УДК 513.88

В. П. ФОНФ

О БОРЕЛЕВСКОМ ТИПЕ МНОЖЕСТВА СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Известно, что множество сходимости Q последовательности $\{A_n\}$ линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в такое же Z есть линейное многообразие типа $F_{\sigma\delta}$ (напомним, что $Q = \{x \in X : \lim A_n^x$ существует$\}$). Статья посвящена выяснению необходимых условий, при которых борелевский тип множества Q «лучше», чем $F_{\sigma\delta}$. Нас будет интересовать ситуация $Q \neq X$.

Очевидно, минимальная дополнительная (по сравнению с общим случаем) информация о борелевском типе множества сходимости состоит в следующем: Q имеет тип $G_{\delta\sigma}$. Рассмотрению случая «Q имеет тип $F\sigma$» посвящена работа Мазура и Штернбаха [1]. Рассмотрению случая «Q имеет тип $G_{\delta\sigma}$» посвящена работа Банаха и Мазура [2], в которой ошибочно утверждается, что если множество сходимости Q имеет тип $G_{\delta\sigma}$, то оно имеет тип F_σ. В действительности, в этом случае имеет место несколько более слабый факт: множество Q содержит линейное многообразие L, имеющее тип F_σ и являющееся образом некоторого банахова пространства (см. теорему 3 настоящей работы).

При рассмотрении множества сходимости Q последовательностей линейных ограниченных операторов $\{A_n\}$, действующих из одного банахова пространства X в другое Z, возникает еще одно банахово пространство. Именно, введем на линейном многообразии Q новую норму: $|||x||| = \sup_n \{ \| x \|, \| A_n x \| \}$, $x \in Q$.

Нетрудно проверить, что в этой норме линейное многообразие Q становится банаховым пространством. На протяжении всей работы будем обозначать его через $Y\{A_n\}$ и через T будем обозначать естественное вложение $Y\{A_n\}$ в X. Таким образом, $Q = T(Y\{A_n\})$ и, следовательно, борелевский тип множества Q совпадает с борелевским типом образа пространства $Y\{A_n\}$ при инъекции T, а последний в свою очередь тесно связан со свойствами пространства $Y\{A_n\}$ и предельного оператора A_0, определенного на множестве Q следующим образом:

$$A_0 x = \lim_n A_n x, \ x \in Q.$$

Заключим наше введение примером, показывающим, что множество сходимости может иметь тип $G_{\delta\sigma}$, не будучи множеством типа F_σ. Введем следующие обозначения: $\{v_i\}$ — естественный базис пространства l_2; $\{v_i^*\}$ — сопряженная к $\{v_i\}$ система, т. е. тоже естественный базис l_2; $\{t_i\}$ — естественный базис пространства c_0; $\{e_i\}$ — естественный базис пространства l_1:

$$u_n = \sum_1^n t_i, \ u_n^* = e_n - e_{n+1}, \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Нетрудно проверить, что $\{u_n\}$ — базис пространства c_0 с сопряженной системой $\{u_n^*\}$, причем подпространство $E = [u_n^*]_1^\infty \subset l_1$, натянутое на множество $\{u_n^*\}_1^\infty$, имеет в l_1 коразмерность единица и w^*-замыкание единичного шара $U(E)$ подпространства E совпадает с единичным шаром (в эквивалентной норме) пространства l_1. Определим компактное отображение B пространства l_2 в c_0 по формуле

$$B(\sum a_i v_i) = \sum 2^{-i} a_i u_i, \ \sum a_i v_i \in l_2.$$

Пользуясь сепарабельностью пространства l_1 и замкнутостью множества $B^*(U(l_1))$, можно показать [3], что образ любого подпространства l_1 при отображении B^* есть множество типа $G_{\delta\sigma}$. В частности, $B^*(E)$ — множество типа $G_{\delta\sigma}$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ определим отображение A_n пространства $l_2 \to l_1$ по формуле

$$A_n(\sum_{i=1}^\infty a_i v_i^*) = \sum_{i=1}^\infty 2^i a_i u_i^*, \ \sum_1^\infty a_i v_i^* \in l_2.$$

Пользуясь базисностью последовательности $\{u_i^*\}$, нетрудно установить, что множество сходимости $Q\{A_n\}$ совпадает с $B^*(E)$ и, следовательно, имеет тип $G_{\delta\sigma}$. Допустим теперь, что множество $Q\{A_n\}$, а значит, и $B^*(E)$ имеет тип F_σ, откуда с помощью леммы 1 делаем вывод: в пространстве E существует эквивалентная норма с единичным шаром $W(E)$ такая, что $B^*(W(E))$ — замкнутое и, следовательно, (B^* — компактное отображение), компактное множество. Но в силу сделанных выше замечаний существует элемент $f_0 \in w^*\text{cl}\, W(E) \setminus W(E)$. Последнее утверждение легко приводит к противоречию с компактностью множества $B^*(W(E))$. Итак, множество сходимости $Q\{A_n\}$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$, не будучи F_σ-множеством.

Несколько замечаний об обозначениях и определениях. Кроме введенных выше будем использовать следующие. Пусть E — линейное нормированное пространство. Через $U(E)$ ($S(E)$) будем обозначать единичный шар (единичную сферу) пространства E. Если $A \subset E$, то через $[A]$ обозначим замкнутую линейную оболочку множества A.

Линейное многообразие L в пространстве E^* будем называть нормирующим, если

$$\inf_{x \in E} \sup_{f \in S(L)} f(x) > 0.$$

Под термином инъекция будем понимать линейное непрерывное взаимно однозначное отображение. Подпространство — замкнутое линейное многообразие банахова пространства. Все банаховы пространства будем считать вещественными и (если не оговорено противное) бесконечномерными. Если X и Z — банаховы пространства, то через $L(X, Z)$ обозначим пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Z.

Сформулируем несколько лемм. Первая из них доказана в [3].

Лемма 1. *Пусть T — инъекция банахова пространства Y в такое же X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) $T(Y)$ — множество типа F_σ в X;
2) существует эквивалентная норма на Y с единичным шаром $W(Y)$ такая, что множество $T(W(Y))$ замкнуто в X. Доказательство следующей леммы содержится в [4].

Лемма 2. *Пусть Y — сепарабельное банахово пространство и T — инъекция Y в некоторое банахово пространство X. Тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) линейное многообразие $T^*(X^*)$ — нормирующее для Y; 2) отображение T^{-1} принадлежит первому классу Бэра, т. е. существует последовательность $\{g_i\}$ непрерывных отображений множества $T(Y)$ в Y такая, что для каждого $y \in Y$ $\lim g_i(Ty) = y$.*

Лемма 3. *Пусть X и Z — банаховы пространства, $\{A_n\} \subset L(X, Z)$ и T — естественное вложение пространства $Y\{A_n\}$ в X. Тогда линейное многообразие $T^*(X^*)$ является нормирующим (даже 1-нормирующим) для пространства $Y\{A_n\}$.*

Доказательство. Пусть $y \in S(Y\{A_n\})$, тогда по определению нормы в пространстве $Y\{A_n\}$ имеем $1 = \|y\| = \sup_n \{\|Ty\|, \|A_nTy\|\} =$

$$= \sup_n \{\max\{f(Ty) : f \in U(X^*)\}, \qquad \max\{g(A_nTy) : g \in U(Z^*)\}\} =$$

$=\max \{\max \{(T^*f)(y) : f \in U(X^*)\}, \sup_n \max \{((A_nT)^*g)(y) : g \in U(Z^*)\}\}$ (1).

Заметим, что $\|T\| \leqslant 1$ и $\|A_nT\| \leqslant 1$ и, кроме того, для каждого $g \in U(Z^*) : (A_nT)^*g \in T^*(X^*)$. Из сделанных замечаний и из (1) легко следует утверждение леммы.

Наш первый результат носит общий характер и будет использован при доказательстве теорем 2 и 3.

Теорема 1. *Пусть X и Y — банаховы пространства, причем существует инъекция T пространства Y в X, обладающая следующими свойствами: 1) T^{-1} — неограниченное отображение первого класса Бэра (т. е. существует последовательность непрерывных отображений $\{g_k\}$ множества $T(Y)$ в Y такая, что для всех $y \in Y : \lim g_k(Ty) = y$; 2) множество $T(Y)$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$ в X.*

Тогда из всякой последовательности $\{y_i\} \subset S(Y)$ такой, что $\lim \|Ty_i\| = 0$, можно выделить ограниченно полную базисную последовательность $\{y_{i_k}\}$, причем множество $T([y_{i_k}]_{k=1}^{\infty})$ имеет тип F_σ в X.

Доказательство. Пусть последовательность $\{y_i\} \subset S(Y)$ такова, что $\lim \|Ty_i\| = 0$. Так как линейное многообразие $T^*(X^*)$ тотально, то по теореме 1.12 ([5], с. 131) из последовательности $\{y_i\}$ можно выделить базисную последовательность. Без ущерба общности будем считать $\{y_i\}$ базисной. По теореме Крейна — Мильмана — Рутмана об устойчивости существует последовательность положительных чисел $\{a_i\}$ такая, что всякая последовательность элементов $\{z_i\} \subset Y$, обладающая свойством $\|y_i - z_i\| \leqslant a_i$, $i = 1, 2, \ldots$, является базисной и эквивалентной последовательности $\{y_i\}$. Будем считать, что $a_i < 2^{-i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Из того, что $T(Y)$ — множество типа $G_{\delta\sigma}$ и теоремы Бэра о категории следует, что существует последовательность $\{D_k\}$ открытых подмножеств X такая, что $\bigcap_1^\infty D_k \subset T(Y)$ и множество $\operatorname{cl} \bigcap_1^\infty T^{-1}(D_k)$ имеет непустую внутренность в Y. Положим $G_k = T^{-1}(D_k)$, $(k = 1, 2, \ldots)$ и без ущерба общности будем считать, что $\operatorname{cl} \bigcap_1^\infty G_k \supset 2 \cdot U(Y)$, $0 \in \bigcap_1^\infty G_k$.

Перейдем к построению подпоследовательности $\{y_{i_k}\}$. В силу плотности открытого множества G_1 в шаре $2U(Y)$ существует элемент $u_1 \in G_1$ такой, что: $\|y_1 - u_1\| \leqslant a_1$, $-u_1 \in G_1$.

Положим $A_1 = \{u_1, 0, -u_1\}$ и, воспользовавшись тем, что множество D_1 открыто, найдем такое число $b_1 > 0$, что $T(A_1) + b_1 U(X) \subset D_1$.

Пусть g_{n_1} — такое отображение, что для каждого $y \in A_1$ $\|y - g_{n_1}(Ty)\| \leqslant 2^{-1}$. В силу непрерывности отображения g_{n_1} и конечности множества A_1 существует число $c_1 > 0$ такое, что для всех $y \in A_1$ и всех x, удовлетворяющих условиям $x \in T(Y)$ и $\|x - Ty\| < c_1$, имеет место $\|g_{n_1}(x) - g_{n_1}(Ty)\| \leqslant 2^{-1}$. Так как $\lim \|Ty_i\| = 0$, то существует элемент y_{i_2} такой, что $\|Ty_{i_2}\| \leqslant 2^{-3} \min \{b_1, c_1\}$. Воспользовавшись плотностью открытого множества G_2 в шаре $2U(Y)$, можно указать элемент $u_2 \in G_2$ и набор чисел $\{t_{i2}\}_1^{m_2}$ такие, что $\|y_{i_2} - u_2\| \leqslant \min\{a_{i_2} \|Ty_{i_2}\| / \|T\|\}$ и множество $B_2 = \{t_{i2} u_2\}_1^{m_2}$ 2^{-2}-сеть на отрезке, соединяющем u_2 и $-u_2$, и $A_2 = \{u + v \in U(Y) : u \in \in A_1\ v \in B_2\} \subset G_2$. Далее, как выше, находим такое число $b_2 > 0$, что $T(A_2) + b_2 U(X) \subset D_2$ и такое отображение g_{n_2}, что для каждого $y \in A_2 : \|y - g_{n_2}(Ty)\| \leqslant 2^2$. Воспользовавшись непрерывностью отображения g_{n_2} и конечностью множества A_2, найдем такое число $c_2 > 0$, что для всех $y \in A_2$ и всех x, удовлетворяющих условиям $x \in T(Y)$ и $\|x - Ty\| < c_2$, имеет место $\|g_{n_2}(x) - g_{n_2}(Ty)\| \leqslant 2^{-2}$. Элемент y_{i_3} выберем из условия: $\|Ty_{i_3}\| \leqslant 2^{-4} \min\{b_1, b_2, c_1, c_2\}$. Опираясь теперь на плотность открытого множества G_3 в шаре $2U(Y)$, можно найти элемент $u_3 \in G_3 : \|y_{i_3} - u_3\| \leqslant \min\left\{a_{i_3} \frac{\|Ty_{i_3}\|}{\|T\|}\right\}$ и набор чисел $\{t_{i3}\}_1^{m_3}$ такой, что множество $B_3 = \{t_{i3} u_3\}_1^{m_3}$ 2^{-3}-сеть на отрезке, соединяющем u_3 и $-u_3$, и $A_3 = \{u + v + w \in U(Y) : u \in \in A_1,\ v \in B_2,\ w \in B_3\} \subset G_3$. Далее процесс построения последовательностей $\{u_i\}$, $\{y_{i_k}\}$ и множеств $\{t_{ij}\}_{i=1}^{m_j}$ ясен. В силу сделанных в начале доказательства замечаний об устойчивости легко видеть, что $\{u_i\}$ — базисная последовательность. Из построения $\{u_i\}$ легко получить, что $\|Tu_i\| \leqslant 2^{-i} \min\{b_1, \ldots, b_{i-1}, c_1, \ldots, c_{i-1}\}$. Нам необходимо доказать, что $\{u_i\}$ — ограниченно полная базисная последовательность. Начнем с более слабого свойства последовательности $\{u_i\}$. Именно: пусть последовательность $\{t_{i_j j}\}_{j=1}^{\infty}$ такова, что

$$\sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} t_{i_j j}\ u_j \right\| \leqslant 1/4, \tag{2}$$

тогда ряд $\sum t_{i_j j} u_j$ сходится.

Для доказательства заметим, что ряд $\sum t_{i_j j} T u_j$ сходится абсолютно. Пусть $x_0 = \sum t_{i_j j} T u_j$. Покажем, что для всех n $x_0 \in D_n$. Действительно,

$$\left\| \sum_{n+1}^{\infty} t_{i_j j} T u_j \right\| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \|Tu_j\| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} 2^{-j} \min\{b_1, \ldots, b_{j-1}, c_1, c_{j-1}\} \leqslant \\ \leqslant \min\{b_n, c_n\} \leqslant b_n. \tag{3}$$

Но в силу (2) и способа построения $\{u_i\} : \sum_1^n t_{i_j j} T u_j \in D_n$, откуда, учитывая определение b_n и (3), получаем $x_0 \in D_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Итак, $x_0 \in \bigcap_1^{\infty} D_n$, но $\bigcap_1^{\infty} D_n \subset T(Y)$ и, следовательно, последовательность $\{g_{n_k}(x_0)\}$ сходится. Имеем

$$\left\| g_{n_m}(x_0) - \sum_1^m t_{i_k k} u_k \right\| \leqslant \left\| g_{n_m}\left(\sum_1^m t_{i_k k} T u_k + \sum_{m+1}^{\infty} t_{i_k k} T u_k \right) - \right. \\ \left. - g_{n_m}\left(\sum_1^m t_{i_k k} T u_k \right) \right\| + \left\| g_{n_m}\left(\sum_1^m t_{i_k k} T u_k \right) - \sum_1^m t_{i_k k} u_k \right\|. \tag{4}$$

Так как $\sum_1^m t_{i_k k} u_k \in A_m$, $\left\| \sum_{m+1}^\infty t_{i_k k} T u_k \right\| \leqslant c_m$, то, учитывая определение подпоследовательности $\{g_{n_k}\}$, получаем из (4) $\| g_{n^m}(x_0) - \sum_1^m t_{i_k k} u_k \| \leqslant 2^{-m} + 2^{-m}$, откуда, воспользовавшись сходимостью последовательности $\{g_{n_m}(x_0)\}$, намедленно получаем сходимость ряда $\sum t_{i_k k} u_k$.

Пусть теперь числовая последовательность $\{p_i\}$ такова, что $\sup_n \left\| \sum_1^n p_i u_i \right\| < \infty$. Покажем, что ряд $\sum p_i u_i$ сходится. Без ущерба общности можно считать, что $\sup_n \left\| \sum_1^n p_i u_i \right\| \leqslant 1/8$, значит $\sup_i \| p_i \| \leqslant \leqslant 1/2$ и, следовательно, для каждого $k = 1, 2, \ldots$ существует число $t_{i_k k}$ такое, что $| p - t_{i_k k} | \leqslant 2^{-k}$. Нетрудно видеть, что $\sup_n \left\| \sum_1^\infty t_{i_k k} u_k \right\| < \infty$ и по уже доказанному ряд $\sum t_{i_k k} u_k$ сходится, что, очевидно, влечет сходимость ряда $\sum p_i u_i$. Итак, $\{u_i\}$ — ограниченно полная базисная последовательность, откуда, пользуясь тем, что $\| u_k - y_{i_k} \| \leqslant a_{i_k} < 2^{-i_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, легко получить, что и $\{y_{i_k}\}$ — ограниченно полная базисная последовательность. Из последнего утверждения следует, что множество $T\left(\left\{ y = \sum p_k y_{i_k} : \sup_n \left\| \sum_1^n p_k y_{i_k} \right\| \leqslant \leqslant 1 \right\}\right)$ замкнуто в X, откуда немедленно вытекает, что множество $T([y_{i_k}]_1^\infty)$ имеет тип F_σ.

Теорема доказана.

Как показывает следующее предложение, ограничение на борелевский тип образа $T(Y)$ в теореме 1 не может быть ослаблено.

Предложение 1. *Пусть Y — произвольное сепарабельное банахово пространство и T — инъекция Y в банахово пространство X такая, что отображение T^{-1} принадлежит первому классу Бэра. Тогда образ $T(Y)$ есть множество типа $F_{\sigma\delta}$ в X.*

Доказательство. Без ущерба общности будем считать пространство X сепарабельным и $\mathrm{cl}\, T(Y) = X$. Согласно лемме 2 линейное многообразие $T^*(X^*)$ — нормирующее для пространства Y, откуда, пользуясь сепарабельностью пространств X и Y, нетрудно получить, что существует возрастающая последовательность конечномерных подпространств $\{E_n\}$, $E_n \subset X^*$, $\dim E_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$ такая, что линейное многообразие $\bigcup_1^\infty E_n$ — нормирующее для X, а линейное многообразие $\bigcup_1^\infty T^*(E_n)$ — нормирующее для Y. Но тогда в пространстве Y существует полная минимальная система $\{y_i\}$ с сопряженной $\{y_i^*\}$ такой, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ $T^*(E_n) = [y_i^*]_1^n$ ([5], теорема 1.6.).

Таким образом, $\{y_i\}$ — полная минимальная система с нормирующей сопряженной и, следовательно, по одной теореме М. И. Кадеца [6] система $\{y_i\}$ — операторный базис, т. е. существует последовательность непрерывных (вообще говоря, нелинейных) операторов T_n, каждый из которых определен в соответствующем подпространстве $[y_i]_1^n$, таких, что для каждого $y \in Y : \lim T_n S_n y = y$ (операторы S_n определены стандартно: $S_n y = \sum\limits_1^n y_i^*(y)\, y_i, y \in Y, n = 1, 2, \dots$). Можно проверить, что система операторов T_n, построенная в [6], обладает следующим свойством (⁎): пусть последовательность чисел $\{a_i\}$ такова, что существует предел $\lim T_n (\sum\limits_1^n a_i y_i) = y_0$, тогда для каждого $i = 1, 2, \dots\ y_i^*(y_0) = a_i$. Положим $x_i = Ty_i$, $x_i^* = T^{*-1} y_i^*$, $i = 1, 2 \dots$. Легко видеть, что $\{x_i\}$ — полная минимальная система в X с тотальной (даже нормирующей) сопряженной $\{x_i^*\}$. Для каждого натурального n определим отображение g_n пространства X в пространство Y по формуле

$$g_n(x) = T_n \Big(\sum_1^n x_i^*(x)\, y_i\Big), \quad x \in X.$$

Легко видеть, что каждое g_n — непрерывное отображение и, кроме того, для каждого $y \in Y : \lim g_n(Ty) = y$. Пусть теперь $x \in X$ такой элемент, что существует предел $\lim g_n(x) = y$. Тогда по свойству (⁎) системы $\{T_n\}$ для каждого $i = 1, 2, \dots\ X_i^*(x) = y_i^*(y)$, откуда, пользуясь тотальностью системы $\{x_i^*\}$, нетрудно получить $x = Ty$. Таким образом, множество сходимости последовательности непрерывных отображений $\{g_n\}$, которое, очевидно, имеет тип $F_{\sigma\delta}$, совпадает с множеством $T(Y)$. Предложение доказано.

Следующее предложение дает критерий наличия в пространстве $Y\{A_n\}$ (см. определение в начале статьи) подпространства, изоморфного c_0.

Предложение 2. *Пусть предельный оператор A_0 (с областью определения $Q\{A_n\}$) не замкнут. Тогда существует последовательность $\{u_i\} \subset S(Y\{A_n\})$, эквивалентная естественному базису c_0 и такая, что $\lim \|Tu_i\| = 0$.*

Доказательство. Заметим, что для всех $y \in Y\{A_n\}$ $\max\{\|Ty\|, \|A_0 Ty\|\} \leqslant \max\{\|Ty\|, \sup\limits_n \|A_n Ty\|\} = \|y\|$, откуда в силу незамкнутости оператора A_0 легко следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $y = y(\varepsilon) \in S(Y\{A_n\})$ такой, что $\|Ty\| < \varepsilon$ и $\|A_0 Ty\| < \varepsilon$. Воспользовавшись этим замечанием, а также тем, что для всех $y \in Y\{A_n\}$ $A_0 Ty = \lim A_n Ty$, нетрудно построить последовательность элементов $\{u_i\} \subset S(Y\{A_n\})$ и строговозрастающую последовательность номеров $\{m_i\}$ такие, что для всех $i = 1, 2, \dots$:

$$\|Tu_i\| \leqslant \frac{2^{-i}}{\max\{\|A_k\| : 1 \leqslant k \leqslant m_{i-1}\}}; \tag{5}$$

$$\|A_k Tu_i\| \leqslant 2^{-i}, \quad k = m_i, m_i + 1, \dots \tag{6}$$

Без ущерба общности можно считать последовательность $\{u_i\}$ базисной (см. [5], теорема 1.12).

Положим $v_i = Tu_i$, $(i = 1, 2, \ldots)$ и пусть $\{i_1 < i_2 < \cdots i_p\}$ — произвольное конечное подмножество натурального ряда. Из (5) получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} v_{i_k} \right\| \leqslant 1. \tag{7}$$

Оценим $\left\| A_l \left(\sum_1^p v_{i_k} \right) \right\|$, $(l = 1, 2, \ldots)$. Пусть индекс j таков, что $m_j \leqslant l < m_{j+1}$ и индекс q таков, что $i_1 < \cdots < i_q \leqslant j < j+1 < i_{q+2} < \cdots < i_p$.

Из (6) получаем

$$\left\| A_l \left(\sum_1^q v_{i_k} \right) \right\| \leqslant 1, \tag{8}$$

и из (5) с учетом $l < m_{j+1} \leqslant m_{i_{q+2}-1}$ имеем

$$\left\| A_l \left(\sum_{k=q+2}^{p} v_{i_k} \right) \right\| \leqslant \sum_{k=q+2}^{p} \| A_l \| \frac{2^{-i_k}}{\max \{ \| A_t \| : 1 \leqslant t \leqslant m_{i_k} - 1\}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=q+2}^{p} 2^{-i_k} \leqslant 1. \tag{9}$$

Наконец, из того, что $\| u_i \| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ вытекает:

$$\| A_l v_{i_{q+1}} \| \leqslant \max \{ \| v_{i_{q+1}} \|, \sup_n \| A_n v_{i_{q+1}} \| \} \leqslant 1. \tag{10}$$

Из (7)—(10) и определения нормы в пространстве $Y\{A_n\}$ получаем, что для любого конечного подмножества σ натурального ряда: $\left\| \sum_{i \in \sigma} u_i \right\| \leqslant 3$, откуда, учитывая базисность последовательности $\{u_i\} \subset S(Y\{A_n\})$, нетрудно сделать вывод об эквивалентности $\{u_i\}$ естественному базису c_0. Предложение доказано.

Замечание. Пусть $\{x_i\}$ — полная минимальная система в банаховом пространстве X с тотальной сопряженной $\{x_i^*\}$ и $S_n x = \sum_1^n x_i^*(x) x_i$, $x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. В [7] доказано, что если $\{x_i\}$ не является базисом пространства X, то пространство $Y\{S_n\}$ нерефлексивно Из предложения 2 следует более сильный факт: $Y\{S_n\} \supset c_0$.

Теорема 2. *Пусть множество сходимости $Q\{A_n\}$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$. Тогда предельный оператор A_0 (с областью определения $Q\{A_n\}$) замкнут.*

Доказательство. Доказательство от противного получается последовательным применением предложения 2 и теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть X и Z — банаховы пространства, $\{A_n\} \subset L(X, Z)$, $Q\{A_n\}$ — множество типа $G_{\delta\sigma}$ в X и Q_1 — произвольное линейное подмногообразие многообразия Q. Тогда либо операторы $\{A_n|_{Q_1}\}_{n=1}^{\infty}$*

ограничены в совокупности (и тогда, очевидно, $\mathrm{cl}\, Q_1 \subset Q$), *либо существует линейное подмногообразие* $Q_2 \subset \mathrm{cl}\, Q_1$, *обладающее свойствами:* 1) Q_2 *— имеет тип* F_σ *в* X; 2) $Z_1 = A_0(Q_2)$ *— есть замкнутое бесконечномерное подпространство пространства* Z *с ограниченно полным базисом, причем оператор* $(A_0|_{Q_2})^{-1}$ *существует и ограничен;* 3) *пространства* $T^{-1}(Q_2)$ *и* Z_1 *изоморфны.*

Доказательство. Пусть операторы $\{A_n|_{Q_1}\}$ не ограничены в совокупности. Без ущерба общности можно считать $Q_1 = Q$, а также пространство X, а вслед за ним Z и $Y\{A_n\}$ сепарабельными. Воспользовавшись последовательно леммами 3 и 2, получаем, что T^{-1} — неограниченный оператор первого класса Бэра. По теореме 1 существует ограниченно полная базисная последовательность $\{y_i\} \subset S(Y\{A_n\})$ такая, что $\|Ty_i\| \leqslant 2^{-i}$, $i = 1, 2, \ldots$ и для всех $m: T([y_i]_m^\infty)$ — множество типа F_σ в X. Но из замкнутости оператора A_0 (теорема 2), базисности последовательности $\{y_i\}$ и условия $\|Ty_i\| \leqslant 2^{-i}$, $(i = 1, 2, \ldots)$ нетрудно получить, что при некотором m отображение A_0T есть изоморфное вложение пространства $Y_1 = [y_i]_m^\infty$ в Z. Для завершения доказательства теоремы достаточно положить $Q_2 = T(Y_1)$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Mazur S., Sternbach L.* Über Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen//Studia Math.— 1933.— **IV**.— P. 54—65. 2. *Banach S., Mazur S.* Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen//Studia Math.— 1933.— **IV**.— P. 90—95. 3. *Bourgain J., Rosenthal H. P.* Applications of the Theory of Semi-embeddings to Banach Space Theory//I. Funct. Anal.— 1983.— **52**.— P. 149—188. 4. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения.— К.: Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1980.— 177 с. 5. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха//Успехи мат. наук.— 1970.— **XXV**, вып. 3 (153).— С. 113—174. 6. *Кадец М. И.* Нелинейные операторные базисы в пространстве Банаха//Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1966.— Вып. 2.— С. 128—130. 7. *Singer I.* Bases in Banach spaces I.— Berlin — Heidelberg — New York: Springerverlag, 1970.— 700 p.

Поступила в редколлегию 04.10.86