c^\pm \overline{\in} \omega(b)$. Действительно, в противном

* $\|\varphi\|$ — sup — норма, ** $\operatorname{dist}(y,\ Y) = \inf\{|y - z| : z \in Y\}$.

случае $\omega(c) \subset \omega(b)$. Поскольку $c \in C_*(x)$, то $\omega(c) = \omega(b)$ и $b^\gamma \in C_*^\gamma(x)$. По лемме 7 точка b^γ рекуррентна, и значит, $b^\gamma \in \omega(c)$. Противоречие.

Рассмотрим теперь 3 случая. 1). Пусть $t = 0$. Тогда $\operatorname{dist}(b, \omega(c)) \leqslant |b - f^{k+j}x| + \operatorname{dist}(f^{k+j}x, \omega(c)) \leqslant r_{k+j}(x) + \|f'\| \operatorname{dist} \times \times (f^{k+j-1}x, \omega(c)) < \alpha + \|f'\| \alpha < \rho$, вопреки доказанному.

2) Пусть $0 < t < j$. Имеем $\operatorname{dist}(f^{k+j-t}x, \omega(c)) < \alpha < \delta$, а $\operatorname{dist} \times \times (b^\gamma, \omega(c)) \geqslant \rho$ (свойство А). Следовательно, $K \equiv [f^{k+j-t}x, [b]_0 \supset \supset [b^\gamma + \gamma(\rho - \delta), b]_0$. Так как функция f^t монотонна на K, то $t < < p(\rho)$, и значит, $\lambda(f^tK) \geqslant \varepsilon(\rho)$. Это противоречит тому, что $\lambda(f^tK) = = r_{k+j}(x) < \varepsilon(\rho)$.

3) Пусть $t \geqslant j$. Положим $\varkappa = t - j$ и рассмотрим интервал $J = = f^\varkappa K = [f^kx, f^\varkappa b]_0$. Так как функция f^j монотонна на J и $j > 0$, то $f^\varkappa b \geqslant c$. Если $f^\varkappa b \in [c, c^+] \equiv L$, то $c^+ \in \omega(L) = \omega(b)$, вопреки доказанному. Следовательно, $f^\varkappa b \geqslant c^+ + \rho$. При этом $f^\varkappa x < c^+ + \delta$ и, значит, $J \supset [c^+ + \delta, c^+ + \rho]$. Снова использовав монотонность функции f^j на J, получим, что $j < p(\rho)$. Следовательно, $r_{k+j}(x) = \lambda(f^jJ) \geqslant \varepsilon(\rho)$. Противоречие доказывает лемму.

Лемма 9. *Пусть $f \in \Lambda$, $x \in X$. Тогда $\omega(x) = \omega(c)$ для некоторой рекуррентной точки $c \in C$.*

Доказательство. Пусть $b^\gamma \in C_*^\gamma(x)$ и для определенности $\gamma = = -1$. В силу лемм 7, 8 $b^- \in \omega(b^-) = \omega(x)$. Если $b^- = b$, то b — искомая критическая точка. Далее мы считаем, что $b^- < b$. Пусть Γ — семейство гомтервалов J, примыкающих к критическим точкам, для которых $\omega(J) = \omega(x)$. Имеем: $[b^-, b] \in \Gamma$.

Существует такое семейство Δ максимальных гомтервалов, что 1) концы гомтервалов $K \in \Delta$ не содержатся в множестве $\{0, 1\} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}C$; 2) если $f^nK = f^mJ$ при некоторых $K, J \in \Delta$, $n, m \in N$, то $K = J$; 3) для любого $J \in \Gamma$ существуют $K \in \Delta$ и $s(J) > 0$, такие что $f^{s(J)}J \subset K$; 4) любой гомтервал $K \in \Delta$ содержит некоторый гомтервал $f^{s(J)}J$, где $J \in \Gamma$.

Положим $s = \max\{s(J) : J \in \Gamma\}$, $\mu = \min\{\lambda(f^iJ) : J \in \Gamma, i = 0, 1, \ldots, s-1\}$. Для любого гомтервала J корректны обозначения $H_n(J)$, $M_n(J)$, $\sigma(J)$, $C(J)$ и т. д. Положим $\sigma = \min\{\sigma(K) : K \in \Delta\} > > 0$. Через $M^\pm(J)$ обозначим соответственно левую и правую компоненты множества $M_n(J) \setminus f^nJ$, а через $H_n^\pm(J)$ — соответствующие компоненты множества $H_n(J) \setminus J$ (т. е. $f^nH_n^+(J) = M_n^+(J)$).

Определим последовательность $S \subset N$ следующим образом: $n \in S$, если для некоторого $K_n \in \Delta$ гомтервал $[u_n, v_n] = f^nK_n$ находится ближе к b^-, чем все гомтервалы f^iK $(K \in \Delta, i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Гомтервал K_n определен однозначно в силу свойства 2) семейства Δ. Так как $b^- \in \omega[b^-, b]$, то гомтервалы f^nK_n сгущаются к точке b^-. При этом они попадают в левую полуокрестность точки b^- (свойство 1) семейства Δ). Пусть $\alpha = \frac{1}{2}\min(\rho, \sigma, \mu, b - b^-)$ и при $n \geqslant N$ гомтервал f^nK_n находится в левой α-полуокрестности точки b^-.

Пусть $M_n(K_n)=[f^{\tau_n}a_n,\ f^{t_n}c_n]$, где $a_n, c_n \in C$, t_n, $\tau_n \leqslant n$. Рассмотрим два случая: 1) $f^{t_n}c_n < b^- + \alpha$ при некотором $n \geqslant N$. Тогда $|f^{t_n}c_n - b^-| < \alpha < \frac{\rho}{2}$, и значит, $\omega(c_n) \supset \omega(b^-) = \omega(x)$ (свойство А). Кроме того, $\lambda(M_n^+(K_n)) = f^{t_n}c_n - v_n < 2\alpha < \sigma$ и, значит, $c_n^\gamma \in C^\gamma(K_n)$ при подходящем γ (свойство В). По лемме 5 (с учетом следствия из предварительного варианта теоремы) $c_n^\gamma \in \omega(K_n) = \omega(x)$. Таким образом, $c_n^\gamma \in \omega(c_n) = \omega(x)$. Если $c_n^\gamma = c_n$, то c_n — искомая критическая точка.

Пусть $c_n^\gamma \neq c_n$. Тогда $J_n = [c_n^\gamma,\ c_n]_0 \in \Gamma$. Если $t_n < s$, то $f^{t_n}c_n \geqslant v_n + \lambda(f^{t_n}J_n) \geqslant (b^- - \alpha) + \mu > b^- + \alpha$, вопреки предположению. Значит, $t_n \geqslant s$. Тогда $f^{t_n}J_n = f^{l_n}L_n$, где $L_n \in \Delta$, $l_n = t_n - s(J_n) < n$. Гомтервал $f^{l_n}L_n$ лежит правее гомтервала f^nK_n, левее точки b (ибо $(f^{t_n}c_n < b^- + \alpha < b)$ и не пересекается с $[b^-,\ b]$ (свойство 1) семейства Δ). Следовательно, $f^{l_n}L_n$ находится ближе к b^-, чем f^nK_n. Противоречие.

2) $f^{t_n}c_n \geqslant b^- + \alpha$ при всех $n \in S$, $n \geqslant N$. Тогда $\lambda(M_n^+(K_n)) \geqslant \alpha$. При этом $\lambda(H_n^\pm(K_n)) \to 0$, $\lambda(f^nK_n) \to 0$, а $\min\limits_n \lambda(K_n) > 0$. Следовательно, $\lambda(M_n^+(K_n))/\lambda(f^nK_n) > \lambda(H_n^+(K_n))/\lambda(K_n)$ при больших n. Из свойства 4) функций с отрицательным шварцианом вытекает, что

$$\lambda(M_n^-(K_n))/\lambda(f^nK_n) \leqslant \lambda(H_n^-(K_n))/\lambda(K_n) \to 0 \ (n \to \infty). \tag{7}$$

Следовательно, $u_n - f^{\tau_n}a_n = \lambda(M_n^-(K_n)) < \alpha < \sigma$ при больших n. Кроме того, $u_n > b^- - \alpha$. Следовательно, $b^- > f^{\tau_n}a_n > b^- - 2\alpha \geqslant b^- - \rho$. Из этих свойств вытекает (так же, как и в первом случае), что $a_n^\gamma \in \omega(a_n) = \omega(x)$ при подходящем γ. Если $a_n^\gamma = a_n$ при некотором n, то a_n — искомая критическая точка.

Пусть $a_n^\gamma \neq a_n$ при всех $n \in S$, $n \geqslant N$. Тогда $[a_n,\ a_n^\gamma]_0 = I_n \in \Gamma$. Семейство гомтервалов I_n конечно и $f^{\tau_n}I_n \subset M_n^-(K_n)$. Следовательно, $\lambda(f^{\tau_n}I_n) \leqslant r_n(K_n) \to 0$ и, значит, $\tau_n \to \infty$.

Положим $U_n = f^{s(I_n)}I_n$, $V_n \in \Delta$ — максимальный гомтервал, содержащий U_n, $r_n = \tau_n - s(I_n)$. Интервалы U_n и V_n имеют общий конец $f^{s(I_n)}a_n^\gamma$ (поскольку эта точка содержится в $\omega(x)$) и, значит, $V_n \subset U_n \cup H_{r_n}^-(U_n)$. Имеем: $M_{r_n}^+(U_n) \supset M_n^+(K_n)$ и, значит, $\lambda(M_{r_n}^+(U_n)) > \alpha$. При этом $\lambda(H_{r_n}^+(U_n)) \to 0$, поскольку $r_n \geqslant \tau_n - s \to \infty$. Следовательно, $\lambda(M_{r_n}^+(U_n))/\lambda(f^{r_n}U_n) \geqslant \lambda(H_{r_n}^+(U_n))/\lambda(U_n)$. Из свойства 4) функций с отрицательным шварцианом вытекает $\lambda(M_{r_n}^-(U_n))/\lambda(f^{r_n}U_n) \leqslant \lambda(H_{r_n}^- \times (U_n))/\lambda(U_n) \leqslant D$. Поскольку $f^{r_n}V_n \subset M_{r_n}^-(U_n) \cup U_n$, то $\lambda(f^{r_n}V_n) \leqslant (D+1)\lambda(f^{r_n}U_n) \leqslant (D+1)\lambda(M_n^-(K_n))$. Из последнего неравенства и (7) следует, что

$$\lambda(f^{r_n}V_n)/\lambda(f^nK_n) \to 0 \ (n \to \infty). \tag{8}$$

Пусть l — элемент последовательности S, предшествующий n.

Покажем, что $\lambda(f^l K_l) > \lambda(f^n K_n)$. Действительно, если $l = r_n$ и $K_l = V_n$, то это следует из (8). В противном случае гомтервал $f^l K_l$ содержится между гомтервалами $f^{r_n} V_n$ и $f^n K_n$, и значит, $f^l K_l \subset M_n^-(K_n)$. Теперь требуемое неравенство следует из (7). Таким образом, последовательность длин $\{\lambda(f^n K_n)\}_{n \in S}$ возрастает, что невозможно. Лемма доказана.

Теперь мы готовы для полной формулировки нашего результата.

Теорема. *Пусть* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *преобразование класса* Λ. *Для почти каждой точки* $x \in [0, 1]$ *имеет место одна из следующих возможностей*:

а) $\omega(x)$ *совпадает с притягивающим или нейтральным циклом* $\{f^k \alpha\}_{k=0}^{p-1}$ *периодической точки* α;

б) $\omega(x)$ *совпадает с циклом* $L = \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k I$ *периодического транзитивного отрезка*; $f^N x \in L$ *при некотором* N; *преобразование* $f : L \to L$ *консервативно и эргодично;*

в) $\omega(x)$ *совпадает с предельным множеством* $\omega(c)$ *рекуррентной критической точки* c.

Доказательство сразу следует из предварительного варианта теоремы, леммы 5 и леммы 8. Отметим только следующую деталь. Если x содержится в гомтервале J, концом которого является точка множества $\{0, 1\} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n} C$ (случай б) леммы 5), то $f^N x \in X$ при достаточно большом N. Действительно, $r_n(f^N x) \to 0$ $(n \to \infty)$ в силу следствия в конце § 3. Поэтому гомтервал J можно заменить на максимальный гомтервал K, содержащий $f^N J$.

Замечание к следствию 1. Оценка $d + 2$ вместо d получается из-за того, что в теореме Зингера к циклу может сходиться траектория не критической точки, а конца отрезка [0, 1]. Условия пункта б) исключают эту возможность (см. [3]).

Список литературы: 1. *Шарковский А. Н.* Частично упорядоченная система притягивающих множеств // Докл. АН СССР.— 1966.— **170,** № 6.— С. 1276—1278. 2. *Блох А. М.* О разложении динамических систем на отрезке // Успехи мат. наук.— 1983.— **38,** № 5.— С. 179—180. 3. *Collet P., Eckman J.-P.* Iterated maps on the interval as dynamical systems.— Basel etc.: Birkhäuser, 1980.— 130 S. 4. *Milnor J.* On the concept of attractor // Comm. Math. Phys.— 1985.— **99.**— P. 177—195. 5. *Любич М. Ю.* О типичном поведении траекторий рационального отображения сферы // Докл. АН СССР.— 1982.— **268,** № 1.— С. 29—32. 6. *Блох А. М.* О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях // Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1986.— Вып. 47.— С. 100—110. 7. *Rees M.* The exponential map is not recurrent. Preprint. 1982. 8. *Любич М. Ю.* Измеримая динамика экспоненты // Сиб. мат. журн.— 1987.— 28. № 5.— С. 111 — 127.

Поступила в редколлегию 03.02.86