VIII

СООБЩЕНІЯ

и

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

при

Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ.

1883 года.

I.

ХАРЬКОВЪ.

Въ Университетской Типографіи.

1883.

Напечатано по опредѣленію совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *Г. Цѣхановецкій.*

СОДЕРЖАНІЕ.

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

31 января 1883 года.

О пр

Присутствовали: Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, Г. В. Левицкій, М. С. Косенко, Н. М. Флавицкій, И. Д. Линицкій, А. А. Клюшниковъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго ф культета.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Деларю.

Предметы занятій:

1. *Д. М. Деларю* прочиталъ письмо В. Г. Имшенецкаго, благодарящаго общество за избраніе его въ предсѣдатели общества на текущій годъ.

2. Избранъ въ члены общества, по предложенію Д. М. Деларю, преподаватель 3-й харьковской гимназіи А. В. Маевскій.

3. *К. А. Андреевъ* сообщилъ содержаніе статьи г. Стефаноса, присланной имъ въ общество, подъ заглавіемъ — «О трехъ равныхъ фигурахъ на плоскости».

4. *М. Ѳ. Ковальскій* предложилъ задачу: Проинтегрировать линейное дифференціальное уравненіе вида:

$$y'' + [Ce^z + 2]y' + y = 0$$

или, что то-же,

$$y'' - [Ce^z + 2]y' + y = 0.$$

Эту задачу М. Ѳ. Ковальскій сопровождалъ нѣкоторыми объясненіями.

5. *А. П. Грузинцевъ* сообщилъ распространеніе способа стариннаго арабскаго геометра Абулъ-Джуда, даннаго имъ для вычисленія стороны правильнаго вписаннаго девятиугольника, на случай многоугольника о нечетномъ числѣ сторонъ.

6. Секретаремъ общества сообщено о полученіи слѣдующихъ изданій:

1) Educational Times, December. 1882.

2) Mathesis, Decembre, 1882.

3) Bulletin de la société Impériale des naturalistes de Moscou, № 2. 1882.

4) Кіевскія университетскія извѣстія, № 11 (ноябрь). 1882.

5) Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2 série. Tome IV, 3 cahier, 1881, et Tome V, 1 cahier, 1882.

Протоколъ засѣданія 28-го февраля.

Присутствовали: Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, А. А. Клюшниковъ, М. Ѳ. Ковальскій, И. Д. Линицкій, И. К. Шейдтъ, Г. В. Левицкій, А. В. Маевскій, И. Д. Штукаревъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Деларю.

Предметы занятій:

1. *К. А. Андреевъ* сообщилъ содержаніе записки академика П. Л. Чебышева, присланной имъ для общества, подъ заглавіемъ — «О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе, взятые въ тѣхъ-же предѣлахъ».

2. *И. К. Шейдтъ* передалъ содержаніе брошюры академика В. Я. Буняковскаго, присланной имъ черезъ академика В. Г. Имшенецкаго въ даръ харьковскому обществу, подъ заглавіемъ — «Объ одномъ видоизмѣненіи способа, извѣстнаго подъ названіемъ Эратосѳенова рѣшета». Статья эта была помѣщена въ Запискахъ академіи наукъ за 1882 годъ.

3. Секретарь доложилъ списокъ книгъ, полученныхъ обществомъ въ февралѣ. Получено было:

1) Протоколы физико-математической секціи при казанскомъ обществѣ естествоиспытателей, за все время существованія секціи.

2) Journal de mathématiques élémentaires. № 1. 1883.

3) Journal de mathématiques spéciales. № 1. 1883.

4) Instructions for observing the transit of Venus, Dec. 6. 1882, — отъ вашингтонской морской обсерваторіи.

5) Bulletin de la société mathématique de France, T. X. № 7. (1882).

6) Кіевскія университетскія извѣстія № 12. 1882.

7) Преподаваніе чистой математики въ берлинскомъ и лейпцигскомъ университетахъ — изъ «Отчета о путешествіи за-границу лѣтомъ 1882 г.». Присланъ казанскимъ профессоромъ Васильевымъ.

4. Секретарь доложилъ обществу, что имъ посланы три послѣднія книжки «Сообщеній» въ казанское математическое общество.

Протоколъ засѣданія 14-го марта.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, А. А. Клюшниковъ, И. Д. Линицкій, И. К. Шейдтъ, А. В. Маевскій, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. *К. А. Андреевъ* доложилъ статью В. Г. Имшенецкаго, присланную имъ для харьковскаго общества, подъ заглавіемъ: «О неравенствахъ, ограничивающихъ величину опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій».

2. *Онъ-же* сообщилъ замѣтку по поводу одной теоремы Чебышева и аналогичной съ нею теоремы, находящейся въ статьѣ В. Г. Имшенецкаго.

О ДОПОЛНИТЕЛЬНОМЪ ЧЛЕНѢ

въ формулѣ П. Л. Чебышева для приближеннаго выраженія одного опредѣленнаго интеграла черезъ другіе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ.

К. А. Поссе.

Въ «Сообщеніяхъ харьковскаго математическаго общества» за 1882 годъ П. Л. Чебышевъ даетъ разложеніе интеграла

$$\int_a^b uv\vartheta dx,$$

гдѣ u и v произвольныя, непрерывныя въ предѣлахъ a и b, функціи отъ x, ϑ — прерывная или непрерывная функція отъ x, сохраняющая знакъ $+$ въ тѣхъ же предѣлахъ, въ рядъ, общій членъ котораго есть

$$\frac{\int_a^b u\psi_m\vartheta dx.\int_a^b v\psi_m\vartheta dx}{\int_a^b \psi^2_m\vartheta dx}$$

гдѣ ψ_m есть знаменатель $(m+1)$-ой подходящей дроби въ разложеніи интеграла

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)\,dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь[1].

[1] Статья П. Л. Чебышева прислана обществу въ началѣ 1883 года и по причинѣ живаго интереса, уже возбужденнаго ея предметомъ въ литературѣ, была немедленно помѣщена въ печатавшейся тогда послѣдней тетради «Сообщеній харьк. м. о.» за 1882 г. (*Примѣч. ред.*).

Останавливая этотъ рядъ на членѣ

$$\frac{\int_a^b u\psi_{n-1}\vartheta dx \int_a^b v\psi_{n-1}\vartheta dx}{\int_a^b \psi^2{}_{n-1}\vartheta dx}$$

и обозначая черезъ R_n дополнительный членъ, Чебышевъ даетъ, безъ доказательства, слѣдующія свойства его:

1. Числовая величина R_n не превосходитъ

$$\frac{\int_a^b \psi^2{}_n\vartheta dx}{\left(\frac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2} AB,$$

гдѣ A, B суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{d^nu}{dx^n}$, $\frac{d^nv}{dx^n}$ въ предѣлахъ интегрированія.

2. Если въ этихъ предѣлахъ производныя $\frac{d^nu}{dx^n}$ и $\frac{d^nv}{dx^n}$ не мѣняютъ своего знака, то R_n имѣетъ одинаковый знакъ съ произведеніемъ $\frac{d^nu}{dx^n}\cdot\frac{d^nv}{dx^n}$.

Для частнаго случая $n=1$ и $\vartheta=1$ выраженіе дополнительнаго члена дано и оба свойства его доказаны К. А. Андреевымъ [1]. Это выраженіе можетъ быть также легко получено изъ тождества А. Н. Коркина, публикованнаго имъ въ «Comptes rendus, T. XCVI, № 5.

Въ настоящей замѣткѣ я даю общее выраженіе дополнительнаго члена R_n и доказываю оба его свойства, приведенныя выше.

Во всѣхъ послѣдующихъ формулахъ мы будемъ, для простоты, опускать обозначеніе предѣловъ интеграловъ, которые всѣ берутся отъ a до b; кромѣ того при обозначеніи различныхъ функцій отъ x будемъ писать fx, φx, ϑx и т. д., опуская скобки.

[1] Въ той-же тетради «Сообщеній харьк. мат. общ.».

Относительно функціи $\psi_m x$, изображающихъ знаменатели подходящихъ дробей въ разложеніи интеграла

$$\int\frac{\vartheta z\,dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь, припомнимъ, что

$\psi_0 x = 1$, а $\psi_m x$ — цѣлая функція m-ой степени, обладающая свойствомъ, выражаемымъ равенствомъ

$$\int \psi_m x\,\omega x\,\vartheta x\,dz = 0, \tag{1}$$

гдѣ ωx есть произвольная цѣлая функція степени не выше $m-1$.

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, x_{n+1}$ будутъ обозначать $n+1$ независимыхъ другъ отъ друга величинъ, лежащихъ въ предѣлахъ a и b;

$$\Delta_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1, \psi_{n-1}x_2, \ldots\ldots \psi_{n-1}x_{n+1} \\ \psi_{n-2}x_1, \psi_{n-2}x_2, \ldots\ldots \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_1 x_1, \psi_1 x_2, \ldots\ldots \psi_1 x_{n+1} \\ 1 \quad 1 \ldots\ldots 1 \\ fx_1, fx_2 \ldots\ldots fx_{n+1} \end{vmatrix} \tag{3}$$

$\Delta_{n-1}(\varphi)$ обозначаетъ опредѣлитель, получаемый изъ $\Delta_{n-1}(f)$ замѣною функціи f функціею φ;

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1, \psi_{n-1}x_2, \ldots\ldots \psi_{n-1}x_n \\ \psi_{n-2}x_1, \psi_{n-2}x_2, \ldots\ldots \psi_{n-2}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_1 x_1 \quad \psi_1 x_2, \ldots\ldots \psi_1 x_n \\ 1, \quad 1 \ldots\ldots 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$\prod_1^n \vartheta x_i\,dx_i = \vartheta x_1\,\vartheta x_2 \ldots\ldots \vartheta x_n\,dx_1\,dx_2 \ldots\ldots dx_n$$

$$J_{n-1}(f,\varphi) = \int^{(n+1)} \Delta_{n-1}(f)\,\Delta_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\,dx_i \tag{5}$$

гдѣ $\int^{(n+1)}$ обозначаетъ результатъ $(n+1)$-кратнаго интегрированія по всѣмъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ между предѣлами a и b;

$$J_{n-1} = \int^{(n)} \Delta^2_{n-1} \prod_1^n \vartheta x_i \, dx_i. \tag{6}$$

Мы будемъ искать формулу приведенія для интеграла $J_{n-1}(f,\varphi)$, т. е. зависимость между $J_{n-1}(f,\varphi)$ и $J_{n-2}(f,\varphi)$; эта формула и приведетъ насъ къ формулѣ Чебышева съ дополнительнымъ членомъ.

Разлагая опредѣлители $\Delta_{n-1}(f)$ и $\Delta_{n-1}(\varphi)$ по элементамъ первой строки, находимъ

$$\Delta_{n-1}(f) = \psi_{n-1} x_1 . A_1 + \psi_{n-1} x_2 . A_2 + \ldots + \psi_{n-1} x_{n+1} . A_{n+1}$$
$$\Delta_{n-1}(\varphi) = \psi_{n-1} x_1 . B_1 + \psi_{n-1} x_2 . B_2 + \ldots + \psi_{n-1} x_{n+1} . B_{n+1},$$

гдѣ A_i, B_i суть опредѣлители миноры, независящіе отъ элемента x_i.

Отсюда находимъ

$$\Delta_{n-1}(f) . \Delta_{n-1}(\varphi) = \sum \psi^2_{n-1} x_i . A_i B_i +$$
$$+ \sum \psi_{n-1} x_i . \psi_{n-1} x_k . A_i B_k, \tag{7}$$

гдѣ первая сумма распространена на всѣ значенія

$$i = 1,\ 2\ 3, \ldots (n+1),$$

а вторая на всѣ комбинаціи значеній

$$i = 1,\ 2,\ 3, \ldots (n+1)$$
$$k = 1,\ 2,\ 3, \ldots (n+1),$$

за исключеніемъ комбинацій, въ которыхъ $i = k$, число членовъ первой суммы равно $n+1$, и второй $n(n+1)$; всѣ члены въ каждой изъ суммъ получаются изъ одного перестановкой буквъ: $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$.

Умножая обѣ части равенства (7) на

$$\prod_1^{n+1} \delta x_i \, dx_i$$

и интегрируя $(n+1)$ разъ, находимъ, на основаніи вышесказаннаго,

$$J_{n-1}(f,\varphi) = (n+1)\int^{(n+1)} \psi^2_{n-1}\, x_1 A_1 B_1 \prod_1^{n+1} \vartheta x_i dx_i +$$

$$+ n(n+1)\int^{(n+1)} \psi_{n-1}\, x_1 \psi_{n-1}\, x_2 A_1 B \prod_1^{n+1} \vartheta x_i dx_i . \qquad (8)$$

где $A_1 = \begin{vmatrix} \psi_{n-2}x_2, & \psi_{n-2}x_3, & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1 x_2, & \psi_1 x_3, & \ldots & \psi_1 x_{n+1} \\ 1, & 1, & \ldots & 1 \\ fx_2, & fx_3, & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix}$

B_1 получается изъ A_1 замѣною f на φ,

$$B_2 = -\begin{vmatrix} \psi_{n-2}x_1, & \psi_{n-2}x_3, & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1 x_1, & \psi_1 x_3 & \ldots & \psi_1 x_{n+1} \\ 1, & 1, & \ldots & 1 \\ \varphi x_1, & \varphi x_3 & \ldots & \varphi x_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Первый членъ второй части формулы (8), очевидно, приведется къ

$$(n+1)\int \psi^2_{n-1}\, x\, \vartheta x\, dx . \int^{(n)} \Delta_{n-2}(f)\, \Delta_{n-2}(\varphi) \prod_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i ,$$

т. е. на основаніи нашихъ обозначеній къ

$$(n+1)\, J_{n-2}(f\varphi) . \int \psi^2_{n-1}\, x\, \vartheta x\, dx .$$

Второй членъ въ правой части формулы (8) мы можемъ, очевидно, переписать такъ

$$n(n+1)\int^{(n+1)}\left\{\int \psi_{n-1}x_1 B_2\, \vartheta x_1\, dx_1 \,.\int \psi_{n-1}x_2 A_1\, \vartheta x_2\, dx_2\right\}\prod_3^{(n+1)} \vartheta x_i\, dx_i$$

Замѣчая же, что

$$A_1=(-1)^{n-1} f x_2 . \begin{vmatrix} \psi_{n-2}x_3\,, & \psi_{n-2}x_4\,, & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1 x_3\,, & \psi_1 x_4\,, & \ldots & \psi_1 x_{n+1} \\ 1\,, & 1\,, & \ldots & 1 \end{vmatrix} + \omega x_2$$

$$\text{а } B_2=-(-1)^{n-1}\varphi x_1 . \begin{vmatrix} \psi_{n-2}x_3\,, & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1 x_3\,, & \ldots & \psi_1 x_{n+1} \\ 1\,, & \ldots & 1 \end{vmatrix} + \varrho x_1\,,$$

гдѣ ωx и ϱx суть цѣлыя функціи не выше $(n-2)$-ой степени, на основаніи свойства функцій $\psi_m x$, выражаемаго равенствомъ (1), заключаемъ, что второй членъ правой части формулы (8) приведется къ

$$-n(n+1)\int fx\psi_{n-1}x\,\vartheta x\, dx.\int\varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\, dx.\int^{(n-1)}\Delta^2_{n-2}\prod_1^{n-1}\vartheta x_i dx_i$$

$$=-n(n+1)\, J_{n-2}.\int fx\,\psi_{n-1}\,x\,\vartheta x\, dx\,.\int\varphi x\,\psi_{n-1}\,x\,\vartheta x\, dx.$$

Поэтому формула (8) приметъ видъ

$$J_{n-1}(f,\varphi)=(n+1)\,J_{n-2}(f,\varphi).\int\psi^2{}_{n-1}x\,\vartheta x\, dx\,-$$

$$-\,n\,(n+1)\,J_{n-2}\int fx\,\psi_{n-1}\,x\,\vartheta x\, dx.\int\varphi x\,\psi_{n-1}\,x\,\vartheta x\, dx$$

или $$\frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{n(n+1)J_{n-2}\cdot\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}=$$

$$=\frac{J_{n-2}(f,\varphi)}{n\,J_{n-2}}-\frac{\int fx\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx\,.\int\varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}{\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}. \tag{9}$$

Дѣлая здѣсь частное предположеніе о функціяхъ f и φ, а именно:

$$fx=\varphi x=\psi_{n-1}x,$$

причемъ $J_{n-1}(\psi_{n-1},\psi_{n-1})$ обратится въ 0, потому что въ опредѣлителѣ $\Delta_{n-1}(\psi_{n-1})$ двѣ строки будутъ тождественныя, а $J_{n-2}(\psi_{n-1},\psi_{n-1})$ обратится въ J_{n-1}, потому что

$$\Delta^2_{n-2}(\psi_{n-1})=\Delta^2_{n-2},$$

находимъ

$$J_{n-1}=n\,J_{n-2}\,.\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx \tag{10}$$

и формула (9) приметъ видъ

$$\frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{(n+1)\,J_{n-1}}=\frac{J_{n-2}(f,\varphi)}{n\,J_{n-2}}-\frac{\int fx\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx\,.\int\varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}{\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}. \tag{11}$$

Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно $n=2,\ 3,\ldots\ldots n$, складывая результаты и замѣчая, что

$$\frac{J_0(f,\varphi)}{2\,J_0}=\frac{{}^1\!/_2\iint(fx_2-fx_1)(\varphi x_2-\varphi x_1)\,\vartheta x_1\,\vartheta x_2\,dx_1\,dx_2}{\int\vartheta x\,dx}=$$

$$=\int fx\,\varphi x\,\vartheta x\,dx-\frac{\int fx\,\vartheta x\,dx\,.\int\varphi x\,\vartheta x\,dx}{\int\vartheta x\,dx},$$

получаемъ окончательно формулу

$$\int fx\,\varphi x\,\vartheta x\,dx = \sum_{n=1}^{n=n} \frac{\int fx\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx \,.\, \int \varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}{\int \psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx} +$$

$$+ \frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{(n+1)\,J_{n-1}}. \tag{12}$$

Это и есть формула Чебышова съ дополнительнымъ членомъ

$$R_n = \frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{(n+1)\,J_{n-1}}. \tag{13}$$

Приступая къ доказательству свойствъ R_n, мы сперва упростимъ выраженіе его, пользуясь извѣстными свойствами опредѣлителей.

Разсматривая выраженія опредѣлителей $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$ и Δ_{n-1}, входящихъ подъ знаки интеграловъ $J_{n-1}(f,\varphi)$ и J_{n-1}, и замѣчая, что

$$\psi_{n-1}x = c_{n-1}x^{n-1} + \omega x,$$

гдѣ ωx цѣлая функція не выше $(n-2)$-ой степени, мы можемъ представить $\psi_{n-1}x$ въ видѣ

$$\psi_{n-1}x = c_{n-1}x^{n-1} + a_0\psi_{n-2}x + a_1\psi_{n-3}x + \ldots + a_{n-2},$$

гдѣ $a_0, a_1 \ldots a_{n-2}$ отъ x не зависитъ; отсюда, по извѣстному свойству опредѣлителей, заключаемъ, что въ выраженіяхъ $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$ мы можемъ замѣнить элементы первой строки

$$\psi_{n-1}x_1,\ \psi_{n-1}x_2, \ldots \ldots \psi_{n-1}x_{n+1}$$

элементами

$$c_{n-1}x_1^{\,n-1},\ c_{n-1}x_2^{\,n-1}, \ldots \ldots c_{n-1}x_{n+1}^{\,n-1}.$$

Точно также убѣждаемся, что вообще строку

$$\psi_k x_1,\ \psi_k x_2, \ldots \ldots \psi_k x_{n+1}$$

можемъ замѣнить строкою

$$c_k x_1^k\,,\ c_k x_2^k\,,\ \ldots\ldots\ c_k x_{n+1}^k,$$

гдѣ c_k есть коеффиціентъ при x^k въ $\psi_k x$.

Дѣлая такое-же преобразованіе въ опредѣлителѣ Δ_{n-1} и раздѣливъ числителя и знаменателя въ выраженіи R_n на постоянное количество $(c_1 c_2 \ldots c_{n-1})^2$, находимъ для R_n формулу

$$R_n = \frac{\int^{(n+1)} D_{n-1}(f) D_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i}{(n+1)\int^{(n)} D^2_{n-1} \prod_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i}, \tag{14}$$

$$\text{гдѣ } D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & , 1 & , \ldots 1 \\ x_1 & , x_2 & , \ldots x_{n+1} \\ x_1^2 & , x_2^2 & , \ldots x^2_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & , x_2^{n-1} & , \ldots x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & , fx_2 & , \ldots fx_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & , 1 & , \ldots 1 \\ x_1 & , x_2 & , \ldots x_n \\ x_1^2, & x_2^2 & , \ldots x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

или иначе

$$D_{n-1} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Докажемъ теперь одно свойство опредѣлителя $D_{n-1}(f)$, которое и послужитъ для вывода свойствъ R_n. Свойство это выражается формулою

$$D_{n-1}(f) = (x_2 - x_1)\ldots(x_{n+1} - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_n)\,\frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\ldots n}$$

или
$$D_{n-1}(f) = D_n \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2....n}, \tag{15}$$

гдѣ $f^{(n)}(x)$ обозначаетъ n-ую производную отъ fx, а ξ число, лежащее въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ числа
$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_{n+1}.$$

Для доказательства замѣчаемъ, что формула (15) очевидно повѣряется въ случаѣ $n=1$, потому что
$$D_0(f) = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ fx_1, & fx_2 \end{vmatrix} = fx_2 - fx_1 = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$
гдѣ ξ число среднее между x_1 и x_2.

Достаточно, слѣдовательно, убѣдиться, что если формула справедлива для какого-нибудь значенія n, то она будетъ справедлива и для значенія n на единицу большаго.

Руководствуясь этимъ, преобразуемъ $D_{n-1}(f)$ слѣдующимъ образомъ
$$D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & , 1, & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ x_1 & , x_2, & \ldots\ldots\ldots & x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & , x_2^{n-1} & \ldots\ldots\ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & , fx_2, & \ldots\ldots\ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & , & x_3 - x_1 & , \ldots & x_{n+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & , & x_3^2 - x_1^2 & , \ldots & x_{n+1}^2 - x_1^2 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & , & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & , \ldots & x_{n+1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ fx_2 - fx_1 & , & fx_3 - fx_1 & , \ldots & fx_{n+1} - fx_1 \end{vmatrix}.$$

Раздѣляя элементы перваго столбца на $x_2 - x_1$, втораго на $x_3 - x_1$ и т. д., находимъ

$$\frac{D_{n-1}(f)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_1)}=$$

$$=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \ldots \\ x_2+x_1, & x_3+x_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{\,n-2}+x_1x_2^{\,n-3}+\ldots+x_1^{\,n-2}, & x_3^{\,n-2}+x_1x_3^{\,n-3}+\ldots+x_1^{\,n-2} & \ldots \\ \dfrac{fx_2-fx_1}{x_2-x_1}, & \dfrac{fx_3-fx_1}{x_3-x_1} & \ldots \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} 1 \\ \ldots x_{n+1}+x_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots x_{n+1}^{\,n-2}+x_1x_{n+1}^{\,n-3}+\ldots+x_1^{\,n-2} \\ \ldots\dfrac{fx_{n+1}-fx_1}{x_{n+1}-x_1} \end{array}\right|$$

или обозначая $\dfrac{fx-fx_1}{x-x_1}$ черезъ $F(x)$

и пользуясь извѣстнымъ свойствомъ опредѣлителей, находимъ

$$\frac{D_{n-1}(f)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_1)}=$$

$$=\left|\begin{array}{cccc} 1, & 1, & \ldots\ldots & 1 \\ x_2, & x_3, & \ldots\ldots & x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{\,n-2}, & x_3^{\,n-2}, & \ldots\ldots & x_{n+1}^{\,n-2} \\ Fx_2, & Fx_3, & \ldots\ldots & Fx_{n+1} \end{array}\right|=D_{n-2}(F).$$

Допуская справедливость формулы (15) для опредѣлителя $D_{n-2}(F)$, получимъ

$$D_{n-1}(f)=(x_2-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_n)\frac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2.\ldots(n-1)}, \quad (16)$$

гдѣ ξ_1 — число, лежащее въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ x_2, x_3, ...x_{n+1}.

Составляя же $(n-1)$-ую производную функціи

$$F(x)=\frac{fx-fx_1}{x-x_1}=(fx-fx_1)\,(x-x_1)^{-1}$$

находимъ

$$F^{(n-1)}x=(x-x_1)^{-1}f^{(n-1)}x-(n-1)(x-x_1)^{-2}f^{(n-2)}x+$$
$$+(n-1)(n-2)\,(x-x_1)^{-3}f^{(n-3)}x-\dots$$
$$\dots+(-1)^{n-1}\,1.2\dots(n-1)\,(x-x_1)^{-n}\,(fx-fx_1)$$

$$=1.2\dots(n-1)\,\frac{fx_1-fx-\dfrac{x_1-x}{2}f'x\quad\dots-\dfrac{(x_1-x)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}x}{(x_1-x)^n}$$

$$=1.2\dots(n-1)\frac{f^{(n)}(\varepsilon)}{1.2\dots n},$$

гдѣ ε — число, лежащее между x_1 и x,
а потому

$$\frac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2\dots(n-1)}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\dots n},$$

гдѣ ξ — число лежащее между ξ_1 и x_1, т. е. въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$.

Подставляя въ формулу (16) найденное выраженіе для $\dfrac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2\dots(n-1)}$, находимъ

$$D_{n-1}(f)=D_n\,.\,\frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\dots n},$$

что и доказываетъ формулу (15).

Примѣняя ту же формулу къ $D_{n-1}(\varphi)$, находимъ, что дополнительный членъ формулы Чебышева можетъ быть написанъ въ видѣ

$$R_n=\frac{\int^{(n+1)}D_n{}^2.f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\prod_1^{n+1}\vartheta x_i\,dx_i}{(n+1)\int^{(n)}D^2{}_{n-1}\prod_1^{n}\vartheta x_i\,dx_i}\,. \quad (17)$$

Изъ этой формулы вытекаетъ прямо второе свойство R_n, по которому онъ имѣетъ одинаковый знакъ съ $f^{(n)}x.\varphi^{(n)}x$, если $f^{(n)}x$ и $\varphi^{(n)}x$ не мѣняютъ знака въ предѣлахъ интегрированія.

Далѣе видимъ, что числовая величина R_n не превосходитъ

$$\frac{\int^{(n+1)} D_n{}^2 \prod\limits_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i}{\int^{(n)} D_{n-1}{}^2 \prod\limits_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i} . AB, \qquad (18)$$

гдѣ A, B суть наибольшія числовыя величины $f^{(n)}x$ и $\varphi^{(n)}x$ въ этихъ предѣлахъ.

Кромѣ того, если положимъ въ формулѣ (12) $Fx = \varphi x = \psi_n x$, то въ силу (1) свойства $\psi_n x$ всѣ члены второй части, кромѣ R_n, обратятся въ 0,

$$F^{(n)}x = \varphi^{(n)}x = 1.2\ldots\ldots n.c_n = \frac{d^n\psi_n x}{dx^n}.$$

и находимъ

$$\int \psi_n{}^2 x\, \vartheta x\, dx = \left(\frac{d^n\psi_n x}{dx^n}\right)^2 . \frac{\int^{(n+1)} D_n{}^2 \prod\limits_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i}{\int^{(n)} D_{n-1}{}^2 \prod\limits_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i}$$

въ силу чего выраженіе (18) приметъ видъ

$$\frac{\int \psi_n{}^2 x\, \vartheta x\, dx}{\left(\frac{d^n\psi_n x}{dx^n}\right)^2} . AB.$$

Что и доказываетъ 1-ое свойство дополнительнаго члена.

5-го Мая 1883 года.

Протоколъ засѣданія 4-го апрѣля.

Присутствовали: Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, М. С. Косенко, А. В. Маевскій, Г. В. Левицкій, А. А. Клюшниковъ, Н. В. Проскурниковъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Деларю.

Предметы занятій:

1. *Г. секретарь* доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:

   1) Mathesis, №№ 1, 2 et 3, 1883.

   2) Bulletin de la société mathématique de France. T. XI, № 1 (1883).

   3) Кіевскія университетскія извѣстія, № 2-й, февраль (1883).

Книги эти переданы г. библіотекарю общества.

2. *В. П. Алексѣевскій* сообщилъ свою работу подъ заглавіемъ — «Нѣкоторые случаи интегрируемости линейныхъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка».

3. *П. С. Флоровъ* (студентъ университета) показалъ интегрированіе уравненія, предложеннаго проф. Ковальскимъ въ засѣданіи 31 января 1883 года.

4. *К. А. Андреевъ* дополнилъ свое сообщеніе, сдѣланное въ предыдущемъ засѣданіи.

НѢКОТОРЫЯ ОБОБЩЕНІЯ

ВЪ ВОПРОСѢ О РАЗЛОЖЕНІИ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ПО ФОРМУЛѢ, ПРЕДЛОЖЕННОЙ П. Л. ЧЕБЫШЕВЫМЪ[1].

К. А. Андреева.

§ 1.

Въ статьѣ подъ заглавіемъ «Нѣсколько словъ и т. д.», помѣщенной нами въ предыдущей статьѣ настоящаго сборника и составляющей, собственно говоря, наскоро набросанную замѣтку по поводу двухъ соотношеній, появившихся передъ тѣмъ въ печати, мы вывели весьма простое тождество, изъ котораго оба эти соотношенія получаются какъ частные случаи[2]. Тождество это, обозначенное въ названной статьѣ нумеромъ (I), можетъ быть представлено въ видѣ:

[1] Краткое извлеченіе содержанія этой статьи было сообщено на VII съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Одессѣ 25 августа настоящаго года.

[2] Одно изъ этихъ соотношеній мы назвали теоремой Импенецкаго, полагая что оно было предложено имъ впервые. Оказывается, однако, что та же самая зависимость была доказана В. Я. Буняковскимъ еще въ 1859 году въ мемуарѣ «Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies». (Mém. de l' Ac. de S. Pét. VII sér., T. I, № 9). Объ этомъ послѣднемъ обстоятельствѣ увѣдомляетъ насъ самъ В. Г. Импенецкій, выражая сожалѣніе, что вовлекъ насъ въ невольную ошибку тѣмъ, что, не бывши знакомъ, при составленіи своей статьи, съ мемуаромъ В. Я. Буняковскаго, не цитировалъ этого мемуара. Пользуемся первымъ представившимся случаемъ, чтобы исправить печатно эту ошибку.

Въ концѣ настоящей статьи читатель найдетъ исправленными нѣкоторыя другія погрѣшности, допущенныя нами, къ сожалѣнію, въ предыдущей статьѣ вслѣдствіе поспѣшности ея редактированія.

$$\begin{vmatrix} \int f_1 f_2 dx, & \int f_1 \psi_2 dx \\ \int \psi_1 f_2 dx, & \int \psi_1 \psi_2 dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \iint \begin{vmatrix} f_1(x), & f_1(y) \\ \psi_1(x), & \psi_1(y) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2(x), & f_2(y) \\ \psi_2(x), & \psi_2(y) \end{vmatrix} dx\, dy.$$

Столь же просто и тѣми же въ сущности разсужденіями доказывается справедливость болѣе общаго тождества, включающаго въ себѣ предыдущее какъ частный случай, именно тождества

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \int f_0 \varphi_0 dx, & \int f_0 \varphi_1 dx, & \ldots & \int f_0 \varphi_n dx \\ \int f_1 \varphi_0 dx, & \int f_1 \varphi_1 dx, & \ldots & \int f_1 \varphi_n dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int f_n \varphi_0 dx, & \int f_n \varphi_1 dx, & \ldots & \int f_n \varphi_n dx \end{vmatrix} = \\ &\frac{1}{(n+1)!} \int^{(n+1)} \begin{vmatrix} f_0(x), f_0(y) \ldots f_0(v) \\ f_1(x), f_1(y) \ldots f_1(v) \\ \ldots \\ \ldots \\ f_n(x), f_n(y) \ldots f_n(v) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_0(x), \varphi_0(y) \ldots \varphi_0(v) \\ \varphi_1(x), \varphi_1(y) \ldots \varphi_1(v) \\ \ldots \\ \ldots \\ \varphi_n(x), \varphi_n(y) \ldots \varphi_n(v) \end{vmatrix} dx\, dy \ldots dv \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

гдѣ всѣ интегралы суть опредѣленные съ одними и тѣми же постоянными предѣлами a и b, а указатель $(n+1)$ при знакѣ интеграла означаетъ степень его кратности.

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣлителя, составляющаго первую часть этого равенства, можно, очевидно, представить въ видѣ

$$\int^{(n+1)} \varphi_0(x) \varphi_1(y) \ldots \varphi_n(v) \begin{vmatrix} f_0(x), f_0(y) \ldots f_0(v) \\ f_1(x), f_1(y) \ldots f_1(v) \\ \ldots \\ \ldots \\ f_n(x), f_n(y) \ldots f_n(v) \end{vmatrix} dx\, dy \ldots dv.$$

Произведя здѣсь всѣ возможныя перемѣщенія буквъ $x, y, \ldots v$ и взявши сумму полученныхъ такимъ образомъ $(n+1)!$ равныхъ кратныхъ интеграловъ, будемъ имѣть, что при сложеніи интегрируемыхъ функцій опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} f_0(x), f_0(y) \ldots f_0(v) \\ f_1(x), f_1(y) \ldots f_1(v) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(x), f_n(y) \ldots f_n(v) \end{vmatrix}$$

есть общій множитель всѣхъ слагаемыхъ, а многочленъ, на него умножаемый, есть не что иное какъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x), \varphi_0(y) \ldots \varphi_0(v) \\ \varphi_1(x), \varphi_1(y) \ldots \varphi_1(v) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x), \varphi_n(y) \ldots \varphi_n(v) \end{vmatrix}$$

Это и убѣждаетъ насъ въ справедливости тождества (A).

Функціи $f_0, f_1, \ldots \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ предполагались до сихъ поръ совершенно произвольными. Если положимъ

$$f_0 = f, \ \varphi_0 = \theta\varphi$$

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{\theta} = \psi_0, \ f_2 = \frac{\varphi_2}{\theta} = \psi_1, \ldots f_n = \frac{\varphi_n}{\theta} = \psi_{n-1}$$

и допустимъ, что функціи $\psi_0, \psi_1 \ldots$ удовлетворяютъ условію

$$\int_a^b \psi_k \psi_l \, \theta \, dx = 0$$

при всякихъ различныхъ между собою k и l, то первая часть равенства (A) можетъ быть представлена въ видѣ произведенія

$$\int \psi_0^2\,\theta\,dx \int \psi_1^2\,\theta\,dx \ldots\ldots \int \psi_{n-1}^2\,\theta\,dx \,.\, R_n,$$

гдѣ

$$R_n = \int f\varphi\,\theta\,dx - \frac{\int f\psi_0\,\theta\,dx \int \varphi\psi_0\,\theta\,dx}{\int \psi_0^2\,\theta\,dx} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\int f\psi_{n-1}\,\theta\,dx \int \varphi\psi_{n-1}\,\theta\,dx}{\int \psi_{n-1}^2\,\theta\,dx}$$

есть дополнительный членъ въ рядѣ, предложенномъ П. Л. Чебышевымъ[1].

Тождествомъ (A) можно, слѣдовательно, воспользоваться для вывода общаго вида и свойствъ этого дополнительнаго члена, подобно тому какъ это въ частности мы уже сдѣлали въ нашей предыдущей статьѣ по отношенію къ дополнительному члену

$$R_1 = \int f\varphi\,\theta\,dx - \frac{\int f\psi_0\,\theta\,dx \int \varphi\psi_0\,\theta\,dx}{\int \psi_0^2\,\theta\,dx},$$

гдѣ $\psi_0 =$ пост.

Профессоръ К. А. Поссе посвятилъ этому вопросу свою статью, напечатанную выше, и въ ней вполнѣ его разрѣшаетъ въ предположеніи, что функціи $\psi_0, \psi_1 \ldots\ldots$ суть цѣлыя алгебраическія, находящіяся въ извѣстной связи съ интеграломъ

$$\int_a^b \frac{\theta(z)\,dz}{x-z},$$

и допустимъ, что функціи $\psi_0, \psi_1, \ldots\ldots$ удовлетворяютъ условію указанной самимъ П. Л. Чебышевымъ.

---

[1] См. «Сообщенія харьк. матем. общ.» за 1882 г. стр. 94.

Настоящее наше изслѣдованіе преслѣдуетъ главнымъ образомъ ту же цѣль какъ и статья К. А. Поссе, но, будучи основано на началахъ нѣсколько болѣе широкихъ, оно приводитъ и къ результатамъ сравнительно болѣе общимъ. По этому только мы и сочли не лишнимъ публиковать наше изслѣдованіе, послѣ того какъ изслѣдованіе К. А. Поссе уже напечатано. Къ тому же настоящая статья примыкаетъ, такъ сказать, непосредственно къ нашей предыдущей статьѣ («Нѣсколько словъ и т. д.»), составляя и по содержанію, и по методу, ея естественное продолженіе и содержа дальнѣйшее развитіе мыслей, нами тамъ уже заявленныхъ (въ параграф. 1-мъ и 4-мъ)[1].

§ 2.

Полагая, какъ было сказано, въ равенствѣ (А)

$$f_0 = f\,,\ \varphi_0 = \theta\varphi$$

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{\theta} = \psi_0\,,\ f_2 = \frac{\varphi_2}{\theta} = \psi_1\,,\ldots f_n = \frac{\varphi_n}{\theta} = \psi_{n-1}\,,$$

гдѣ θ какая нибудь функція, дадимъ этому равенству видъ

$$\begin{vmatrix} \int f\varphi\,\theta dx\,, & \int f\psi_0\,\theta dx\,, & \ldots & \int f\psi_{n-1}\,\theta dx \\ \int \varphi\psi_0\,\theta dx\,, & \int \psi_0{}^2\,\theta dx\,, & \ldots & \int \psi_0\psi_{n-1}\,\theta dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int \varphi\psi_{n-1}\,\theta dx\,, & \int \psi_0\psi_{n-1}\,\theta dx\,, & \ldots & \int \psi_{n-1}{}^2\,\theta dx \end{vmatrix} = \tag{B}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\int^{(n+1)} P.Q.\theta(x)\theta(y)\ldots\theta(v)\,dx dy\ldots dv$$

[1] Основная мысль, обусловливающая, можно сказать, успѣхъ рѣшенія занимающаго насъ вопроса, есть мысль представить дополнительный членъ въ видѣ кратнаго интеграла отъ произведенія двухъ функцій, зависящихъ отдѣльно отъ функцій f и φ. Изъ сказаннаго уже видно, что мы руководимся этой мыслью

гдѣ для краткости чрезъ P и Q обозначены опредѣлители

$$\begin{vmatrix} f(x) & , f(y) \ldots\ldots & f(v) \\ \psi_0(x) & , \psi_0(y) \ldots\ldots & \psi_0(v) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-1}(x) & , \psi_{n-1}(y) \ldots & \psi_{n-1}(v) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \varphi(x) & , \varphi(y) \ldots\ldots & \varphi(v) \\ \psi_0(x) & , \psi_0(y) \ldots\ldots & \psi_0(v) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-1}(x) & , \psi_{n-1}(y) \ldots & \psi_{n-1}(v) \end{vmatrix}.$$

Возьмемъ еще опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \lambda_0(x) & , \lambda_0(y) \ldots\ldots & \lambda_0(v) \\ \lambda_1(x) & , \lambda_1(y) \ldots\ldots & \lambda_1(v) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n(x) & , \lambda_n(y) \ldots\ldots & \lambda_n(v) \end{vmatrix} = L$$

и будемъ предполагать во всемъ слѣдующемъ, что функціи

$$f, \varphi,$$

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2 \ldots\ldots \psi_{n-1}$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$$

суть конечныя и непрерывныя въ предѣлахъ интеграціи a и b, а функція θ не мѣняетъ своего знака въ этихъ предѣлахъ.

Если во второй части равенство (B) умножимъ и раздѣлимъ интегрируемую функцію на L^2 и обозначимъ для краткости черезъ Δ опредѣлителя, составляющаго первую часть этого равенства, то будемъ имѣть

также какъ и К. А. Поссе. Но мы проводили уже эту мысль, и притомъ по тому же, такъ сказать, плану, какъ и теперь, еще въ предыдущей нашей статьѣ хотя и въ примѣненіи только къ частному рѣшенію.

Замѣтимъ кстати, что, цитируя эту статью, К. А. Поссе не совсѣмъ вѣрно замѣчаетъ, что въ ней дано выраженіе дополнительнаго члена для частнаго случая: $n=1$, $\theta=1$. О функціи θ у насъ никакого предположенія кромѣ неизмѣняемости знака сдѣлано не было.

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!}\int^{(n+1)} \frac{P}{L}\cdot\frac{Q}{L}\cdot L^2.\,\theta(x)\theta(y)\ldots\theta(v)\,dx\,dy\ldots dv.$$

Но извѣстно[1], что, всякій разъ какъ u и v суть двѣ функціи одного перемѣннаго, изъ которыхъ вторая не мѣняетъ своего знака при измѣненіи перемѣннаго отъ a до b,

$$\int_a^b uv\,dx = u_0\int_a^b v\,dx$$

гдѣ u_0 есть значеніе функціи u при нѣкоторомъ значеніи перемѣннаго, заключающемся между a и b.

Такъ какъ это свойство простаго опредѣленнаго интеграла имѣетъ, очевидно, мѣсто и для кратнаго интеграла отъ произведенія функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ, то мы можемъ равенство (B) представить еще въ такомъ видѣ

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{P_0}{L_0}\cdot\frac{Q_0}{L_0}\cdot\int^{(n+1)} L^2\theta(x)\theta(y)\ldots\theta(v)dx\,dy\ldots dv, \quad \text{(C)}$$

гдѣ P_0, Q_0, L_0 суть значенія функцій P, Q, L при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ $x, y \ldots . v$, заключающихся въ предѣлахъ интеграціи, напр. при $x = x_0, y = y_0, \ldots .. v = v_0$.

§ 3.

Функціи $\lambda_0, \lambda_1, \ldots .. \lambda_n$, входящія въ составъ опредѣлителя L, суть совершенно произвольныя. Въ видахъ воспользоваться выборомъ этихъ функцій для упрощенія послѣдняго равенства подвергнемъ въ немъ преобразованію отношенія $\frac{P_0}{L_0}$ и $\frac{Q_0}{L_0}$.

---

[1] См. *Serret (J. A.)* — «Cours de calcul diff. et int.» T. II, 1868, p. 94, n° 469 (Théorème IV).

Обозначивъ чрезъ m величину перваго изъ этихъ отношеній, будемъ имѣть

$$P_0 - mL_0 = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} f(x_0), f(y_0) \ldots f(v_0) \\ \psi_0(x_0), \psi_0(y_0) \ldots \psi_0(v_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \psi_{n-1}(x_0), \psi_{n-1}(y_0) \ldots \psi_{n-1}(v_0) \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), \lambda_0(y_0), \ldots \lambda_0(v_0) \\ \lambda_1(x_0), \lambda_1(y_0), \ldots \lambda_1(v_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n(x_0), \lambda_n(y_0), \ldots \lambda_n(v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Если въ обоихъ опредѣлителяхъ, входящихъ въ это тождество, замѣнимъ постоянное y_0 перемѣнною величиной y, то вся его первая часть будетъ представлять такую функцію, которая обращается въ нуль при $y = x_0$ и при $y = y_0$. Такъ какъ сверхъ того эта функція есть конечная и непрерывная, то ея производная должна обращаться въ нуль при нѣкоторомъ значеніи перемѣннаго $y = y_1$, заключающемся между x_0 и y_0, а, слѣдовательно, и подавно между a и b. Такимъ образомъ получается тождество

$$\begin{vmatrix} f(x_0), f'(y_1), \ldots f(v_0) \\ \psi_0(x_0), \psi_0'(y_1), \ldots \psi_0(v_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \psi_{n-1}(x_0), \psi_{n-1}'(y_1), \ldots \psi_{n-1}(v_0) \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), \lambda_0'(y_1), \ldots \lambda_0(v_0) \\ \lambda_1(x_0), \lambda_1'(y_1), \ldots \lambda_1(v_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n(x_0), \lambda_n'(y_1), \ldots \lambda_n(v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Прилагая къ этому послѣднему равенству тѣ же самыя разсужденія два раза относительно перемѣннаго, входящаго въ третьи столбцы опредѣлителей P и L, за-тѣмъ три раза относительно перемѣннаго, входящаго въ четвертые столбцы, и т. д., мы безъ труда придемъ къ заключенію, что слѣдствіемъ тождества

$$P_0 - mL_0 = 0$$

должно быть тождество

$$P_1 - mL_1 = 0$$

и потому

$$\frac{P_0}{L_0} = \frac{P_1}{L_1}$$

гдѣ P_1 и L_1 суть сокращенныя обозначенія опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} f(x_0), & f'(y_1), & f''(z_2), & \dots & f^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0), & \psi_0'(y_1), & \psi_0''(z_2), & \dots & \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x_0), & \psi_{n-1}'(y_1), & \psi_{n-1}''(z_2), & \dots & \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), & \lambda_0'(y_1), & \lambda_0''(z_2), & \dots & \lambda_0^{(n)}(v_n) \\ \lambda_1(x_0), & \lambda_1'(y_1), & \lambda_1''(z_2), & \dots & \lambda_1^{(n)}(v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n(x_0), & \lambda_n'(y_1), & \lambda_n''(z_2), & \dots & \lambda_n^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

въ которыхъ $x_0, y_1, z_2 \dots v_n$ означаютъ нѣкоторыя частныя величины перемѣнныхъ $x, y, z \dots v$, заключающіяся между a и b.

Подобнымъ же образомъ слѣдуетъ преобразовать и отношеніе $\frac{Q_0}{L_0}$.

Вслѣдствіе такого преобразованія равенство (C) принимаетъ видъ

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{P_1}{L_1} \cdot \frac{Q_1}{L_1} \cdot \int^{(n+1)} \dots L^2 \theta(x) . \theta(y) \dots \theta(v) dxdy \dots dv \quad \text{(D)}$$

гдѣ P_1 и L_1 имѣютъ указанныя сейчасъ значенія и гдѣ Q_1 означаетъ также опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \varphi(x_0)\,, & \varphi'(y_1)\,, & \varphi''(z_2)\,, & \ldots\ldots \varphi^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0)\,, & \psi_0'(y_1)\,, & \psi_0''(z_2)\,, & \ldots\ldots \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n-1}(x_0), & \psi_{n-1}'(y_1), & \psi_{n-1}''(z_2), & \ldots \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}.$$

Нужно замѣтить, что постоянныя $y_1, z_2, \ldots v_n$ имѣютъ въ выраженіи для Q_1, вообще говоря, другія величины, чѣмъ въ выраженіи для P_1, но заключаются также между a и b.

§ 4.

Положимъ теперь, что

$$\lambda_0(x) = 1\,, \lambda_1(x) = x\,, \lambda_2(x) = x^2\,, \ldots\ldots \lambda_n(x) = x^n.$$

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$L = \begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1\,, & \ldots 1 \\ x\,, & y\,, & z\,, & \ldots v \\ x^2, & y^2, & z^2, & \ldots v^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n, & y^n, & z^n, & \ldots v^n \end{vmatrix},$$

$$L_1 = \begin{vmatrix} 1\,, & 0\,, & 0\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ x_0\,, & 1\,, & 0\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ x_0^2\,, & 2y_1\,, & 2!\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^n\,, & ny_1^{n-1}\,, & n(n-1)z_2^{n-2}\,, & \ldots n! \end{vmatrix}$$

или

$$L_1 = 2!\,3!\ldots(n-1)!\,n! = (n!)!$$

Кромѣ того, если положимъ

$$
\left|\begin{array}{llll}
\int\theta\,dx, & \int x\theta\,dx, & \ldots\ldots & \int x^n\theta\,dx \\
\int x\theta\,dx, & \int x^2\theta\,dx, & \ldots\ldots & \int x^{n+1}\theta\,dx \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\int x^n\theta\,dx, & \int x^{n+1}\theta\,dx, & \ldots\ldots & \int x^{2n}\theta\,dx
\end{array}\right| = \Delta_n, \tag{I}
$$

то на основаніи общаго предложенія, доказаннаго въ первомъ параграфѣ (равенства A), будемъ имѣть

$$\Delta_n = \frac{1}{(n+1)!}\int^{(n+1)} L^2\theta(x)\theta(y)\ldots\theta(v)\,dx\,dy\ldots dv.$$

Вслѣдствіе этого равенство (D) принимаетъ видъ

$$\Delta = \frac{1}{[(n!)!]^2}\cdot P_1\cdot Q_1\cdot\Delta_n \tag{E}$$

и въ этомъ видѣ оно представляетъ любопытное соотношеніе, замѣчательное своею общностью, а вмѣстѣ съ тѣмъ и общностью получаемыхъ изъ него слѣдствій.

Было уже сказано, что если предположить, что функціи ψ_0, $\psi_1\ldots$ удовлетворяютъ условію

$$\int_a^b \psi_k\psi_l\theta\,dx = 0$$

при всякихъ различныхъ между собою k и l, то

$$\Delta = \int\psi_0^2\,\theta\,dx\int\psi_1^2\theta\,dx\ldots\int\psi_{n-1}^2\theta\,dx\,.\,R_n$$

гдѣ R_n есть дополнительный членъ въ рядѣ, предложенномъ П. Л. Чебышевымъ.

Изъ равенства (E) находимъ поэтому

$$R_n = \frac{P_1 \cdot Q_1 \cdot \Delta_n}{[(n!)!]^2 \int \psi_0^2 \theta dx \int \psi_1^2 \theta dx \ldots \int \psi_{n-1}^2 \theta dx} \tag{I}$$

выраженіе, въ которомъ функціи $\psi_0, \psi_1 \ldots$ не подчинены никакимъ другимъ условіямъ кромѣ сейчасъ указаннаго и могутъ быть даже не алгебраическія.

Изъ этого выраженія мы убѣждаемся, напр., въ томъ, что въ случаѣ, когда функція θ остается положительною въ предѣлахъ интеграціи a и $b > a$, дополнительный членъ R_n имѣетъ такой же знакъ какъ произведеніе трехъ опредѣлителей, P_1, Q_1 и Δ_n, изъ которыхъ два первые зависятъ послѣдовательно отъ функцій f и φ, а послѣдній вовсе отъ этихъ функцій не зависитъ. Если же θ остается въ предѣлахъ интеграціи отрицательною, то R_n будетъ имѣть такой-же знакъ какъ это произведеніе лишь тогда, когда n четное, и противоположный знакъ при n нечетномъ.

§ 5.

Обратимъ особенное вниманіе на случай, когда $\psi_0, \psi_1 \ldots \psi_n$ суть цѣлыя функціи, степени которыхъ обозначаются указателями, такъ что вообще ψ_k есть многочленъ k-ой степени. Въ этомъ случаѣ кромѣ условій

$$\int \psi_k \psi_l \theta dx = 0 \tag{α}$$

имѣютъ мѣсто еще слѣдующія

$$\frac{d^{k+1}\psi}{dx^{k+1}} = 0 \tag{β}$$

и

$$\frac{d^k \psi_k}{dx^k} \gtrless 0 \tag{γ}$$

каково бы ни было k.

Изъ условій (β) получаемъ

$$\psi_n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n, \qquad (1)$$

гдѣ $c_0, c_1 \ldots c_n$ суть постоянныя, и потому на основаніи условій (α) будемъ имѣть

$$\begin{array}{l} c_0 \int \psi_0 \theta dx + c_1 \int \psi_0 x \theta dx + \ldots\ldots + c_n \int \psi_0 x^n \theta dx = 0 \\ c_0 \int \psi_1 \theta dx + c_1 \int \psi_1 x \theta dx + \ldots\ldots + c_n \int \psi_1 x^n \theta dx = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 \int \psi_{n-1} \theta dx + c_1 \int \psi_{n-1} x \theta dx + \ldots\ldots + c_n \int \psi_{n-1} x^n \theta dx = 0 \end{array}$$

Отсюда же, принимая во вниманіе условія (γ), получаемъ слѣдующія n равенствъ:

$$\left.\begin{array}{l} c_0 \int \theta dx + c_1 \int x \theta dx + \ldots + c_n \int x^n \theta dx = 0 \\ c_0 \int x \theta dx + c_1 \int x^2 \theta dx + \ldots + c_n \int x^{n+1} \theta dx = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 \int x^{n-1} \theta dx + c_1 \int x^n \theta dx + \ldots + c_n \int x^{2n-1} \theta dx = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

изъ которыхъ, какъ изъ линейныхъ и однородныхъ уравненій относительно $c_0, c_1, \ldots c_n$, находимъ величины пропорціональныя этимъ постояннымъ. Внеся затѣмъ эти величины въ предыдущее выраженіе для ψ_n или, другими словами, исключая $c_0, c_1, \ldots c_n$ изъ уравненій (1) и (2), находимъ

$$\psi_n = M_n \begin{vmatrix} \int \theta dx, & \int x \theta dx, & \ldots & \int x^n \theta dx \\ \int x \theta dx, & \int x^2 \theta dx, & \ldots & \int x^{n+1} \theta dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int x^{n-1} \theta dx, & \int x^n \theta dx, & \ldots & \int x^{2n-1} \theta dx \\ 1, & x, & \ldots & x^n \end{vmatrix} \qquad (3)$$

гдѣ M_n есть неопредѣленный постоянный множитель.

Такимъ образомъ видимъ, что условіями (α), (β) и (γ) каждая изъ функцій $\psi_0, \psi_1 \ldots$ опредѣляется съ точностью до постояннаго множителя.

Изъ выраженія (3) получаются непосредственно слѣдующія соотношенія, которыми намъ придется воспользоваться

$$\int \psi_n x^n \theta\, dx = M_n \Delta_n \tag{4}$$

и . . . . $\int \psi_n x^k \theta\, dx = 0$,

. . . .

гдѣ k есть цѣлое положительно число меньшее n.

Слѣдовательно

$$\int \psi_n^2 \theta\, dx = M_n \Delta_{n-1} \int \psi_n x^n \theta\, dx. \tag{5}$$

Исключая же M_n изъ (4) и (5), находимъ

$$\frac{(\int \psi_n x^n \theta\, dx)^2}{\int \psi_n^2 \theta\, dx} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \tag{6}$$

Далѣе, продифференцировавъ n разъ выраженіе (3), получимъ

$$\frac{d^n \psi_n}{dx^n} = n!\, M_n \Delta_{n-1}$$

и исключивъ M_n при помощи равенства (4), будемъ имѣть

$$\frac{\int \psi_n x^n \theta\, dx}{\frac{d^n \psi_n}{dx^n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \tag{7}$$

Наконецъ, возведя въ квадратъ обѣ части этого послѣдняго равенства и раздѣливъ полученное равенство почленно на равенство (6), получимъ соотношеніе

$$\frac{\int \psi_n^2\,\theta\, dx}{\left(\dfrac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2} = \frac{1}{(n!)^2}\cdot\frac{\Delta^n}{\Delta_{n-1}} \tag{8}$$

§ 6.

При условіяхъ (β) опредѣлители P_1 и Q_1, входящіе въ формулу (I), принимаютъ также весьма простое значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣли (см. 3 парагр.)

$$P_1 = \begin{vmatrix} f(x_0)\;, & f'(y_1)\;, & f''(z_2)\,\ldots\ldots & f^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0)\,, & \psi_0'(y_1)\,, & \psi_0''(z_2),\,\ldots. & \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-1}(x_0)\,, & \psi_{n-1}'(y_1)\,, & \psi_{n-1}''(z_2)\,\ldots & \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

Перемѣстивши строки этого опредѣлителя такъ, чтобы порядокъ ихъ не нарушался и первая строка сдѣлалась послѣднею, получимъ, принимая во вниманіе условія (β),

$$P_1 = (-1)^n \begin{vmatrix} \psi_0(x_0)\,, & 0 & , & 0,\,\ldots\ldots & 0 \\ \psi_1(x_0)\,, & \psi_1'(y_1) & , & 0,\,\ldots\ldots & 0 \\ \psi_2(x_0)\,, & \psi_2'(y_1) & , & \psi_2''(z_2),\,\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-1}(x_0), & \psi_{n-1}'(y_1), & & \psi_{n-1}''(z_2)\;,\,\ldots & 0 \\ f(x_0), & f'(y_1), & & f''(z_2)\;,\,\ldots & f^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

или

$$P_1 = (-1)^n \psi_0(x_0)\,\psi_1'(y_1)\,\psi_2''(z_2)\,\ldots\ldots f^{(n)}(v_n)$$

или

$$P_1 = (-1)^n \psi_0 \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}} f^{(n)}(\xi),$$

гдѣ ψ_0, $\frac{d\psi_1}{dx}$, $\frac{d^2\psi_2}{dx^2}$... суть постоянныя, т. е. независящія отъ аргументовъ $x_0, y_1, z_2, \ldots$, а ξ поставлено вмѣсто v_n и означаетъ нѣкоторую величину, заключающуюся между a и b.

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$Q_1 = (-1)^n \psi_0 \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}} \varphi^{(n)}(\eta),$$

гдѣ η означаетъ также величину, заключающуюся между a и b.

Если теперь найденныя выраженія для P_1 и Q_1 внесемъ въ равенство (I) [пар. 4], то будемъ имѣть

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\psi_0^2 \left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\right)^2 \cdots\cdots \left(\frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}}\right)^2 \Delta_n}{[(n!)!]^2 \int \psi_0^2\,\theta\,dx \int \psi_1^2\,\theta\,dx \ldots\ldots \int \psi_{n-1}^2\,\theta\,dx},$$

что на основаніи соотношенія (8) приводится къ

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\psi_0^2\,\Delta_0 \Delta_n}{(n!)^2 \Delta_{n-1} \int \psi_0^2\,\theta\,dx}.$$

Но изъ общаго выраженія для Δ_n (см. § 4) имѣемъ

$$\Delta_0 = \int \theta\,dx$$

и такъ-какъ ψ_0 есть постоянное, то

$$\psi_0^2 \Delta_0 = \int \psi_0^2\,\theta\,dx,$$

вслѣдствіе чего послѣднее равенство обращается въ

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)\varphi^{(n)}(\eta)}{(n!)^2} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \qquad \text{(II)}$$

Это и есть простѣйшій видъ дополнительнаго члена строки П. Л. Чебышева для случая, когда въ ней $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \ldots$ суть функціи цѣлыя. Отношеніе $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ можетъ быть здѣсь замѣнено какимъ-либо изъ равныхъ ему выраженій, получаемыхъ изъ равенствъ (6), (7) и (8). Такимъ образомъ получаемъ еще слѣдующіе три вида этого дополнительнаго члена:

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\frac{\left(\int \psi_n x^n \theta\, dx\right)^2}{(n!)^2 \int \psi_n^2\, \theta\, dx} \qquad \text{(III)}$$

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\frac{\int \psi_n x^n \theta\, dx}{n!\, \frac{d^n \psi_n}{dx^n}} \qquad \text{(IV)}$$

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\frac{\int \psi_n{}^2 \theta\, dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} \qquad \text{(V)}$$

Изъ этихъ выраженій и видно, въ какой зависимости находится знакъ и величина разсматриваемаго дополнительнаго члена отъ свойствъ функцій f, φ и θ. Такъ, предполагая, что θ остается положительною величиною при измѣненіи перемѣннаго отъ a до $b > a$, будемъ имѣть, что интегралъ

$$\int_a^b \psi_n{}^2 \theta\, dx$$

есть величина также положительная, а потому изъ выраженій (III) и (V) заключаемъ, что въ случаѣ, когда n-ыя производныя отъ функцій f и φ сохраняютъ свои знаки въ предѣлахъ a и b, знакъ дополнительнаго члена R_n такой-же какъ знакъ произведенія этихъ производныхъ. Это составляетъ второе его свойство, указанное П. Л. Чебышевымъ.

Имѣя въ виду это свойство, мы заключаемъ изъ равенства (V), что

$$[R_n] = [f^{(n)}(\xi)][\varphi^{(n)}(\eta)] \frac{\int \psi_n^2 \, \theta \, dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2},$$

гдѣ скобками [ ] мы означаемъ числовую величину выраженія, въ нихъ заключеннаго. Отсюда слѣдуетъ, что если **A** и **B** суть наибольшія числовыя величины производныхъ

$$\frac{d^n f}{dx^n} \text{ и } \frac{d\varphi^n}{dx^n},$$

то числовая величина дополнительнаго члена R_n не можетъ быть болѣе произведенія

$$\mathrm{A\ B} \frac{\int \psi_n^2 \, \theta \, dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2}.$$

Это есть первое свойство дополнительнаго члена, указанное Чебышевымъ.

Къ этому можно прибавить на томъ же основаніи, что если α и β суть наименьшія числовыя величины производныхъ

$$\frac{d^n f}{dx^n} \text{ и } \frac{d^n \varphi}{dx^n},$$

то $[R_n]$ не можетъ быть менѣе

$$\alpha \, \beta \frac{\int \psi_n^2 \, \theta \, dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2}.$$

Вообще же равенства (III), (IV) и (V) показываютъ, что дополнительный членъ R_n заключается въ предѣлахъ

$$G\ H\ \frac{(\int \psi_n x^n \theta\, dx)^2}{(n!)^2 \int \psi_n^2 \theta\, dx} \text{ и } g\ h\ \frac{(\int \psi_n x^n \theta\, dx)^2}{(n!)^2 \int \psi_n^2 \theta\, dx}$$

или

$$G\ H\ \frac{\int \psi_n x^n \theta\, dx}{n!\ \frac{d^n \psi_n}{dx^n}} \text{ и } g\ h\ \frac{\int \psi_n x^n \theta\, dx}{n!\ \frac{d^n \psi_n}{dx^n}}$$

или

$$G\ H\ \frac{\int \psi_n^2 \theta\, dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} \text{ и } g\ h\ \frac{\int \psi_n^2 \theta\, dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^3}$$

гдѣ G и g означаютъ самую большую и самую малую изъ величинъ, получаемыхъ n-ою производною функціи $f(x)$ при измѣненіи x отъ a до b; а H и h имѣютъ такое же значеніе для функціи $\varphi(x)$.

N. B.

Поправка. — Обратимся, въ заключеніе, еще разъ къ нашей предыдущей статьѣ «Нѣсколько словъ и т. д.» съ цѣлью исправить нѣкоторыя вкравшіяся въ нее погрѣшности. Статья эта вызвана была теоремой П. Л. Чебышева, состоящей въ слѣдующемъ: *Если каждая изъ двухъ функцій $f(x)$ и $\psi(x)$ постоянно возрастаетъ или постоянно уменьшается при измѣненіи перемѣннаго x отъ 0 до 1, то разность*

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 \psi(x)\,dx$$

имѣетъ всегда такой же знакъ, какъ произведеніе производныхъ $f'(x)$ и $\psi'(x)$ этихъ функцій.

Обобщенію этой теоремы на случай, когда интегрируемая функція въ первомъ членѣ разности есть произведеніе не двухъ только, а нѣсколькихъ функцій, мы посвятили одинъ изъ параграфовъ (третій), но! допущенная нами неправильность въ подстановкѣ, сдѣланной на первыхъ же порахъ, повела къ искаженію и дальнѣйшихъ преобразованій. Вотъ въ чемъ должны состоять приводящія къ этому обобщенію разсужденія уже въ строго правильномъ видѣ.

Замѣняя въ неравенствѣ

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 \psi(x)\,dx \gtrless 0$$

функцію $f(x)$ послѣдовательно чрезъ

$$f_1(x)\ ,\ f_1(x)f_2(x)\ ;\ f_1(x)f_2(x)f_3(x) \text{ и т. д.},$$

и соотвѣтственно съ этимъ функцію $\psi(x)$ послѣдовательно чрезъ $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ и т. д., получимъ слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \gtrless 0 \\
\int_0^1 f_1(x)f_2(x)f_3(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx \int_0^1 f_3(x)\,dx \gtrless 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)\,dx - \\
\quad - \int_0^1 f_1(x)f_2(x)\ldots f_{n-1}(x)\,dx \int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0
\end{array}\right\}\text{(A)}$$

Въ силу теоремы П. Л. Чебышева условія существованія этихъ неравенствъ будутъ послѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_2}{dx} \gtrless 0\\
&\frac{d}{dx}\left(f_1 f_2\right)\frac{df_3}{dx} \gtrless 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d}{dx}\left(f_1 f_2 \ldots\ldots f_{n-1}\right)\frac{df_n}{dx} \gtrless 0
\end{aligned}\right\} (\alpha)$$

. . . .

гдѣ верхніе знаки соотвѣтствуютъ верхнимъ, а нижніе—нижнимъ.

Если назовемъ первыя части неравенствъ (A) послѣдовательно чрезъ $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ и положимъ:

$$\int_0^1 f_3(x)\,dx \int_0^1 f_4(x)\,dx \ldots\ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx = B_1$$

$$\int_0^1 f_4(x)\,dx \int_0^1 f_5(x)\,dx \ldots\ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx = B_2$$

. . . .

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = B_{n-2}$$

$$1 = B_{n-1}$$

то будемъ, очевидно, имѣть

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots\ldots + A_{n-1} B_{n-1} = \int_0^1 f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\,dx -$$

$$- \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \ldots\ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Но въ силу условій (α) и принимая во вниманіе видъ выраженій $B_1, B_2 \ldots$, должны имѣть мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$A_1B_1 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dx}\int_0^1 f_3(x)\,dx \int_0^1 f_4(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0$$

$$A_2B_2 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{d}{dx}\left(f_1 f_2\right)\frac{df_3}{dx}\int_0^1 f_4(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0$$

$$A_3B_3 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{d}{dx}\left(f_1 f_2 f_3\right)\frac{df_4}{dx}\int_0^1 f_5(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-1}B_{n-1} \gtrless 0, \text{ когда } \frac{d}{dx}\left(f_1 f_2 \ldots f_{n-1}\right)\frac{df_n}{dx} \gtrless 0$$

которыя, въ случаѣ когда каждая изъ функцій $f_3(x), f_4(x), \ldots f_n(x)$ сохраняетъ свой знакъ въ предѣлахъ интеграціи, равнозначущи съ слѣдующими

$$\left.\begin{array}{l}
A_1B_1 \gtrless 0, \text{ когда } \dfrac{df_1}{dx}\dfrac{df_2}{dx} f_3 f_4 \ldots f_n \gtrless 0 \\[2ex]
A_2B_2 \gtrless 0, \text{ когда } \dfrac{d}{dx}\left(f_1 f_2\right)\dfrac{df_3}{dx} f_4 f_5 \ldots f_n \gtrless 0 \\[2ex]
A_3B_3 \gtrless 0, \text{ когда } \dfrac{d}{dx}\left(f_1 f_2 f_3\right)\dfrac{df_4}{dx} f_5 \ldots f_n \gtrless 0 \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
A_{n-1}B_{n-1} \gtrless 0, \text{ когда } \dfrac{d}{dx}\left(f_1 f_2 \ldots f_{n-1}\right)\dfrac{df_n}{dx} \gtrless 0
\end{array}\right\} (\beta)$$

гдѣ также верхнимъ знакамъ соотвѣтствуютъ верхніе, а нижнимъ — нижніе.

Если положимъ, что въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только верхніе знаки, то будемъ имѣть, что разность

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

имѣетъ величину положительную. Когда же въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только нижніе знаки, то эта разность будетъ отрицательною.

Произведя же въ условіяхъ (β) дифференцированіе произведеній, не трудно видѣть, что первыя ихъ части суть суммы такихъ произведеній, которыя получаются изъ произведенія n функцій $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ чрезъ замѣну послѣдовательно каждыхъ двухъ изъ перемножающихся функцій ихъ производными. Вслѣдствіе этого убѣждаемся въ справедливости слѣдующаго предложенія.

Если каждая изъ функцій $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x)$ не мѣняетъ своего знака при измѣненіи перемѣннаго отъ 0 до 1 и при томъ всѣ отношенія $\dfrac{f_1'(x)}{f_1(x)}, \dfrac{f_2'(x)}{f_2(x)}, \ldots \dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ имѣютъ одинаковые знаки, то разность

$$\int_0^1 f_1(x) f\,(x) \ldots f_n(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

имѣетъ величину положительную, когда число отрицательныхъ функцій въ рядѣ f_1, f , ... f_n есть четное, и отрицательную, когда это число есть нечетное.

Кромѣ сказаннаго, въ той же нашей статьѣ подлежитъ исправленію слѣдующая опечатка.

На второй страницѣ 1-го параграфа напечатано

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx\right]^2;$$

должно быть

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx\right]^2.$$

Эта же опечатка встрѣчается и на четвертой страницѣ въ равенствѣ, обозначенномъ нумеромъ (III).

К. А.

ОСОБЕННЫЙ СЛУЧАЙ

maximum'а и minimum'а функціи со многими перемѣнными.

П. М. Новикова.

Пусть дана функція $U=f(x, y, z\ldots)$; допустимъ, что ея дифференціалъ принимаетъ такой видъ

$$dU=\varphi(x, y, z\ldots)(U_x dx+U_y dy+U_z dz+\ldots), \quad (1)$$

гдѣ $U_x, U_y, U_z\ldots\ldots$ функціи $x, y, z\ldots\ldots$ Тогда для того, чтобы найдти значенія перемѣнныхъ, соотвѣтствующія maximum'у или minimum'у, нужно или рѣшить систему уравненій

$$U_x=0,\ U_y=0,\ U_z=0,\ldots\ldots \quad (2)$$

или же допустить

$$\varphi(x, y, z,\ldots)=0. \quad (3)$$

Изъ системы уравненій (2) мы найдемъ нѣсколько системъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ, изъ которыхъ нѣкоторыя могутъ удовлетворять дальнѣйшимъ условіямъ maximum'а или minimum'а; но кромѣ того d^2U можетъ при произвольныхъ дифференціалахъ независимыхъ перемѣнныхъ сохранять постоянный знакъ для всѣхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ уравненію (3). Тогда U будетъ maximum или minimum для непрерывной совокупности значенiй перемѣннаго, удовлетворяющихъ уравненiю (3). Если, напр., U будетъ функцiя только двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, и слѣд. $U = f(x, y)$ можно принять за уравненiе поверхности, то въ случаѣ, когда dU уничтожится отъ допущенiя $\varphi(x, y) = 0$ и d^2U будетъ сохранять постоянный знакъ, U будетъ имѣть maximum или minimum на протяженiи всей кривой $\varphi(x, y) = 0$.

Этотъ maximum или minimum отличается тѣмъ свойствомъ, что онъ есть величина постоянная для всѣхъ значенiй независимыхъ перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ уравненiю (3); такъ, напр., въ случаѣ двухъ перемѣнныхъ U величина постоянная для всѣхъ точекъ кривой $\varphi(x, y) = 0$. Дѣйствительно, полагая для краткости,

$$U_x dx + U_y dy + U_z dz + , \ldots = dL,$$

будемъ имѣть

$$d^2U = d\varphi dL + \varphi d(dL). \tag{4}$$

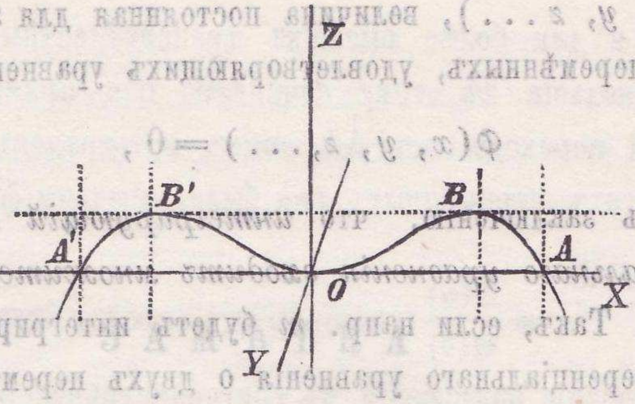
Для всѣхъ значенiй перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ уравненiю $\varphi = 0$, первый членъ правой части, при произвольныхъ дифференцiалахъ независимыхъ перемѣнныхъ, можетъ сохранить постоянный знакъ, но при дифференцiалахъ, удовлетворяющихъ уравненiю $\varphi = 0$, должно быть $d\varphi = 0$ и слѣд.

$$d^2U = 0;$$

но такъ какъ для дифференцiаловъ, удовлетворяющихъ уравненiю $\varphi = 0$, не только $d\varphi = 0$, но и $d^2\varphi = 0$, $d^3\varphi = 0 \ldots$, то для нихъ всѣ дальнѣйшiе дифференцiалы U уничтожатся, такъ какъ всѣ они будутъ состоять изъ членовъ, содержащихъ множителями φ и его дифференцiалы разныхъ порядковъ.

Для примѣра возьмемъ слѣдующее уравненiе:

$$z = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2;$$



оно выражаетъ поверхность вращенія, разрѣзъ которой изображенъ на прилагаемомъ чертежѣ. Изъ него имѣемъ

$$dz = 4\left[{}^1/_2 - (x^2 + y^2)\right](x\,dx + y\,dy).$$

Полагая $dz = 0$, получаемъ съ одной стороны $x = y = 0$, съ другой

$$x^2 + y^2 - {}^1/_2 = 0.$$

Далѣе, опуская общихъ численныхъ множителей, имѣемъ

$$d^2z = -2(x\,dx + y\,dy)^2 + \left[{}^1/_2 - (x^2 + y^2)\right](dx^2 + dy^2).$$

Вторая часть при $x = y = 0$ дѣлается величиной положительной, именно

$${}^1/_2(dx^2 + dy^2),$$

а при $x^2 + y^2 - {}^1/_2 = 0$, т. е. для всѣхъ точекъ круга, но, при произвольныхъ значеніяхъ dx, dy, она обращается въ

$$-2(x\,dx + y\,dy)^2$$

и есть величина отрицательная; значитъ, при послѣднемъ условіи функція z будетъ maximum. Наконецъ, для значеній не только x и y, но и dx и dy удовлетворяющихъ уравненію круга, т. е. когда мы будемъ подвигаться на кругѣ, второй дифференціалъ z равенъ нулю. Можно показать, что и остальные дифференціалы также нули.

Прибавимъ здѣсь еще одно замѣчаніе. То обстоятельство, что функція, въ первомъ дифференціалѣ которой можно выдѣлить множителя $\Phi(x, y, z \dots)$, величина постоянная для значеній независимыхъ перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ уравненію

$$\Phi(x, y, z, \dots) = 0,$$

приводитъ къ заключенію, что *интегрирующій множитель дифференціальнаго уравненія входитъ множителемъ въ интегралъ его*. Такъ, если напр. m будетъ интегрирующій множитель дифференціальнаго уравненія о двухъ перемѣнныхъ:

$$M dx + N dy = 0,$$

то интегралъ его будетъ имѣть видъ

$$\Pi = Xm + C.$$

Дѣйствительно, продифференцировавъ это выраженіе и приравнявъ коэффиціенты при dx и dy такимъ же дифференціальнаго уравненія, помноженнаго на m; получимъ для опредѣленія функціи X два уравненія въ частныхъ производныхъ, именно

$$\frac{\partial X}{dx} + \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dx} X = M,$$

$$\frac{\partial X}{dy} + \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dy} X = N,$$

которыя теоретически допускаютъ рѣшеніе.

Примѣръ. Интегрирующій множитель для уравненія $xdy - ydx = 0$ будетъ $\frac{1}{x^2}$, а интегралъ $\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} \; yx = C$. Здѣсь функція X есть xy.

Не трудно то же доказательство распространить и на случай многихъ перемѣнныхъ.

ЗАМѢТКА
о введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій.

М. А. Тихомандрицкаго.

Извѣстно, что Θ-функціи вошли въ теорію эллиптическихъ функцій чрезъ разложеніе послѣднихъ въ безконечныя произведенія, и что потомъ Якоби на своихъ лекціяхъ показывалъ какимъ образомъ, на-оборотъ, эти разложенія и вообще вся теорія эллиптическихъ функцій можетъ быть выведена изъ свойствъ Θ-функцій. Такое фундаментальнаго свойства значеніе Θ-функцій для теоріи эллиптическихъ функцій побудило Эрмита въ его «Note sur la théorie des fonctions elliptiques», приложенной къ 6-му изданію «Traité élémentaire de calcul differential et de calcul intégral» Лакроа, избрать для введенія въ анализъ этихъ функцій путь обобщеній. Но если даже этотъ путь и не считать до нѣкоторой степени искусственнымъ, то все-таки нужно замѣтить, что онъ не отвѣчаетъ историческому ходу развитія науки, такъ-какъ на самомъ дѣлѣ только интегральное исчисленіе привело науку къ этимъ новымъ трансцендентнымъ; а потому очень желательно было имѣть способъ для непосредственнаго перехода отъ эллиптическихъ интеграловъ къ Θ-функціямъ, въ особенности послѣ того какъ Клебшъ и Горданъ показали въ своей «Theorie der Abelschen Functionen», что такой переходъ возможенъ и для болѣе высшихъ трансцендентныхъ — Абелевыхъ. Въ предисловіи къ этому сочиненію они прямо говорятъ, что на такой переходъ отъ Абелевыхъ интеграловъ къ Θ-функціямъ многихъ перемѣнныхъ они были наведены формулою Якоби

$$e^{\int_0^u Z(u)\,\mathrm{d}u} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)},$$

которую онъ вывелъ, какъ извѣстно, чрезъ интегрированіе разложенія въ тригонометрическій рядъ интеграла второго рода $Z(u)$ и замѣну получающагося во второй части послѣ перехода отъ логариѳма къ числу разложенія Θ-функціи въ безконечное произведеніе знакомъ этой функціи. Этимъ замѣчаніемъ своимъ они намѣтили путь для перехода отъ эллиптическихъ интеграловъ къ Θ-функціямъ; но никто, сколько мнѣ извѣстно, не указалъ самаго способа перехода по этому пути отъ одной трансцендентной къ другой. Касательно этого предмета я встрѣтилъ только одну замѣтку мюнхенскаго профессора Бриля въ Mathematischen Annalen. Bd. 17, S. 87 подъ заглавіемъ «Ueber das Additions-theorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen», въ которой онъ занимается больше выводомъ теоремы сложенія для эллиптическихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ и нормировкою интеграла 2-го рода, и только подъ конецъ указываетъ, что такъ какъ интегралъ третьяго рода выражается линейнымъ образомъ чрезъ интегралы отъ интеграловъ 2-го рода, то этотъ послѣдній, т. е. $\int_0^u Z(u)\,\mathrm{d}u$ слѣдуетъ ввести какъ новый элементъ въ теорію эллиптическихъ функцій, и такъ какъ эта функція имѣетъ безконечности логариѳмическаго характера, то слѣдуетъ положить

$$\int_0^u Z(u)\,\mathrm{d}u = \log\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)}.$$

Но такое положеніе кажется мнѣ недостаточно мотивированнымъ и не представляетъ естественнаго перехода отъ интеграла къ Θ-функціи, такъ какъ эта функція появляется здѣсь не какъ результатъ аналитическихъ дѣйствій надъ интегралами 2-го рода. Пересматривая по этому поводу сочиненія Якоби и Сомова по теоріи эллиптическихъ функцій, мнѣ удалось замѣтить, что остается очень немногое прибавить къ тому, что находимъ у Якоби и Сомова, чтобы имѣть естественный переходъ отъ эллиптическихъ интеграловъ втораго рода къ Θ-функціямъ, а также и къ Вейерштрассовскимъ Al (u), причемъ само собою выступаетъ наружу то обстоятельство, что какъ тѣ, такъ и другія функціи суть только частные случаи цѣлаго безчисленнаго ряда функцій, которыя нѣмцы называютъ doppeltmultiplicatorisch-periodische, а Эрмитъ fonctions intermédiaires (см. *Briot et Bouquet* Théorie des fonctions elliptiques, 2 éd. P. 236); обѣ функціи, означенныя въ этомъ сочиненіи Бріо и Буке чрезъ θ и ϑ, суть въ нѣкоторомъ смыслѣ предѣльныя всѣхъ этихъ fonctions intermédiaires.

Коротенькая замѣтка объ этомъ предметѣ, подъ заглавіемъ— «Ueber das Umkehr-problem der elliptischen Integrale», была послана мною въ іюнѣ мѣсяцѣ въ редакцію «Mathematischen Annalen», и нынѣ уже появилась въ XXII томѣ Math. Ann., стр. 450. Предлагаемая нынѣ вниманію общества замѣтка посвящена тому-же предмету, но представляетъ дальнѣйшія развитія.

Въ § 53 «Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum» Якоби находимъ такую формулу

$$\frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u} =$$

$$= Z(a) + \frac{1}{2} Z(u-a) - \frac{1}{2} Z(u+a); \qquad (1)$$

Это равенство *Сомовъ* (Основанія теоріи эллиптическихъ функцій. Спб. 1852, стр. 175), а за нимъ и *Хандриковъ* (Элементарная теорія эллиптическихъ функцій и интеграловъ съ приложеніемъ къ рѣшенію основного вопроса геодезіи. М. 1867, стр. 97) интегрируютъ по a отъ $a=0$ и получаютъ слѣдующее:

$$-\frac{1}{2}\log(1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u)=$$

$$=\int_0^a Z(a)\,\mathrm{d}a+\frac{1}{2}\int_0^a Z(u-a)\,\mathrm{d}a-\frac{1}{2}\int_0^a Z(u+a)\,\mathrm{d}a, \quad (2)$$

изъ котораго, подражая Якоби (см. «De functionibus ellipticis commentatio prima et altera», стр. 304 «*Jacobis* Gesammelte Werke». Bd. I, новое изданіе, или Crelle Journ. Bd. 4, стр. 371—390), съ помощію выведеннаго ими по способу Якоби равенства

$$\int_0^u Z(u)\,\mathrm{d}u=\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)}, \quad (3)$$

выводятъ такое

$$\frac{\Theta(u+a)\Theta(u-a)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}a}=\left[\frac{\Theta(u)\Theta(a)}{\Theta(o)}\right]^2. \quad (4)$$

Но можно, на-оборотъ, изъ (2) получить (4) и изъ него уже (3), чрезъ что выигрываемъ натуральный переходъ къ Θ-функціи; и для этого стоитъ только перемѣнить въ интегралахъ перемѣнную a на другую. Положимъ, во второмъ членѣ второй части равенства (2) $u-a=w$, тогда будетъ

$$\int_0^u Z(u-a)\,\mathrm{d}a=-\int_u^{u-a} Z(w)\,\mathrm{d}w=\int_{u-a}^u Z(w)\,\mathrm{d}w=$$

$$=\int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w-\int_0^{u-a} Z(w)\,\mathrm{d}w;$$

а въ третьемъ членѣ $u+a=w$; тогда

$$\int_0^a Z(u+a)\,\mathrm{d}a = \int_a^{u+a} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^{u+a} Z(w)\,\mathrm{d}w - \int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w;$$

послѣ подстановки этихъ выраженій во (2) и умноженія его на -2 равенство это принимаетъ такой видъ:

$$\log(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u) =$$

$$= \int_0^{u+a} Z(w)\mathrm{d}w + \int_0^{u-a} Z(w)\mathrm{d}w - 2\int_0^u Z(w)\mathrm{d}w - 2\int_0^a Z(w)\mathrm{d}w,$$

откуда чрезъ переходъ отъ логариѳма къ числу получаемъ

$$1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u = \frac{e^{\int_0^{u+a} Z(w)\mathrm{d}w}\cdot e^{\int_0^{u-a} Z(w)\mathrm{d}w}}{\left[e^{\int_0^u Z(w)\mathrm{d}w}\right]^2\cdot\left[e^{\int_0^u Z(w)\mathrm{d}w}\right]^2}. \quad (5)$$

Здѣсь вторая часть составлена изъ значеній функціи

$$e^{\int_0^w Z(w)\,\mathrm{d}w}$$

для различныхъ значеній аргумента w. Если ввести особый знакъ для этой функціи, положивъ:

$$e^{\int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)} \qquad (6)$$

(чтобы значеніе функціи $\Theta(u)$ для $u=0$ оставить произвольнымъ, а не $=1$), то полученный результатъ (5) такъ можемъ написать:

$$1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u = \frac{[\Theta(o)]^2\Theta(u+a)\Theta(u-a)}{[\Theta(u)]^2.[\Theta(a)]^2} \qquad (7)$$

что представляетъ, только въ другой формѣ, соотношеніе (4), тогда какъ равенство (6) служитъ *опредѣленіемъ* (definition) функціи Θ, и изъ этого равенства можетъ быть выведена вся теорія этихъ функцій.

Замѣтимъ при этомъ еще, что хотя въ формулѣ (1) у Якоби $Z(u)$ означаетъ совершенно опредѣленный интегралъ 2-го рода, именно такой

$$Z(u) = \frac{F^1 \mathrm{E}(\mathrm{am}\, u) - \mathrm{E}^1 . u}{F^1} = \frac{F^1 - \mathrm{E}^1}{F^1} u - \int_0^u k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du,$$

но мы можемъ разумѣть подъ $Z(u)$ въ (1) самый общій интегралъ 2-го рода, т. е. вида

$$Cu - \int_0^u k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du,$$

гдѣ C какая угодно постоянная; потому что равенство (1) не нарушится отъ придачи къ нему тождества:

$$0 = \left(C - \frac{F^1 - \mathrm{E}^1}{F^1} \right) \left(a + \frac{1}{2}(u - a) - \frac{1}{2}(u + a) \right),$$

а тогда и можно будетъ принять въ немъ

$$Z(u) = Cu - \int_0^u k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du. \qquad (8)$$

Но тогда и наша Θ-функція будетъ общнѣе Якобіевой, заключая въ себѣ какъ частный случай и Якобіеву — когда $C = \dfrac{F^1 - \mathrm{E}^1}{F^1}$, и Вейерштрассовскую $\mathrm{Al}(u)$, когда $C = 0$ и $\Theta(o) = 1$.

Пусть

$$\left.\begin{aligned}\int_0^K k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u\, \mathrm{d}u = J_0\\ \int_K^{K+K'i} k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u\, \mathrm{d}u = J_0' i\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

далѣе пусть

$$\left.\begin{aligned}&Z(K) = CK - J_0 = J\\ Z(K+K'i) - Z(K) = CK'i - &\int_K^{K+K'i} k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u\, \mathrm{d}u =\\ &= (CK' - J'_0)i = J'i;\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

тогда изъ (1) легко получаются, какъ извѣстно, такія равенства:

$$\left.\begin{aligned}Z(u+2K) = Z(u) + 2J\\ Z(u+2K'i) = Z(u) + 2J'i.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Съ помощію этихъ равенствъ найдемъ интегралъ $\int_0^{u+2K} Z(w)\mathrm{d}w$ такимъ образомъ:

$$\int_0^{u+2K} Z(w)\mathrm{d}w = \int_0^{2K} Z(w)\mathrm{d}w + \int_{2K}^{2K+u} Z(w)\mathrm{d}w; \quad (12)$$

первый членъ второй части

$$\begin{aligned}\int_0^{2K} Z(w)\mathrm{d}w &= \int_0^{K} Z(w)\mathrm{d}w + \int_K^{2K} Z(w)\mathrm{d}w =\\ &= \int_0^{K} Z(w)\mathrm{d}w - \int_K^{0} Z(2K-w)\mathrm{d}w =\\ &= \int_0^{K} \Big(Z(2K-w) - Z(-w)\Big)\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

или на основаніи перваго изъ (11) равенствъ:

$$\int_0^{2K} Z(w)\mathrm{d}w = 2J.K. \quad (13)$$

Второй членъ въ (12)

$$\int_{2K}^{2K+u} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^u Z(w+2K)\,\mathrm{d}w = \int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w + 2Ju;$$

подставляя отсюда и изъ (13) въ (12), получимъ:

$$\int_0^{u+2K} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w + 2J(u+K). \quad (14)$$

Точно также

$$\int_0^{u+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^{K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w + \int_{K+2K'i}^{u+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w; \quad (15)$$

но

$$\int_0^{K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^K Z(w)\,\mathrm{d}w + \int_K^{K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w =$$

$$= J + \int_0^{2K'i} Z(w+K)\,\mathrm{d}w,$$

а

$$\int_0^{2K'i} Z(w+K)\,\mathrm{d}w = \int_0^{K'i} J(w+K)\,\mathrm{d}w + \int_{K'i}^{2K'i} Z(w+K)\,\mathrm{d}w =$$

$$= \int_0^{K'i} Z(w+K)\,\mathrm{d}w - \int_{K'i}^{0} Z(2K'i - w - K)\,\mathrm{d}w -$$

$$= \int_0^{K'i} \Big(Z(2K'i - w - K) - Z(-w-K) \Big)\mathrm{d}w = 2J'i.K'i,$$

такъ что

$$\int_0^{K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w = J + 2J'i.K'i; \quad (16)$$

второй же членъ въ (15)

$$\int_{K+2K'i}^{u+2K'i} Z(w)\,dw = \int_K^u Z(w+2K'i)\,dw =$$

$$= \int_K^u Z(w)\,dw + 2J'i(u-K) =$$

$$= -\int_u^K Z(w)\,dw + 2J'i(u-K).$$

Подставляя отсюда и изъ (16) въ (15), получимъ

$$\int_0^{u+2K'i} Z(w)\,dw = \int_0^u Z(w)\,dw + 2J'i(u-K+K'i), \quad (17)$$

такъ какъ $J - \int_u^K Z(w)\,dw = \int_0^u Z(w)\,dw.$

Интегралы (14) и (17) получены нами при опредѣленномъ пути интегрированія; если измѣнить путь интегрированія, то значенія интеграловъ измѣнятся на кратное $2\pi i$, что слѣдуетъ изъ того, что функція $\int_0^u Z(w)\,dw$ въ точкахъ $u=2mK+(2n+1)K'i$ обращается въ безконечность какъ $\log u$, но легко можетъ быть и прямо провѣрено вычисленіемъ интеграла вокругъ такой точки; при этомъ, такъ какъ по (11)

$$Z(w+2mK+(2n+1)K'i) = Z(w+K'i) + \\ + 2mJ + 2nJ'i,$$

достаточно сдѣлать это для точки $w=K'i$. Интегрированіе вокругъ этой точки $K'i$ можетъ быть сдѣлано по параллелограму, котораго эта точка есть центръ и котораго основаніе есть часть вещественной оси отъ $w=-K$ до $w=+K$, а высота, часть мнимой длиною $2K'$. Этотъ интегралъ разобьется на сумму четырехъ такимъ образомъ:

$$\int_{-K}^{+K} Z(w)\,\mathrm{d}w + \int_{+K}^{+K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w + \int_{+K+2K'i}^{-K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w +$$

$$+ \int_{-K+2K'i}^{-K} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_{-K}^{+K} \Big(Z(w) - Z(w+2K'i) \Big)\,\mathrm{d}\,w +$$

$$+ \int_{0}^{2K'i} \Big(Z(w+K) - Z(w-K) \Big)\,\mathrm{d}w = -2J'i\,.\,2K +$$

$$+ 2J\,.\,2K'i = 4\,(JK' - J'K)\,i;$$

но по теоремѣ Лежандра:

$$KJ'_0 - K'J_0 = \frac{\pi}{2}; \tag{18}$$

слѣдовательно интегралъ вокругъ точки $w = K'i$ есть $2\pi i$, что и требовалось доказать.

На функцію $\Theta(u)$ этотъ придаточный членъ, кратный $2\pi i$, не будетъ имѣть вліянія, какъ то видно изъ (6), потому что $e^{2m\pi i} = 1$; слѣд. въ этой формулѣ (6) путь интегрированія отъ 0 до u остается произвольнымъ, ничѣмъ неограниченнымъ какъ только тѣмъ, чтобы не проходилъ чрезъ безконечности, а функція $\Theta(u)$ для каждаго u получаетъ одно опредѣленное значеніе, слѣд. есть однозначная функція отъ u.

Съ помощію (15) и (17) получаются слѣдующія функціональныя уравненія для Θ-функціи:

$$\left.\begin{aligned} \Theta(u+2K) &= e^{2J(u+K)}\,\Theta(u), \\ \Theta(u+2K'i) &= e^{2J'i(u-K+K'i)}\,\Theta(u), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

откуда и видно, что вообще это суть функціи intermédiaires Эрмита.

Если C опредѣлить такъ, чтобы было

$$J = CK - J_0 = 0,$$

что даетъ: $C=\frac{J_0}{K}$ и слѣдовательно

$$J'=CK'-J'_0=\frac{J_0K'-KJ'_0}{K}=-\frac{\pi}{2K},$$

на основанiи (18); то формулы (19) примутъ такой видъ

$$\left.\begin{aligned}&\Theta(u+2K)=\Theta(u)\\&\Theta(u+2K'i)=-e^{-\frac{\pi i}{K}(u+K'i)}\Theta(u)\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

или полагая вмѣстѣ съ Якоби $e^{-\pi\frac{K'}{K}}=q$;

$$\left.\begin{aligned}&\Theta(u+2K)=\Theta(u)\\&\Theta(u+2K'i)=-\frac{1}{q}e^{-\frac{K\pi i}{K}}\Theta(u)\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

что представляетъ функцiональныя уравненiя Якобiевой Θ-функцiи. Изъ этихъ уравненiй онъ вывелъ въ своихъ лекцiяхъ и разложенiе этихъ функцiй въ тригонометрическiе ряды и безконечныя произведенiя, а также теоремы сложенiя и дифференцiальныя уравненiя эллиптическихъ функцiй[1].

Если опредѣлить C подъ условiемъ, чтобы было:

$$J'=CK'-J'_0=0,$$

что даетъ $C=\frac{J'_0}{K'}$, и слѣдовательно:

---

[1] Въ изданныхъ нынѣ его лекцiяхъ нѣтъ разложенiй въ ряды, но въ имѣющихся у меня рукописныхъ лекцiяхъ эта статья разработана очень подробно, равно какъ и другiе отдѣлы этой теорiи, а также и начала ультра-эллиптическихъ интеграловъ.

$$J = CK - J_0 = \frac{KJ'_0 - K'J_0}{K} = \frac{\pi}{2K},$$

то уравненія (19) примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_{(0)}(u+2K) = e^{\frac{\pi}{K'}(u+K)}\,\Theta_{(0)}(u) \\ \Theta_{(0)}(u+2K'i) = \Theta_{(0)}(u), \end{array}\right\} \quad (22)$$

или, полагая $q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_{(0)}(u+2K) = \frac{1}{q'}\,e^{\frac{\pi u}{K'}}\,\Theta_{(0)}(u) \\ \Theta_{(0)}(u+2K'i) = \Theta_{(0)}(u). \end{array}\right\} \quad (23)$$

Функціи, удовлетворяющія уравненіямъ (21), и функціи, удовлетворяющія уравненіямъ (23), соотвѣтствующія обращенію перваго или втораго періоднаго множителя въ единицу, суть какъ бы крайнія въ ряду безчисленнаго множества функцій съ двумя періодными множителями. Послѣднія, т. е. опредѣляемыя системою уравненій (23), выведены были Якоби въ его лекціяхъ изъ первыхъ чрезъ преобразованіе ряда, въ который разлагаются первыя; способъ этотъ изложенъ у Эннепера (*Enneper* Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Halle. 1876. § 17 стр. 86).

Покажемъ теперь, какъ можно изъ (6) вывести выраженія эллиптическихъ функцій чрезъ Θ-функцію. Для этого воспользуемся извѣстнымъ преобразованіемъ дифференціальнаго уравненія эллиптическихъ функцій:

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = k^2 \sin^2 \operatorname{am} u - \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u},$$

которое можно и такъ представить:

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = k^2 \sin^2 \operatorname{am} u - k^2 \sin^2 \operatorname{am} (u + K'i). \quad (24)$$

Изъ (6) посредствомъ двукратнаго дифференцированія по взятіи сначала логариѳма находимъ:

$$Z(u) = \frac{d \log \Theta(u)}{du}, \quad (25)$$

и

$$C - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u = \frac{d^2 \log \Theta(u)}{du^2}; \quad (26)$$

съ помощію послѣдняго изъ (24) получаемъ сперва:

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = C - \frac{d^2 \log \Theta(u)}{du^2} - \left(C - \frac{d^2 \log \Theta(u + K'i)}{du^2} \right)$$

или

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = \frac{d^2 \log \dfrac{\Theta(u + K'i)}{\Theta(u)}}{d^2 u},$$

откуда чрезъ интегрированіе находимъ

$$\sin \operatorname{am} u = e^{cu + c'} \frac{\Theta(u + K'i)}{\Theta(u)}, \quad (27)$$

гдѣ c и c' постоянныя интегрированія, которыя опредѣлятся слѣдующимъ образомъ.

Перемѣняя въ (27) u на $u + K'i$ и сличая результатъ съ первоначальнымъ видомъ этого равенства, получимъ такое:

$$\frac{1}{k \sin \operatorname{am} u} = e^{c(u+K'i)+c'} \frac{\Theta(u+2K'i)}{\Theta(u+K'i)} = \frac{1}{k} e^{-cu-c'} \frac{\Theta(u)}{\Theta(u+K'i)},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\Theta(u+2K'i) = \frac{1}{k} e^{-c(2u+K'i)-2c'} \Theta(u);$$

сличая это со вторымъ изъ (19), находимъ:

$$-\log k - c(2u+K'i) - 2c' = 2J'i(u - K + K'i) + 2m\pi i,$$

гдѣ m какое угодно цѣлое число; это уравненіе распадается на два слѣдующія:

$$-2c = 2J'i;$$

$$-\log k - cK'i - 2c' = -2J'iK - 2J'K' + 2m\pi i.$$

Изъ перваго получаемъ $c = -J'i$; изъ второго:

$$c' = -\log\sqrt{k} + \frac{1}{2}J'K' + (J'K - m\pi)i.$$

Внося это въ (27) будемъ имѣть:

$$\sin \operatorname{am} u = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{e^{-J'i(u-K+\frac{1}{2}K'i)}\,\Theta(u+K'i)}{\Theta(u)},$$

или

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}, \qquad (28)$$

если положить

$$\mathrm{H}(u) = \pm e^{-J'i(u-K+\frac{1}{2}K'i)}\,\Theta(u+K'i), \qquad (29)$$

Для Якобіевыхъ Θ-функцій $J=0$, и слѣд. $J'K=-\frac{\pi}{2}$;

потому эта формула принимаетъ такой видъ:

$$\mathrm{H}(u)=\mp ie^{-\frac{\pi}{4K}(K'-2ui)}\Theta(u+K'i)$$

или

$$\mathrm{H}(u)=\mp i\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{u\pi i}{2K}}\Theta(u+K'i). \qquad (30)$$

На-счетъ двойнаго знака въ этой послѣдней формулѣ вопросъ рѣшится такимъ образомъ.

Полагая въ (28) $u=K$, находимъ

$$\sqrt{k}=\frac{\mathrm{H}(K)}{\Theta(K)}, \qquad (31)$$

откуда выводимъ, что знаки $\mathrm{H}(K)$ и $\Theta(K)$ должны быть одинакіе, если $\sqrt{k}>0$, что мы принимаемъ обыкновенно. Далѣе, изъ (6) слѣдуетъ, что:

$$e^{\int_0^{K+K'i}Z(w)\,\mathrm{d}w}=e^{\int_K^{K+K'i}Z(w)\,\mathrm{d}w}\,e^{\int_0^{K}Z(w)\,\mathrm{d}w}=\frac{\Theta(K+K'i)}{\Theta(o)},$$

откуда

$$\frac{\Theta(K+K'i)}{\Theta(K)}=e^{\int_K^{K+K'i}Z(w)\,\mathrm{d}w} \qquad (32)$$

Но вторая часть этого равенства есть вещественное положительное количество. Дѣйствительно:

$$\int_K^{K+K'i}Z(w)\,\mathrm{d}w=\int_0^{K'i}Z(w+K)\,\mathrm{d}w=i\int_0^{K'}Z(K+vi)\,\mathrm{d}v; \quad (33)$$

но

$$Z(K+vi) = C(K+vi) - \int_0^{K+vi} k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, \mathrm{d}w =$$

$$= CK + Cvi - \int_0^{K} k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, \mathrm{d}w - \int_K^{K+vi} k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, \mathrm{d}w =$$

$$= Cvi - \int_K^{K+vi} k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, \mathrm{d}w = Cvi - \int_0^{vi} k^2 \sin^2 \mathrm{am}(w+K)\, \mathrm{d}w;$$

такъ какъ $\sin \mathrm{am}(w+K) = \dfrac{\cos \mathrm{am}\, w}{\Delta \mathrm{am}\, w}$,

и: $$\cos \mathrm{am}(vi) = \frac{1}{\cos \mathrm{am}(v, k')}$$

$$\Delta \mathrm{am}(vi) = \frac{\Delta \mathrm{am}(v, k')}{\cos \mathrm{am}(v, k')},$$

слѣд. $$\sin \mathrm{am}(K+vi) = \frac{1}{\Delta \mathrm{am}(v, k')},$$

то

$$\int_0^{vi} k^2 \sin^2 \mathrm{am}(w+K)\, \mathrm{d}w = i \int_0^{v} k^2 \sin^2 \mathrm{am}(K+vi)\, \mathrm{d}w =$$

$$= i \int_0^{v} \frac{k^2 \mathrm{d}v}{\Delta^2 \mathrm{am}(v, k')};$$

а потому

$$Z(K+vi) = \left(Cv - \int_0^{v} \frac{k^2 \mathrm{d}v}{\Delta^2 \mathrm{am}(v, k')}\right) i$$

и на основанiи (33)

$$\int_K^{K+K'i} Z(w)\mathrm{d}w = -\int_0^{K'} \left(Cv - \int_0^{v} \frac{k^2 \mathrm{d}v}{\Delta^2 \mathrm{am}(v, k')}\right) \mathrm{d}v;$$

что очевидно вещественное, и слѣд. вторая часть (32) есть положительное количество, что и требовалось доказать.

Раздѣлимъ теперь уравненiе (30) для $u = K$ на $\Theta(K)$ и воспользуемся (31) и (32); будемъ имѣть:

$$\sqrt{k} = \mp i^2 \sqrt[4]{q}\,.\,e^{\int_K^{K+K'i} Z(w)\,dw}$$

здѣсь первая часть положительная, множитель $\sqrt[4]{q}\,.\,e^{\int_K^{K+K'i} Z(w)\,dw}$ также положительный по сейчасъ доказанному, если еще подъ $\sqrt[4]{q}$ разумѣть ариѳметическій корень; $i^2 = -1$. Отсюда слѣдуетъ, что нужно взять знакъ (—) въ (30), такъ что окончательно:

$$\mathrm{H}(u) = -i\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{u\pi i}{2K}}\,\Theta(u + K'i). \qquad (34)$$

Выраженія $\cos\mathrm{am}\,u$ и $\Delta\mathrm{am}\,u$ найдутся на основаніи формулы, которою мы сейчасъ пользовались:

$$\sin\mathrm{am}(u+K) = \frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\Delta\mathrm{am}\,u};$$

подставляя сюда вмѣсто $\sin\mathrm{am}(u+K)$ его выраженіе изъ (28), будемъ имѣть:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(u+K)}{\Theta(u+K)},$$

откуда, на основаніи извѣстнаго свойства пропорцій, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{H}(u+K)} &= \frac{\Delta\mathrm{am}\,u}{\Theta(u+K)} = \frac{k'\sin\mathrm{am}\,u}{\sqrt{\Theta^2(u+K) - \frac{1}{k}\mathrm{H}^2(u+K)}} = \\ &= \frac{k'}{\sqrt{\Theta^2(u+K) - k\,\mathrm{H}^2(u+K)}}.\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Отсюда слѣдуетъ, во-первыхъ, что

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{\Theta^2(u+K) - \frac{1}{k}\mathrm{H}^2(u+K)}}{\sqrt{\frac{1}{k}\Theta^2(u+K) - \mathrm{H}^2(u+K)}};$$

сличая это съ (28) и принимая во вниманіе, что въ этой формулѣ числитель и знаменатель не могутъ обращаться въ нуль для одного и того же значенія u, мы заключаемъ, что должно быть

$$\left.\begin{aligned} \Theta^2(u+K) - \frac{1}{k}\mathrm{H}^2(u+K) &= \mathrm{H}^2(u)\,.\,C \\ \frac{1}{k}\Theta^2(u+K) - \mathrm{H}^2(u+K) &= \Theta^2(u)\,.\,C \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

гдѣ C не зависитъ отъ u. Полагая въ обоихъ равенствахъ $u=0$, и принимая во вниманіе, что $\mathrm{H}(0)=0$, какъ то слѣдуетъ изъ (28), мы получимъ:

$$\frac{\mathrm{H}^2(K)}{\Theta^2(K)} = k \quad \text{(a)}$$

согласно съ тѣмъ, что мы уже имѣли, и

$$\frac{1}{k}\Theta^2(K) - \mathrm{H}^2(K) = \Theta^2(o)C,$$

откуда съ помощію (a) получаемъ

$$C = \frac{\Theta^2(K)}{\Theta^2(o)} \cdot \frac{k'^2}{k}.$$

Это равенство показываетъ, что C положительное количество, ибо таково

$$\frac{\Theta(K)}{\Theta(o)} = e^{\int_0^K Z(u)\,du},$$

какъ легко видѣть, и $\frac{k'^2}{k}$. Полагая за-тѣмъ въ первомъ (39) $u = -K$, получаемъ изъ него

$$C = \frac{\Theta^2(o)}{\mathrm{H}^2(K)}.$$

Перемножая оба выраженія C, при помощи опять (a) получимъ: $C^2 = \frac{k'^2}{k^2}$ и слѣд.

$$C = \frac{k'}{k}.$$

Подставляя это въ (36), мы имъ дадимъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} k\Theta^2(u+K) - \mathrm{H}^2(u+K) &= k'\mathrm{H}^2(u) \\ \Theta\,(u+K) - k\mathrm{H}^2(u+K) &= k'\Theta^2(u). \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

На основаніи послѣдняго изъ этихъ двухъ равенствъ пропорція (35) такъ можетъ быть написана:

$$\frac{\cos\operatorname{am} u}{\frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{H}(u+K)} = \frac{\Delta\operatorname{am} u}{\Theta(u+K)} = \frac{\sqrt{k'}}{\Theta(u)} \quad (38)$$

откуда и получаемъ искомыя выраженія:

$$\left.\begin{aligned} \cos\operatorname{am} u &= \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}(u+K)}{\Theta(u)} \\ \Delta\operatorname{am} u &= \sqrt{k}\,\frac{\mathrm{H}(u+K)}{\Theta(u)}. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Интегралъ втораго рода чрезъ Θ-функцію выражается формулою

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

получаемою изъ (6) логариѳмическимъ дифференцированіемъ. Что же касается до интеграловъ третьяго рода, то легко получить сперва выраженіе ихъ чрезъ интегралы отъ интеграловъ 2-го рода. Для этого проинтегрируемъ равенство (1) по u отъ $u=0$; мы получимъ тогда:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} u} = \\ &= u Z(a) + \frac{1}{2}\int_0^u Z(u-a)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^u Z(u+a)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Налѣво здѣсь мы имѣемъ интегралъ третьяго рода, для котораго Якоби употреблялъ такое знакоположеніе:

$$\Pi(u,a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}; \qquad (42)$$

что касается до второй части, то замѣчаемъ, что

$$\int_0^u Z(u-a)\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{u-a} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^{u-a} Z(w)\,\mathrm{d}w + \int_{-a}^0 Z(w)\,\mathrm{d}w =$$

$$= \int_0^{u-a} Z(w)\,\mathrm{d}w - \int_0^a Z(w)\,\mathrm{d}w;$$

$$\int_0^u Z(u+a)\,\mathrm{d}u = \int_a^{u+a} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^{u+a} Z(w)\,\mathrm{d}w - \int_0^a Z(w)\,\mathrm{d}w;$$

слѣд. равенство (41) можемъ такъ представить:

$$\Pi(u,a) = uZ(a) + \frac{1}{2}\int_0^{u-a} Z(w)\,dw - \frac{1}{2}\int_0^{u+a} Z(w)\,dw. \quad (43)$$

Изъ этого равенства между прочимъ прямо слѣдуетъ теорема о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ; потому что

$$\int_0^{a-u} Z(w)\,dw = \int_0^{u-a} Z(w)\,dw\,;$$

слѣдовательно, переставивъ въ (43) u съ a и вычитая изъ (43), получимъ

$$\Pi(u,a) - \Pi(a,u) = uZ(a) - aZ(u), \quad (44)$$

что и выражаетъ упомянутую теорему.

Подставляя теперь выраженіе $\int_0^w Z(w)\,dw$ чрезъ Θ изъ (6) въ (43), получимъ искомое выраженіе интеграла третьяго рода чрезъ Θ-функцію, именно:

$$\Pi(u,a) = uZ(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}. \quad (45)$$

Протоколъ засѣданія 29-го мая.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, Г. В. Левицкій, И. К. Шейдтъ, А. А. Клюшниковъ, А. В. Маевскій, И. Д. Линицкій, А. П. Грузинцевъ и студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. секретарь доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:
   1) Mathesis № 4.
   2) Journal de mathématiques élémentaires №№ 3 et 4.
   3) Journal de mathématiques spéciales, №№ 3 et 4.
   4) Математическій листокъ № 7, 8 и 9. Годъ II, 1881—1882.
   5) Математическій сборникъ. Т. X (1882) и I-й выпускъ XI тома.
   6) Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Képler le principe de l'attraction, par *M. J. Graindorge* (отъ автора).
   7) Sur certaines formules dn mouvement elliptique, par *J. Graindorge* (отъ автора).
   8) Sur le multiplicateur des équations differentielles linéaires du 2-e ordre, par *V. G. Imschenetsky* (отъ автора).

2. *К. А. Андреевъ* доложилъ о полученіи статьи профессора К. А. Поссе подъ заглавіемъ: О дополнительномъ членѣ въ формулѣ П. Л. Чебышева для приближеннаго выраженія одного опредѣленнаго интеграла чрезъ другіе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ.

3. *П. С. Флоровъ* (студентъ университета) сообщилъ о обобщенныхъ Риккатіевскихъ уравненіяхъ.

4. *В. П. Алексѣевскій* сообщилъ тоже объ обобщеніяхъ уравненія Риккати.