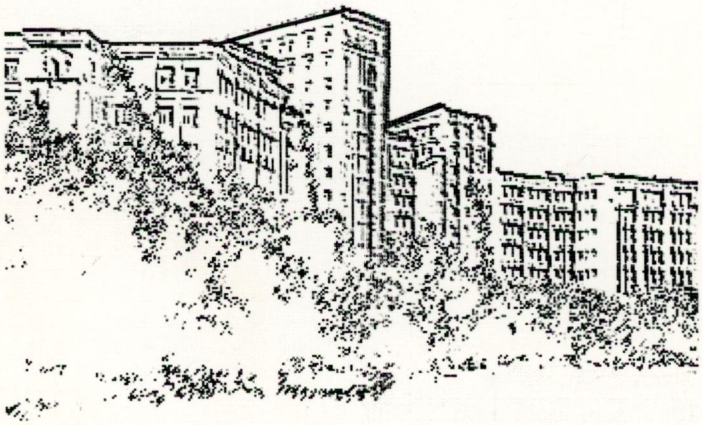
Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна



№ 875

Харків
2009

ISSN 0453–8048

Міністерство освіти та науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

№ 875

Серія :

«Математика, прикладна математика і механіка»

Випуск 60

Заснована у 1965 р.

Харків
2009

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №12 від 27 листопада 2009 р.).

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, пл. Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, механіко-математичний факультет, к.7-29.
Тел. 7075518, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 11825-696 ПР від 04.10.2006 р.

ЗМIСТ

CONTENTS

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.958+536.71 № 875, 2009, с.4–9

Уравнение Бюргерса в кольце периодических функций

А.С. Сохин
Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
sokhin@univer.kharkov.ua

В работе изучаются некоторые элементарные функции в кольце периодических функций без единицы. Находится обобщение преобразования Коула-Хопфа, позволяющее свести нелинейное уравнение Бюргерса в кольце к линейному параболическому уравнению в кольце.

С о х і н А.С., **Рівняння Бюргерса в кільці періодичних функцій**. В роботі вивчаються деякі елементарні функції в кільці періодичних функцій без одиниці. Знаходиться узагальнення перетворення Коула-Хопфа, яке дозволяє звести нелінійне рівняння Бюргерса в кільці до лінійного параболічного рівняння в кільці.

A.S. Sokhin, **The Burger's equation in the ring of periodic functions**. In the present paper we study some elementary functions in the ring of periodical functions. A generalization of Cole-Hopf transformation is found. The last allows us to transform nonlinear Burger's equation in the ring to a linear parabolic equation in the ring.

2000 Mathematics Subject Classification: 35Q53.

Классическое нелинейное уравнение Бюргерса встречается в механике жидкостей, астродинамике, космологии [1]. Есть различные обобщения этого уравнения [2, 3]. В данной работе изучается интегро-дифференциальное обобщение уравнения Бюргерса, рассматриваемое как уравнение в кольце периодических функций. Вводится обобщение в кольце без единицы подстановки Коула-Хопфа [5, 4], определяемое через операции в кольце, которое позволяет свести решение уравнения Бюргерса в кольце к решению линейного уравнения диффузии в кольце.

1. Кольцо периодических функций

Пусть вещественная функция $u(s) \in L_2(-\pi,\pi)$. Продолжим ее периодически на всю вещественную ось. Введем операцию свертки: $u \circ v(s) = \int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma)v(s-\sigma)d\sigma$. Множество функций из $L_2(-\pi,\pi)$ с операцией свертки обозначим через $\overset{\circ}{K}_2$. Известно, что из $u, v \in L_1(-\pi,\pi)$ следует $u \circ v \in L_1(-\pi,\pi)$. Таким образом, *множество периодических абсолютно суммируемых на периоде функций со сверткой в качестве операции умножения, образует ассоциативное и коммутативное без единицы кольцо* [7].

Заметим, что из $u \in L_2(-\pi,\pi)$ следует $u \in L_1(-\pi,\pi)$. Скалярное произведение функций, норма, преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определяются равенствами: $(u,v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(s)\, v(s)\, ds$, $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$, $u^f = Fu = (u_n,\ n = 0, \pm 1, \ldots)$, $u_n = (u, e_n)$, $e_n(s) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \exp(ins)$, $F^{-1}u^f = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)u_n$.

Если $u, v \in L_2(-\pi,\pi)$, то справедливо равенство Парсеваля $\|u\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} u_n \overline{u}_n$. Функцию $u(-s)$ назовем сопряженной к $u(s)$. Если $u(s) = u(-s)$, то имеем самосопряженную (четную) функцию. Если $u(-s) = -u(s)$, то имеем кососопряженную (нечетную) функцию. Каждая функция представима в виде суммы четной и нечетной функций:

$$u(s) = [u(s) + u(-s)]/2 + [u(s) - u(-s)]/2 = u_+(s) + u_-(s).$$

Для симметричного кольца все $u_- = 0$, для кососимметричного кольца все $u_+ = 0$.

Введем cos-преобразования и sin-преобразования Фурье по формулам: $Cu = \widehat{u}^c = (u_n^c,\ n = 0, \pm 1, \ldots) = (u, C_n)$, $C_n(\sigma) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \cos(n\sigma)$ $Su = \widehat{u}^s = (u_n^s,\ n = 0, \pm 1, \ldots) = (u, S_n)$, $S_n(\sigma) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \sin(n\sigma)$, тогда $Fu = Cu + i\,Su$. Заметим, что $(u_+)_n^s = 0$, $(u_-)_n^c = 0$, $u_n^c = (u_+)_n^c$, $u_n^s = (u_-)_n^s$. Определим некоторые кольцевые функции кольцевых переменных.

Поскольку кольцо не имеет единицы, то не каждая функция подходит для определения кольцевой функции. В частности, не может быть обратного значения.

Введем нужные в дальнейшем функции $\mathrm{pexp}(z) = \exp(z) - 1$, $\mathrm{p\ln}(z) = \ln(1+z)$, $\mathrm{prev}(z) = [1/(1+z)] - 1$ комплексной переменной (которые будем называть *псевдоэкспонентой, псевдологарифмом* и *псевдообратным* значением), определяемые , соответственно, во всей комплексной плоскости и в разрезанной вдоль вещественной прямой от $-\infty$ до -1 плоскости.

Кольцевые функции от кольцевой переменной $u \in \overset{\circ}{K}_2$ определяем по правилу: $g(u) = F^{-1}g(Fu)$. Подробнее для введенных функций:

$$\mathrm{pexp}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\,\mathrm{pexp}(u_n),\ \mathrm{p\ln}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\,\mathrm{p\ln}(u_n),$$

$$\mathrm{prev}\,(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\mathrm{prev}\,(u_n) \text{ для } u_n = (u, e_n),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Нетрудно проверить, что $\operatorname{pexp}(\operatorname{p}\ln(u)) = u$, $\operatorname{p}\ln, (\operatorname{pexp}(u)) = u$, $\operatorname{prev}(\operatorname{prev}(u)) = u$, $\operatorname{prev}(\operatorname{pexp}(u)) = \operatorname{pexp}(-u)$. То-есть, эти функции — взаимообратные. Для существования $\operatorname{p}\ln(u)$ и $\operatorname{prev}(u)$ следует потребовать $|1+u_n| \geq \delta > 0$ равномерно по $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ или, в равносильной форме, $\|\xi + u \circ \xi\| \geq \delta \|\xi\|$, $\delta > 0, \forall \xi \in \overset{\circ}{K}_2$.

Нетрудно проверить справедливость равенства: $u + \operatorname{prev}(u) + u \circ \operatorname{prev}(u) = 0$, если $\operatorname{prev}(u)$ существует.

Обозначим через $\overset{\circ}{l}_2$ пространство последовательностей $(u_n,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ с конечной нормой $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$ и операцией умножения $(u \cdot v)_n = u_n v_n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Тогда $\overset{\circ}{l}_2$ — кольцо, изоморфное кольцу $\overset{\circ}{K}_2$, в силу равенства Парсеваля и того, что преобразование Фурье переводит операцию свертки в $\overset{\circ}{K}_2$ в операцию покомпонентного умножения в $\overset{\circ}{l}_2$. Заметим, что не теряя в общности, все определения можно рассматривать на плотном в $\overset{\circ}{K}_2$ множестве достаточно гладких финитных функциях.

Рассмотрим функции вещественной переменной со значением в $\overset{\circ}{K}_2$. Известным способом [6] вводится понятие непрерывной, дифференцируемой, интегрируемой и т.д. функций числовых переменных со значением в $\overset{\circ}{K}_2$. Рассмотрим производные введенных кольцевых функций непрерывно дифференцируемых кольцевых переменных.

Пусть $\dfrac{d}{dx}u(x) = u'(x) \in \overset{\circ}{K}_2$. Имеем $u'(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\, u'_n(x)$. Рассмотрим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\, \exp\left(u_n(x)\right) u'_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\{[\exp\left(u_n(x)\right) - 1]\, u'_n(x) + u_n(x)\} =$$
$$= \operatorname{pexp}\left(u(x)\right) \circ u'(x) + u'_n(x) \overset{def}{=} \frac{d}{dx}\operatorname{pexp}\left(u(x)\right).$$

Получено, что $y(x) = \operatorname{pexp}\left(u(x)\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = u'(x) + u'(x) \circ y$.

Аналогично находим, что функция $e(x) = \operatorname{p}\ln\left(u(x)\right)$ удовлетворяет такому дифференциальному уравнению $y' = u'(x) + u'(x) \circ \operatorname{prev}(y)$.

Лемма 1. *Если v имеет псевдообратное значение w, то из равенства $\xi + \xi \circ v = \eta + \eta \circ v$ следует $\xi = \eta$.*

Доказательство. Из равенства $(\xi + \xi \circ v) + (\xi + \xi \circ v) \circ w = (\eta + \eta \circ v) + (\eta + \eta \circ v) \circ w$ получаем $\xi + \xi \circ (v + w + v \circ w) = \eta + \eta \circ (v + w + v \circ w)$. Так как $v + w + v \circ w = 0$, то имеем $\xi = \eta$.

Лемма 2. *Если $u = prev(y) \circ \xi + \xi$, то $\xi = u + u \circ y$.*

Доказательство. Имеем $u + u \circ y = \xi + \xi \circ (y + prev(y) + y \circ \operatorname{prev}(y)) = \xi$.

2. Уравнение Бюргерса в кольце

Пусть функция $u(x,t)$ вещественных переменных x и t принимает значения в кольце $\overset{\circ}{K}_2$ и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \circ \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t > 0; \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = a(x), \quad t = 0 \tag{2}$$

для всех $x \in (-\infty, \infty)$. Начальные значения подчиним условиям $a(\cdot) \in L_1(0, \infty; \overset{\circ}{K}_2)$, $a(-x) = -a(x)$.

Уравнение (1) для функции $u(x,t,s)$ называем уравнением Бюргерса в кольце $\overset{\circ}{K}_2$. Введем обозначения: $\widehat{a}(x) = \int_{-\infty}^{x} a(\widetilde{x})d\widetilde{x}$; $\partial y/\partial t = \dot{y}$; $\partial y/\partial x = y'$.

Теорема 1. *Если функция $y(x,t) \in K_2$ имеет псевдообратное значение при $t \geq 0$, $-\infty < x < \infty$ удовлетворяет уравнению*

$$\dot{y} = y'', \quad t > 0 \tag{3}$$

и начальному условию

$$y(x,0) = prev(\widehat{a}(x)) \equiv \varphi(x), \tag{4}$$

то функция

$$u(x,t) = y' \circ prev(y) + y' \tag{5}$$

является решением уравнения Бюргерса (1) и удовлетворяет начальному условию (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (5) называем обобщением подстановки Коула-Хопфа для случая $\overset{\circ}{K}_2$ [4, 5]. Заметим [4, 5], что обычная подстановка в скалярном случае имеет вид $u = y'y^{-1}$. По лемме 2 из равенства (5) получаем уравнение

$$y' = u + u \circ y. \tag{6}$$

Обозначим $v(x,t) = y \circ prev(y) + y$. По той же лемме 2 получаем

$$\dot{y} = v + v \circ y. \tag{7}$$

Из требования совместимости уравнений (6) и (7) перекрестным дифференцированием из равенства $\partial y'/\partial t = \partial \dot{y}/\partial x$ после сокращения одинаковых слагаемых находим $\dot{u} + \dot{u} \circ y = v' + v' \circ y$.

Из леммы 1 получаем

$$\dot{u} = v'. \tag{8}$$

Подставляя в равенство (3) значение $\dot{y}$ из равенства (7) и значение $\partial y/\partial x$, найденное из равенства (6), повторным дифференцированием по x находим равенство $v + v \circ y = (u' + u \circ u) + (u' + u \circ u) \circ y$, из которого по лемме (1) заключаем

$$v = u' + u \circ u. \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) совместно и есть уравнение Бюргерса. Проверим выполнимость начального значения. Из (5) при $t = 0$ имеем $u(x,0) = \varphi' \circ \mathrm{prev}(\varphi) + \varphi'$. По лемме (2) находим $\varphi' = u(x,0) + u(x,0) \circ \varphi$. Из равенства (4) дифференцированием получим $\varphi'{=}a(x){+}a(x)\circ\varphi$, то есть, $a(x){+}a(x)\circ\varphi{=}u(x,0)+u(x,0)\circ\varphi$.

По лемме (1) делаем вывод, что $u(x,0)=a(x)$. Нетрудно получить, что решение Бюргерса единственно, если оно существует. Кольцевая переменная $u\neq 0$ из $\overset{\circ}{K}_2$ называется псевдоунитарной, если $\mathrm{prev}(u)=u_+$.

Лемма 3. *Если u псевдоунитарная, то* $\|\xi+u\circ\xi\|=\|\xi\|\;\forall\,\xi\in\overset{\circ}{K}_2$.

Лемма 4. *Псевдоунитарная кольцевая переменная представима в виде* $u=\mathrm{pexp}\,(im)$, $m\in K_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство лемм 3 и 4 получаем непосредственной проверкой.

Найдем теперь достаточные условия, при которых решение задачи (3)–(4) имеет псевдообратное значение.

Теорема 2. *Если существует кольцевая функция* $q=\mathrm{pexp}\,(im)$ *такая, что начальное условие для кольцевого уравнения диффузии удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{Re}(\xi+\varphi(x)\circ\xi,\,\xi+q\circ\xi)\geq\delta\,\|\xi\|^2,\quad\delta>0,\tag{10}$$

равномерно по $x\in(-\infty,\infty)$ *для всех* $\xi\in\overset{\circ}{K}_2$, *то псевдообратное значение решения уравнения диффузии существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача (1)–(2) имеет решение, выражаемое интегралом Пуассона: $y(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}p_t(x-\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma$, $p_t(x)=1/\sqrt{4\pi t}\cdot\exp(-x^2/(4t))$. Проверка этого утверждения такая же, как и в случае непрерывных ограниченных функций. Так как $\int_{-\infty}^{\infty}p_t(x)dx=1$, $p_t(x)>0$ при $t>0$, то справедливо равенство

$$\mathrm{Re}(\xi+y(x,t)\circ\xi,\xi+q\circ\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}p_t(x-\sigma)\mathrm{Re}(\xi+\varphi(\sigma)\circ\xi,\xi+q\circ\xi)d\sigma.\tag{11}$$

Тогда из неравенства (10) следует: $\mathrm{Re}(\xi{+}y(x,t){\circ}\xi,\ \xi{+}q{\circ}\xi)\geq\delta\,\|\xi\|^2$, $\forall\xi\in\overset{\circ}{K}_2$. Из неравенства Коши-Буняковского получаем для левой части предыдущего неравенства оценку сверху
$\mathrm{Re}(\xi+y(x,t)\circ\xi,\xi+q\circ\xi)\leq\|\xi+y(x,t)\circ\xi\|\,\|\xi+q\circ\xi\|=\|\xi+y(x,t)\circ\xi\|\,\|\xi\|$,

то есть, получено неравенство $\|\xi+y(x,t)\circ\xi\|\geq\delta\|\xi\|$, $\delta>0$ для всех $\xi\in\overset{\circ}{K}_2$, которое означает существование псевдообратного значения.

Теорема 3. *Пусть*

1) $-\infty<r\leq\widehat{a}^c_n(x)$ *равномерно по* $x\in(-\infty,\infty)$;

2) $d_n\leq\widehat{a}^s_n(x)\leq D_n$ *равномерно по* $x\in(-\infty,\infty)$ *и* $n=(0,\pm1)$; *причем,* $-\infty<d_n\leq 0$, $0\leq D_n<\infty$, $(D_n-d_n)/2\leq\pi/2-\varepsilon$, $\quad 0<\varepsilon\ll 1$, $\forall n$;

3) $m=(m_n=(D_n+d_n)/2,\ n=0,\pm1,\pm2)\in l_2$.

Тогда условия предыдущей теоремы выполнены при $q=\mathrm{pexp}\,(im)$ *и* $\delta=\exp\,(r)\,\sin\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно убедиться в существовании неравенства (10) при указанных q и δ.

Имеем $\mathrm{Re}(\xi+\varphi(x)\circ\xi,\ \xi+q\circ\xi)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\ \exp(\widehat{a}_n(x))\exp(-im_n)\,\xi_n\bar{\xi}_n=$ $=\exp(\widehat{a}^c_n(x))\cdot\cos(\widehat{a}^s_n(x)-m_n)\cdot\xi_n\bar{\xi}_n$.

Так как по условию $|\widehat{a}^s_n(x)-m_n|\le(\pi/2-\varepsilon_\alpha)$ и $\widehat{a}^c_n(x)\ge r$, то $\exp(\widehat{a}^c_n(x))\ge\exp(r)$, $\cos(\widehat{a}^s_n(x)-m_n)\ge(\pi/2-\varepsilon)\cdot\cos=\sin\varepsilon$ и, учитывая $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n\bar{\xi}_n=\|\xi\|^2$, получаем требуемое.

Теорема 4. *Если* $\widehat{a}^c_n(x)\ge r>-\infty$, $|\widehat{a}^s_n|\le(\pi/2-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ *равномерно по* $x\in(-\infty,\infty)$ *и* $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, *то псевдообратное значение* $y(x,t)$ *существует для всех* $x\in(-\infty,\infty)$ *и* $t\ge0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из предыдущей теоремы при $m=0$.

Теорема 5. *Если*

$\|a_+\|_1=\int_0^\infty dx\int_{-\pi}^{\pi}|a_+(x,s)|ds<\infty$, $\|a_-\|_1=\int_0^\infty dx\int_{-\pi}^{\pi}|a_-(x,s)|ds<(\pi/2)^{3/2}$, *то псевдообратное значение* $y(x,t)$ *существует при* $x\in(-\infty,\infty)$ *и* $t\ge0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство следует из следующих неравенств $|\widehat{a}^c_n(x)|\le\sqrt{2/\pi}\,\|a_+\|_1$, $|\widehat{a}^s_n(x)|\le\sqrt{2/\pi}\,\|a_-\|_1$ и предыдущей теоремы при $r=-\sqrt{2/\pi}\,\|a_+\|_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский С. В. Точные решения уравнения Бюргерса с источником // Журнал технической физики. – 1999, Т. 69, вып. 8, с. 11-14.

2. Беркела Ю. Ю. Матричные аналоги нелинейных уравнений Бюргерса // Украинский физический журнал. – 1988. – Т. 43, № 7. – С. 776–780.

3. Сохин А. С. Уравнение Бюргерса в циркулянтном векторном кольце // Вісник Харківського національного університету, серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2004. № 645, С. 163-171.

4. Hopf E. The partial differential equation $\dot{u}+uu'_x=u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. – 1950. № 3, p. 201-230.

5. Cole I. D. On a quasi-linear parabolic equation occuring in actrodynamics // Quart. Math. – 1951. № 9, p. 225-236.

6. Треногин В. А. Функциональный анализ // М.: Наука. – 1980, 495 с.

7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца // М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.– 1960, 315 с.

Статья получена: 29.05.2009; принята: 10.09.2009.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 512.54 № 875, 2009, с.10–24

Представление кратных сплетений конечной группы в группе автоморфизмов корневого дерева

Е.Л. Беркович

Одесский Национальный Университет им. И.И. Мечникова

В работе строится мономорфизм группы $H \wr W_n$ в группу W_{m+1}, где H – это произвольная конечная группа, $W_n = (...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз), $k = |H|$, $m = (k^n - 1)/(k-1)$. На основе этого вложения затем строится вложение произвольного кратного сплетения в сплетение W_n для достаточно большого n.

Беркович Є. **Представлення кратних вінцевих добутків скінченої групи у групі автоморфізмів корневого дерева**. В роботі побудован мономорфізм групи $H \wr W_n$ в групу W_{m+1}, де H – довільна скінчена група, $W_n = (...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз), $k = |H|$, $m = (k^n - 1)/(k-1)$. На основі цього мономорфізма далі будується мономорфізм довільного кратного вінцевого добутку в групу W_n для достатньо великого n.

Berkovich E. **Representation of wreath powers of a finite group in the automorphism group of a rooted tree**. In this paper we construct a monomorphism of the group $H \wr W_n$ to the group W_{m+1}, where H is an arbitrary finite group, $W_n = (...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n times), $k = |H|$, $m = (k^n - 1)/(k-1)$. Based on this monomorphism we construct a monomorphism of any wreath power to group W_n for sufficiently great n.

2000 Mathematics Subject Classification 20E22.

Введение

В данной работе мы рассматриваем кратное сплетение произвольной конечной группы H. Операция сплетения абстрактных групп не является ассоциативной, поэтому, расставляя скобки в выражении $H \wr H \wr \cdots \wr H$ различными способами, мы будем получать различные группы. Все получающиеся таким образом группы будем называть кратными сплетениями группы H. Кратные сплетния со следующей расстановкой скобок $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз) обозначим $W_n(H)$. Более формально:

$$\begin{aligned} W_1(H) &= H \\ W_n(H) &= W_{n-1}(H) \wr H \end{aligned}$$

Элементы группы $W_n(H)$ можно интерпретировать как автоморфизмы k-однородного корневого дерева с $n+1$ уровнем, где k – это порядок группы H. Особенно хорошо изучены $W_n(Z_p)$, где Z_p – это циклическая группа порядка p. Элементы $W_n(Z_p)$ можно представлять так называемыми таблицами Калужнина ([2]). Группы $W_n(Z_p)$ играют важную роль в теории групп, поскольку являются силовскими p-подгруппами симметрической группы.

Для изучения кратных сплетений произвольной конечной группы H с произвольной расстановкой скобок были бы полезны вложения таких групп в $W_n(H)$ В настоящей работе построен мономорфизм $\phi_n : H \wr W_n(H) \to W_{m+1}(H)$, где $k = |H|$, $m = (k^n - 1)/(k-1)$. Такое m является минимально возможным, поскольку для $m < (k^n-1)/(k-1)$ группа $W_{m+1}(H)$ содержала бы меньше элементов, чем группа $H \wr W_n(H)$. Этот случай наиболее важный. Как мы увидим в дальнейшем, эта конструкция легко обобщается, и можно получить мономорфизм $\phi'_{n,l} : W_l \wr W_n \to W_{m+l}$, а затем по индукции построить вложение произвольного кратного сплетения в группу W_n для достаточно большого n.

В работе [3] построено вложение $\omega_n : (Z_p \wr W_n(Z_p)) \to W_m(Z_p)$, $m = (p^n-1)/(p-1)$ с существенным использованием аппарата таблиц Калужнина, а также представления автоморфизмов дерева в группе унитреугольных матриц. Конструкция вложения, описываемая в данной работе, и используемый аппарат отличается от вложения, построенного Леоновым (см. [3]).

1. Предварительные замечания

В дальнейшем мы будем использовать следующие стандартные обозначения. Для конечного множества X посредством X^n будет обозначаться множество слов длины n, а X^* – это множество всех конечных слов над алфавитом X. Символом "$\emptyset$" мы будем обозначать пустое слово, не содержащее ни одного символа

В качестве символов алфавита мы часто будем использовать элементы группы. Поэтому, чтобы различать конкатенацию и операцию в группе, условимся операцию в группе обозначать символом "$*$", и, если необходимо, в индексе указывать, о какой именно группе идет речь. Например, $*_G$ обозначает операцию в группе G.

Пусть A – произвольная группа, B – некоторое конечное множество. Тогда множество всех отображений $f : B \to A$ относительно операции поточечного умножения:

$$(f_1 * f_2)(b) = f_1(b) *_A f_2(b)$$

образует группу, которую мы будем обозначать A^B.

Определение 1 *Пусть A и B – две произвольные группы. Тогда сплетение $A \wr B$ – это множество*

$$\{(b, f) : \ b \in B, \ f : B \to A\}$$

с операцией $*_{A\wr B}$, действующей по правилу:

$$(b_1, f_1) *_{A\wr B} (b_2, f_2) = \left(b_1 *_B b_2, f_1^{b_2} *_{A^B} f_2\right),$$

где $f^b(x) = f(b *_B x)$, для любых $b, x \in B$, $f \in A^B$.

(см.[1], стр.72-73)

Сплетение можно также рассматривать как группу преобразований множества $B \times A$. Поставим в соответствие каждому элементу сплетения $(b, f) \in A \wr B$ преобразование

$$\alpha_{b,\,f} : B \times A \to B \times A,$$

действующее следующим образом. Для любых $b_0 \in B$, $a_0 \in A$ положим

$$\alpha_{b,\,f}(b_0,\, a_0) = (b *_B b_0,\; f(b_0) *_A a_0) \qquad (1)$$

Несложно видеть, что отображение $\alpha_{b,\,f}$ биективно.

Лемма 1 *Пусть A, B – две группы. Множество*

$$\{\alpha_{b,\,f} : b \in B, f : B \to A\}$$

относительно композиции образует группу, изоморфную сплетению $A \wr B$.

Причем, отображение ϵ, ставящее в соответствие элементу $(b, f) \in A \wr B$ преобразование $\alpha_{b,\,f}$, является изоморфизмом.

Доказательство. Несложно показать, что отображение ϵ инъективно.

Докажем гомоморфность ϵ. Пусть $(b_1,\, f_1),\ (b_2,\, f_2) \in A \wr B$. Зафиксируем произвольные элементы $b_0 \in B$ и $a_0 \in A$. Рассмотрим действие композиции $\alpha_{b_1,\,f_1}$ и $\alpha_{b_2,\,f_2}$ на $(b_0,\, a_0) \in B \times A$:

$$\alpha_{b_1,\,f_1} \circ \alpha_{b_2,\,f_2}(b_0, a_0) =$$

$$= \alpha_{b_1,\,f_1}(b_2 *_B b_0,\; f_2(b_0) *_A a_0) =$$

$$= (b_1 *_B b_2 *_B b_0,\; f_1(b_2 *_B b_0) *_A f_2(b_0) *_A a_0) =$$

$$= \left(b_1 *_B b_2 *_B b_0,\; \left(f_1^{b_2} *_{A^B} f_2\right)(b_0) *_A a_0\right) =$$

$$= \alpha_{b_3,\,f_3}(b_0, a_0),$$

где $b_3 = b_1 *_B b_2$, $f_3 = f_1^{b_2} *_{A^B} f_2$.

Таким образом,

$$\alpha_{b_1,\,f_1} \circ \alpha_{b_2,\,f_2} = \alpha_{b_3,\,f_3}$$

С другой стороны, по определению сплетения, $(b_1,\, f_1) *_{A\wr B} (b_2,\, f_2) = (b_3,\, f_3)$. ЧТД.

Элементы кратного сплетения $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ удобно представлять автоморфизмами корневого дерева. Поэтому мы определим здесь понятие автоморфизма однородного корневого дерева и сформулируем некоторые известные свойства [4], которые понадобятся в дальнейшем. Кроме того, мы определим группу W_n автоморфизмов дерева, изоморфную кратному сплетению $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$.

Зафиксируем произвольную конечную группу H. Обозначим $k = |H|$ – число элементов в группе H.

Мы будем также рассматривать элементы группы H как символы алфавита. А элементы кратного сплетения мы будем интерпретировать как автоморфизмы однородного корневого дерева, вершинами которого являются слова над алфавитом H.

Определим понятие регулярного дерева, следуя [5] (раздел 1.2.1).

Определение 2 *Обозначим T_n регулярное корневое k-дерево, вершины которого — это слова $v \in H^*$ длины не превосходящей n, при этом вершины u и v инцидентны тогда и только тогда, когда $u = va$ или $v = ua$ для некоторого $a \in H$*

Пустое слово называется корнем дерева T_n. Число вершин дерева T_n, не находящихся на последнем уровне, равно $m = (k^n - 1)/(k - 1)$.

Определение 3 *Назовем уровнем вершины $v \in T_n$ длину слова v. Обозначается $l(v)$.*

Определение 4 *Вершина v называется потомком вершины u, если u является началом слова v.*

Определение 5 *Пусть $v \in T_n$. Поддеревом $SubTr(v)$ дерева T_n называется множество всех потомков вершины v.*

Дадим теперь определение автоморфизма корневого дерева (см. [4], стр. 183-184).

Определение 6 *Пусть T_n – корневое дерево. Биективное отображение $x : T_n \to T_n$ является автоморфизмом, если*

1) $x(\emptyset) = \emptyset$ (x оставляет на месте корневую вершину);

2) вершины u и v инцидентны тогда и только тогда, когда $x(u)$ и $x(v)$ инцидентны (x сохраняет отношение инцидентности).

Пусть $x : T_n \to T_n$ – автоморфизм дерева, $v \in T_n$. Образ слова v под действием автоморфизма x мы будем обозначать двумя способами: $x(v)$ и v^x.

Множество всех автоморфизмов T_n образует группу и обозначается $Aut(T_n)$. Как известно, группа $Aut(T_n)$ изоморфна сплетению n симметрических групп (см. [4])

Любой автоморфизм корневого дерева является автоматным преобразованием. Поскольку тут речь идет о конечных деревьях, любой автоморфизм из $Aut(T_n)$ представляется конечным автоматом.

Автоморфизмы дерева сохраняют уровень вершины, отношение быть потомком. Отсюда легко установить

Предложение 1 *Для любого $x \in Aut(T_n)$ и вершины $v \in T_n$, если $u = x(v)$, то вершины u и v находятся на одном уровне, и образ $SubTr(v)$ равен $SubTr(u)$.*

Из определения автоморфизма также следует

Предложение 2 *Слово $u \in T_n$ будет началом $v \in T_n$ тогда и только тогда, когда $x(u)$ начало $x(v)$.*

Последнее влечет важный для дальнейшего факт:

Предложение 3 *Автоморфизм дерева T_n однозначно определяется своими значениями на вершинах уровня n.*

Автоморфизм дерева индуцирует автоморфизмы его поддеревьев, которые называются ограничениями или проекциями.

Определение 7 *Пусть $x \in Aut(T_n)$, $v \in T_n$. Ограничением автоморфизма x в слове v называется автоморфизм $x|_v \in Aut(T_{n-l(v)})$ такой, что*

$$x(vu) = x(v)x|_v(u).$$

Для любой вершины автоморфизм с указанным свойством существует и единственен.

Определим группу автоморфизмов $W_n \leq Aut(T_n)$ изоморфную $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз).

Будем говорить, что автоморфизм переставляет поддеревья в вершине v ($l(v) < n$), используя подстановку $\sigma : H \to H$, если $x(vh) = x(v)\sigma(h)$ для всех $h \in H$. В общем случае автоморфизм может переставлять поддеревья совершенно произвольным образом.

Группа всех автоморфизмов $Aut(T_n)$ изоморфна сплетению n симметрических групп $(\dots(Sym(k) \wr Sym(k)) \wr Sym(k)$, где $k = |H|$ (см. [4]). Рассмотрим естественное вложение группы H в $Sym(k)$, при котором каждому элементу $h_0 \in H$ ставится в соответствие подстановка $h \mapsto h_0 * h$. В группу W_n мы включим только те автоморфизмы, которые переставляют поддеревья, используя подстановки именно такого вида.

Определение 8 *W_n – это множество всех автоморфизмов $x \in Aut(T_n)$ таких, что для любого $v \in T_n$, $l(v) < n$ существует $x_v \in H$ такое, что для всех $h \in H$ $x(vh) = x(v)h'$, где $h' = x_v * h$.*

Для каждого $v \in T_n$, $l(v) < n$, x_v, указанное в определении 8, называют портретом автоморфизма в вершине v (см. [5], раздел 1.2.2; [6], раздел 1.3.2.).

Определение 9 *Портрет автоморфизма x – это отображение $v \mapsto x_v$.*

Портрет x_v в вершине v указывает, как именно автоморфизм x переставляет поддеревья $SubTr(vh)$ $h \in H$ (см. Предложение 1). А именно, поддерево $SubTr(vh)$ под действием x переходит в поддерево $SubTr(x(v)h')$, $h' = x_v * h$.

Автоморфизм всегда можно восстановить по его портрету. Более того, всякое отображение из T_{n-1} в H является портретом некоторого единственного автоморфизма из W_n. А именно, имеет место

Предложение 4 *(см. [6], раздел 1.3.2.)Для любого $\tau : T_{n-1} \to H$ отображение $x : T_n \to T_n$, определяемое индукцией по длине слова,*
1) $x(\emptyset) = x(\emptyset)$,
2) для всех $v \in T_{n-1}$, $h \in H$ $x(vh) = x(v)h'$, $h' = \tau(v) * h$
является автоморфизмом, и его портрет совпадает с τ, то есть $x_v = \tau(v)$

Доказательство. Сразу следует из определения портрета автоморфизма.

Следующее предложение (которое легко следует из определений, приведенных выше) описывает композицию двух автоморфизмов из W_n

Предложение 5 *Пусть $x, y \in W_n$ тогда*
1) $(x \circ y)_\emptyset = x_\emptyset \circ y_\emptyset$,
2) $(x \circ y)|_h = x|_{y_\emptyset * h} \circ y|_h$ для всех $h \in H$.

Предложение 6 *Группа $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз) изоморфна W_n*

Доказательство ведем индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $x \in W_n$ – автоморфизм. Поставим ему в соответствие пару $(x_\emptyset, f)$, где $f : H \to W_{n-1}$, $f(h) = x|_h$. Указанное соответствие является изоморфизмом групп W_n и $W_{n-1} \wr H$. Это следует из предложения 5. Применяя затем предположение индукции, мы получим требуемый факт. ЧТД.

2. Кодирование автоморфизмов.
Построение мономорфизма ϕ_n в частном случае

Зафиксируем некоторую конечную группу H. Ее порядок обозначим k Зафиксируем некоторую нумерацию ее элементов:

$$H = \{h_0, h_1, \ldots h_{k-1}\}. \tag{2}$$

При этом будем считать, что h_0 – это нейтральный элемент группы. В дальнейшем h_i будет всегда обозначать i-й элемент группы H в этой фиксированной нумерации.

Группа W_n, определенная в разделе 1 (определение 8), – это группа автоморфизмов корневого дерева с $n+1$ уровнем. Она изоморфна кратному сплетению $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз) с обычной расстановкой скобок (предложение 6)

Нам понадобится некоторый способ кодирования автоморфизмов из W_n словами над алфавитом H. Мы определим кодирующее отображение

$$s_n : W_n \to H^m, \quad m = (k^n - 1)/(k-1)$$

рекурентным образом. Напомним, что x_v – это портрет автоморфизма в вершине v (см. определение 8).

Определение 10 *При $n = 1$ положим $s_1(x) = x_\emptyset$ для $x \in W_1 = H$. При $n > 1$:*

$$s_n(x) = x_\emptyset s_{n-1}(x|_{h_0}) s_{n-1}(x|_{h_1}) \dots s_{n-1}(x|_{h_{k-1}}). \tag{3}$$

При $n = 2$, $s_2 : W_2 \to H^{k+1}$ получим $s_2(x) = x_\emptyset s_1(x|_{h_0}) \dots s_1(x|_{h_{k-1}})$. Далее, поскольку $s_1(x) = x_\emptyset$, и портрет автоморфизма $x|_{h_i}$ совпадает с портретом x на поддереве с корнем в h_i, $s_1(x|h_i) = x_{h_i}$, следовательно $s_2(x) = x_\emptyset x_{h_0} x_{h_1} \dots x_{h_{k-1}}$ (здесь справа стоит слово над алфавитом H, а не результат выполнения операции в группе).

Для примера выпишем $s_3(x)$ в случае $H = Z_2$:

$$s_3(x) = x_\emptyset\, x_0\, x_{00} x_{01}\, x_1\, x_{10} x_{11}.$$

Отображение s_n выписывает портрет, проходя вершины дерева в соответствии с алгоритмом поиска в глубину. Поскольку автоморфизм дерева может быть однозначно восстановлен по его портрету (см. Предложение 4) и наоборот, отображение s_n биективно.

Наша конечная цель – построить вложение $\phi_n : H \wr W_n \to W_{m+1}$, где $m = (k^n - 1)/(k-1)$. Мы должны указать для каждой пары $(x, f) \in H \wr W_n$, где $x \in W_n$, $f : W_n \to H$, каким будет автоморфизм $y = \phi_n(x, f)$.

Портрет y до уровня m будет зависеть только от x, и мы будем задавать его специальным отображением $\psi_n : W_n \to W_m$. Портрет на последнем уровне m будет зависеть также от f.

Прежде чем перейти к общему случаю, покажем, как действует ϕ_2 для $H = Z_2$ и $n = 2$.

Пусть $H = Z_2$, тогда $W_2 \cong Z_2 \wr Z_2$, $W_3 \cong (Z_2 \wr Z_2) \wr Z_2$ и т.д. Вначале определим отображение $\psi_2 : W_2 \to W_3$. Пусть $x \in W_2$, тогда портрет $\psi_2(x)$ строится по портрету x так, как показано на рисунке 1 ($\psi_2(x)$ — В y: $y_\emptyset = x_\emptyset$, $y_0 = x_0$, $y_1 = x_1$, $y_{00} = y_{01} = x_1$, $y_{10} = y_{11} = x_1$).

Отображение ψ_2 обладает следующим свойством. Для любых $a, x \in W_2$ выполнено равенство $s_2(a)^{\psi_2(x)} = s_2(x \circ a)$ (см рисунок 2). Действительно, справа на рисунке показан код автоморфизма a. Действуя на слово $s_2(a) = a_\emptyset a_0 a_1$ автоморфизмом $\psi_2(x)$, мы получаем слово $b_\emptyset b_0 b_1$. При этом можно заметить, что если $a_\emptyset = 0$, то $b_0 = x_0 + a_0$, $b_1 = x_1 + a_1$, если же наоборот $a_\emptyset = 1$, то $b_0 = x_1 + a_0$, $b_1 = x_0 + a_1$.

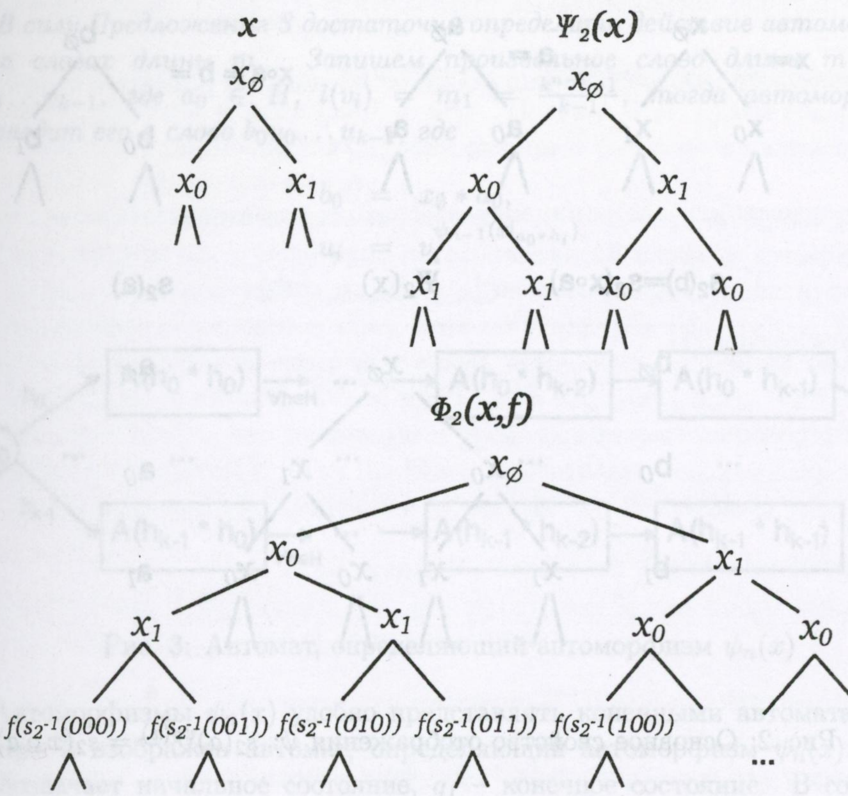


Рис. 1: Построение мономорфизма ϕ для случая $H = Z_2$ и $n = 2$

Таким образом, слово $b_\emptyset b_0 b_1$ есть не что иное как код автоморфизма $b = x \circ a$. Далее этот факт будет сформулирован и доказан для общего случая (теорема 1).

Отметим также, что отображение ψ_2 само по себе является вложением группы W_2 в W_3 (предложение 10).

Пусть теперь $(x, f) \in Z_2 \wr W_2$, то есть $f : W_2 \to Z_2$, $x \in W_2$. Определим $\phi_2(x, f) \in W_4$, для этого мы достраиваем автоморфизм $\psi_2(x)$, располагая на самом нижнем уровне значения функции f так, как показано на рисунке 1. Это расположение описывается формулой $y_v = f(s_n^{-1}(v))$ для всех v длины 3. Полученное отображение ϕ_2 является искомым мономорфизмом (теорема 2).

В следующем разделе мы построим инъективное отображение $\psi_n : W_n \to W_m$ $(m = \frac{k^n-1}{k-1})$ для общего случая (определение 11) и докажем (теорема 1), что для любых a, $x \in W_n$

$$s_n(a)^{\psi_n(x)} = s_n(x \circ a). \tag{4}$$

То есть авторморфизм $\psi_n(x) \in W_m$ преобразует код любого автоморфизма $a \in W_n$ в код автоморфизма $x \circ a \in W_n$.

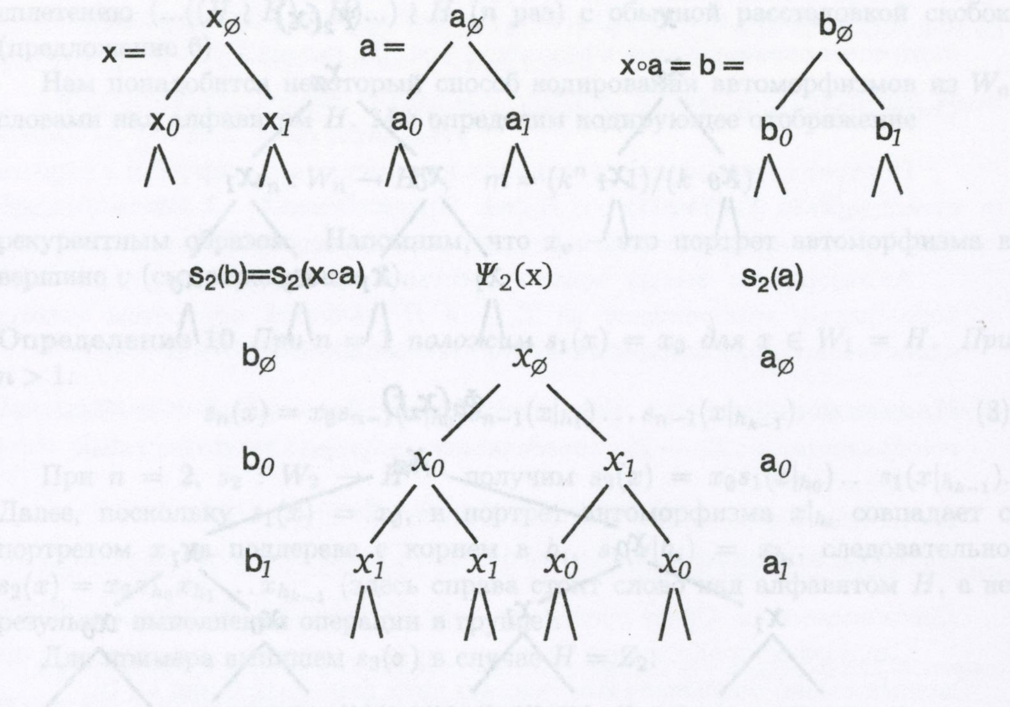


Рис. 2: Основное свойство отображения ψ: $s_2(a)^{\psi_2(x)} = s_2(x \circ a)$

Отображение ψ_n также является вложением группы W_n в W_m (предложение 10). Используя ψ_n, мы затем определим ϕ_n (определение 12) и докажем, что ϕ_n – мономорфизм (теорема 2).

Отметим, что в разделе при построении ϕ_n и при доказательстве основной теоремы мы будем пользоваться исключительно соотношением (4) и не будем ссылаться на определение ψ_n и другие его свойства. отображения ψ_n, удовлетворяющего соотношению

3. Вспомогательное отображение ψ_n

В этом разделе мы построим инъективное отображение $\psi_n : W_n \to W_m$, обладающее свойством (4): для любых a, $x \in W_n$

$$s_n(a)^{\psi_n(x)} = s_n(x \circ a).$$

Здесь H фиксированная конечная группа; $k = |H|$; $m = (k^n - 1)/(k-1)$; $s_n : W_n \to H^m$ - это кодирующее отображение, определенное в предыдущем разделе.

Определение 11 *Определим отображение ψ_n по индукции:*

1) Положим $\psi_1(x) = x$, $x \in W_1 = H$.

2) Для каждого $x \in W_n$, $\psi_n(x) = y$, где $y \in W_m$- автоморфизм, действующий следующим образом.

В силу Предложения 3 достаточно определить действие автоморфизма y на словах длины m. Запишем произвольное слово длины m в виде $a_0v_0\ldots v_{k-1}$*, где* $a_0 \in H$, $l(v_i) = m_1 = \frac{k^{n-1}-1}{k-1}$*, тогда автоморфизм y переводит его в слово* $b_0u_0\ldots u_{k-1}$*, где*

$$b_0 = x_\emptyset * a_0, \tag{5}$$

$$u_i = v_i^{\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i})} \tag{6}$$

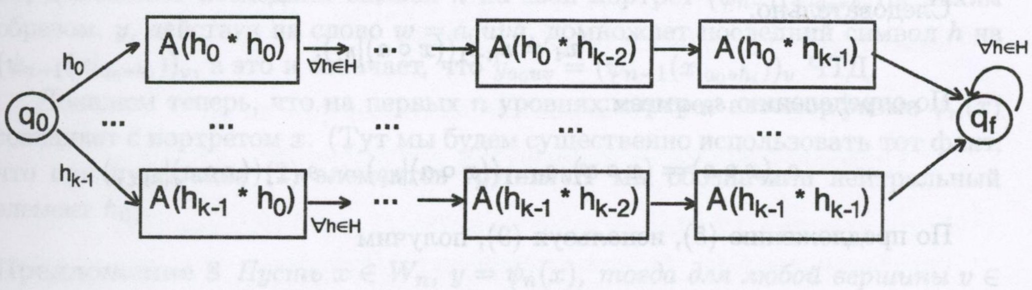


Рис. 3: Автомат, определяющий автоморфизм $\psi_n(x)$

Автоморфизмы $\psi_n(x)$ удобно представлять конечными автоматами. На рисунке 3 изображен автомат, определяющий автоморфизм $\psi_n(x)$. Здесь q_0 обозначает начальное состояние, q_f – конечное состояние. В состоянии q_0 функция выхода автомата – это домножение на элемент $x_\emptyset \in H$ слева. $A(h_i * h_j)$ – это автоматы, определяющие автоморфизмы $\psi_{n-1}(x|_{h_i * h_j})$. При соединении автоматов $A(h_i * h_j)$ между собой следует перенаправить все стрелки, указывающие на конечное состояние первого автомата, на начальное состояние второго.

Теперь докажем основное равенство (4).

Теорема 1 *Для любых* $a, x \in W_n : s_n(a)^{\psi_n(x)} = s_n(x \circ a)$.

Доказательство. Ведем индукцию по n. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $a, x \in W_n$. Обозначим

$$v_i = s_{n-1}(a|_{h_i}), \quad l(v_i) = m_1 = (k^{n-1} - 1)/(k - 1) \quad (i = \overline{0, k-1}) \tag{7}$$

Тогда по определению s_n

$$s_n(a) = a_\emptyset v_1 \ldots v_{k-1}.$$

Теперь, используя определение ψ_n, выясним, как ψ_n преобразует слово $s_n(a)$:

$$s_n(a)^{\psi_n(x)} = b_0u_0\ldots u_{k-1}, \tag{8}$$

где

$$b_0 = x_\emptyset * a_\emptyset, \tag{9}$$

$$u_i = v_i^{\psi_n(x|_{a_\emptyset * h_i})} = s_{n-1}(a|_{h_i})^{\psi_n(x|_{a_\emptyset * h_i})}.$$

Используя предположение индукции, из последнего равенства получим:

$$u_i = s_{n-1}(x|_{a_\emptyset * h_i} \circ a|_{h_i}).$$

По предложению (5) ограничение композиции $x \circ a$ есть композиция ограничений x и a:

$$(x \circ a)|_{h_i} = x|_{a_\emptyset * h_i} \circ a|_{h_i}.$$

Следовательно,

$$u_i = s_{n-1}((x \circ a)|_{h_i}). \tag{10}$$

По определению s_n имеем:

$$s_n(x \circ a) = (x \circ a)_\emptyset s_{n-1}((x \circ a)|_{h_1}) \dots s_{n-1}((x \circ a)|_{h_{k-1}}). \tag{11}$$

По предложению (5), используя (9), получим

$$(x \circ a)_\emptyset = x_\emptyset * a_\emptyset = b_0 \tag{12}$$

Из (11), используя (10), (12), получим

$$s_n(x \circ a) = b_0 u_1 \dots u_{k-1}.$$

Откуда, учитывая (8),

$$s_n(x \circ a) = s_n(a)^{\psi_n(x)}$$

Утверждение теоремы показано.

Для того, чтобы проиллюстрировать действие отображения ψ_n, мы покажем, как из портрета автоморфизма x получается портрет $\psi_n(x)$.

Разобьем все множество уровней дерева T_m от первого до $m-1$-го на классы $(m = (k^n - 1)/(k-1))$:

$$\{1, \dots, m_1\};\ \{m_1 + 1, \dots, 2m_1\};\ \dots;\ \{(k-1)m_1 + 1, \dots, km_1\}$$

где $m_1 = (k^{n-1} - 1)/(k-1)$.

Мы укажем портрет для корневой вершины (уровень 0), а затем отдельно для каждого из вышеуказанных классов.

Предложение 7 *Пусть $x \in W_n$, $y = \psi_n(x)$, тогда:*

1) $y_\emptyset = x_\emptyset$

2) Пусть $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Портрет на уровнях $im_1 + 1, \dots, (i+1)m_1$ задается следующим образом: для любых $a_0 \in H$, $u, v \in H^*$ таких, что $l(u) = im_1$, $l(v) < m_1$, выполняется:

$$y_{a_0 u v} = (\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i}))_v.$$

Доказательство. Пункт 1) сразу следует из соотношения (5) в определении 11.

2) Будем говорить, что автоморфизм y действует на окончание v слова uv автоморфизмом z, если $(uv)^y = u^y v^z$. Пусть $h \in H$, будем говорить, что автоморфизм y домножает последний символ h слова vh на элемент $a \in H$, если $(vh)^y = v^y b$, где $b = a *_H h$.

Рассмотрим действие автоморфизма y на слово $w = a_0 uvh$ $(h \in H)$. По определению 11, y действует на окончание vh слова w автоморфизмом $\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i})$. Автоморфизм $\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i})$ в свою очередь, действуя на слово vh, домножает последний символ h на свой портрет $(\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i}))_v$ Таким образом, y, действуя на слово $w = a_0 uvh$, домножает последний символ h на $(\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i}))_v$, а это и означает, что $y_{a_0 uv} = (\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i}))_v$ ЧТД.

Докажем теперь, что на первых n уровнях портрет автоморфизма $\psi_n(x)$ совпадает с портретом x. (Тут мы будем существенно использовать тот факт, что при нумерации (2) элементов группы H мы обозначили нейтральный элемент h_0).

Предложение 8 *Пусть $x \in W_n$, $y = \psi_n(x)$, тогда для любой вершины $v \in T_n$, $l(v) < n$ имеет место $y_v = x_v$.*

Доказательство будем вести индукцией по n. Если $x \in W_1$, то $\psi_1(x) = x$ по определению, и утверждение показано. Пусть теперь $x \in W_n$. По предложению 7 на уровнях $\{1, \ldots, m_1\}$ портрет $y = \psi_n(x)$ определяется соотношением:

$$y_{a_0 v} = (\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_0}))_v,$$

где v – слово длины меньше n. Поскольку h_0 – нейтральный элемент группы H,

$$y_{a_0 v} = (\psi_{n-1}(x|_{a_0}))_v.$$

По предположению индукции ψ_{n-1} сохраняет портрет на первых $n-1$ уровнях. Таким образом, портрет y на уровнях от 1 до $n-1$ совпадает с портретом x: $y_{a_0 v} = x_{a_0 v}$. Портрет корневой вершины ψ_n сохраняет по определению. Таким образом, утверждение показано. ЧТД.

Из предложения 8 немедленно следует

Предложение 9 *Отображение $\psi_n : W_n \to W_m$ инъективно.*

Предложение 10 *Отображение $\psi_n : W_n \to W_m$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in W_n$. Докажем, что $\psi_n(x_1 \circ x_2) = \psi_n(x_1) \circ \psi_n(x_2)$. Для этого мы рассмотрим произвольное слово v длины m и покажем, что его образы при отображениях $\psi_n(x_1 \circ x_2)$ и $\psi_n(x_1) \circ \psi_n(x_2)$ совпадают. Обозначим $a = s_n^{-1}(v)$, тогда, применяя теорему 1, запишем:

$$v^{\psi_n(x_2)} = s_n(a)^{\psi_n(x_2)} = s_n(x_2 \circ a).$$

Следовательно,

$$v^{\psi_n(x_1)\circ\psi_n(x_2)} = s_n(x_2 \circ a)^{\psi_n(x_1)} = s_n(x_1 \circ x_2 \circ a)$$

Рассмотрим теперь $v^{\psi_n(x_1 \circ x_2)}$. Применяя снова теорему 1, сразу получим:

$$v^{\psi_n(x_1 \circ x_2)} = s_n(a)^{\psi_n(x_1 \circ x_2)} = s_n(x_1 \circ x_2 \circ a).$$

Таким образом, $v^{\psi_n(x_1 \circ x_2)} = v^{\psi_n(x_1)\circ\psi_n(x_2)}$. Из этого следует, что отображения $\psi_n(x_1 \circ x_2)$ и $\psi_n(x_1) \circ \psi_n(x_2)$ совпадают и на словах меньшей длины, то есть $\psi_n(x_1 \circ x_2) = \psi_n(x_1) \circ \psi_n(x_2)$. Кроме того, поскольку ψ_n инъективно, ψ_n является мономорфизмом. ЧТД.

4. Построение мономорфизма ϕ_n

Определим теперь отображение $\phi_n : H \wr W_n \to W_{m+1}$.

Определение 12 *Для каждой пары* $(x, f) \in H \wr W_n$, $x \in W_n$, $f : W_n \to H$ *определим* $y = \phi_n(x, f)$, *задав портрет* y. *Портрет* y *строится следующим образом:*

1) $y_v = (\psi_n(x))_v$, *для* $v \in H^*$, $l(v) < m$

2) $y_v = f\big(s_n^{-1}(v)\big)$, *для* $v \in H^*$, $l(v) = m$

Теорема 2 *Отображение* ϕ_n *является мономорфизмом.*

Доказательство. Для каждого $(x, f) \in H \wr W_n$ определим $\tilde{\alpha}_{x,f} : H^m \times H \to H^m \times H$ следующим образом:

$$\tilde{\alpha}_{x,f} = \tilde{s_n} \circ \alpha_{x,f} \circ \tilde{s_n}^{-1},$$

где $\tilde{s_n} : W_n \times H \to H^m \times H$ определяется по формуле $\tilde{s_n}(y, h) = (s_n(y), h)$, а $\alpha_{x,f}$ было определено ранее (1).

Отображение $\tilde{\alpha}_{x,f}$ действует, в сущности, так же как и $\alpha_{x,f}$, но только оперирует кодами автоморфизмов вместо самих автоморфизмов, то есть $\alpha_{x,f}(y, h) = (y', h')$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\alpha}_{x,f}(s_n(y), h) = (s_n(y'), h')$.

В силу Леммы 1 $H \wr W_n$ изоморфно группе $\mathcal{A} = \{\alpha_{x,f} : (x, f) \in H \wr W_n\}$ (операцией в группе $\mathcal{A}$ является композиция), причем, отображение $(x, f) \mapsto \alpha_{x,f}$ – изоморфизм. По определению $\tilde{\alpha}_{x,f}$ есть сопряжение $\alpha_{x,f}$, поэтому отображение $\alpha_{x,f} \mapsto \tilde{\alpha}_{x,f}$ будет изоморфизмом групп $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\alpha}_{x,f} : (x, f) \in H \wr W_n\}$ относительно композиции. Итак, группа $\tilde{\mathcal{A}}$ изоморфна $H \wr W_n$, причем отображение $(x, f) \mapsto \tilde{\alpha}_{x,f}$ – изоморфизм.

Отображение $\tilde{\alpha}_{x,f}$ действует на множестве $H^m \times H = H^{m+1}$, то есть, фактически, на словах длины $m+1$. Покажем, что отображения $\phi_n(x, f)$ и $\tilde{\alpha}_{x,f}$ совпадают на словах длины $m+1$. То есть для любого слова v длины $m+1$ выполнено равенство:

$$v^{\phi_n(x,f)} = v^{\tilde{\alpha}_{x,f}}. \tag{13}$$

Зафиксируем слово $v = uh$ длины $m+1$, где u – слово длины m, $h \in H$. Пусть $u'h' = v^{\phi_n(x,\, f)}$, где u' – слово длины m, $h' \in H$. Восстанавливая действие автоморфизма $\phi_n(x, f)$ по его портрету (см. Предложение 4) получим

$$u' = u^{\phi_n(x,\, f)} \tag{14}$$

$$h' = f(s_n^{-1}(u)) *_H h \tag{15}$$

Портреты $\phi_n(x, f)$ и $\psi_n(x)$ на вершинах уровня меньше m по определению совпадают. Следовательно, автоморфизмы $\phi_n(x, f)$ и $\psi_n(x)$ действуют на словах длины меньшей либо равной m одинаково. Поэтому (14) можно переписать в виде:

$$u' = u^{\psi_n(x)}. \tag{16}$$

Обозначим $y \in W_n$ – автоморфизм, код которого – это слово u.

$$y = s_n^{-1}(u). \tag{17}$$

Применяя последовательно (16), (17), (4), получим:

$$u' = u^{\psi_n(x)} = s_n(y)^{\psi_n(x)} = s_n(x \circ y). \tag{18}$$

Подставим (17) в (15):

$$h' = f(y) *_H h. \tag{19}$$

По определению $\alpha_{x,\,f}$ (1) $\alpha_{x,\,f}(y,\, h) = (x \circ y,\; f(y) *_H h)$.

Но $(x \circ y,\, f(y) *_H h) = \alpha_{x,\,f}(y, h)$ эквивалентно $(s_n(x \circ y), f(y) *_H h) = \tilde{\alpha}_{x,\,f}(s_n(y), h)$, то есть, применяя (18), (19), получим $(u', h') = \tilde{\alpha}_{x,\,f}(u, h)$. Имеем:

$$v^{\phi_n(x,\, f)} = (u',\, h') = \tilde{\alpha}_{x,\,f}(u,\, h) = v^{\tilde{\alpha}_{x,\,f}}.$$

Итак, мы установили равенство (13) для слов длины $m+1$. Теперь мы готовы показать, что ϕ_n является мономорфизмом. Пусть $(x_1, f_1) *_{H \wr W_n} (x_2, f_2) = (x_3, f_3)$. Тогда, в силу изоморфизма, $\tilde{\alpha}_{x_3,\, f_3} = \tilde{\alpha}_{x_1,\, f_1} \circ \tilde{\alpha}_{x_2,\, f_2}$, поэтому в силу (13) для всех слов длины $m+1$

$$v^{\phi_n(x_3,\, f_3)} = v^{\phi_n(x_1,\, f_1) \circ \phi_n(x_2,\, f_2)}. \tag{20}$$

По Предложению 2 (20) выполнено для всех слов длины меньшей либо равной $m+1$, т. е.

$$\phi_n(x_3,\, f_3) = \phi_n(x_1,\, f_1) \circ \phi_n(x_2,\, f_2).$$

Последнее означает, что ϕ_n сохраняет операцию, инъективность ϕ_n следует непосредственно из определения ϕ_n и инъективности ψ_n. Таким образом ϕ_n – мономорфизм. ЧТД.

Путем незначительного изменения определения ϕ_n мы можем обобщить наш результат и построить вложение группы $W_l \wr W_n$. А именно, определим теперь отображение $\phi'_{l,n} : W_l \wr W_n \to W_{m+l}$ следующим образом:

Определение 13 *Для каждой пары* $(x, f) \in W_l \wr W_n$, $x \in W_n$, $f : W_n \to W_l$ *определим* $y = \phi'_{l,n}(x, f)$, *задав портрет* y. *Портрет* y *строится следующим образом*

1) $y_v = (\psi_n(x))_v$, *для* $v \in H^*$, $l(v) < m$

2) $y|_v = f\left(s_n^{-1}(v)\right)$, *для* $v \in H^*$, $l(v) = m$

То есть теперь мы достраиваем к автоморфизму $\psi_n(x)$ не один уровень, а l уровней, и располагаем там портреты автоморфизмов $f(s_n^{-1}(v))$.

Рассуждения теоремы 2 обобщаются тривиальным образом. Далее, используя полученное таким образом вложение, можно по индукции строить вложение произвольного кратного сплетения.

Заключение

В работе построен мономорфизм группы $H \wr W_n$ в группу W_{m+1}. Разумеется, такое вложение не единственно. Это следует, например, из произвольности нумерации элементов группы H. Однако даже этим не исчерпываются все варианты. Принципиально иное вложение построено в [3]. Для дальнейшего исследования интересно было бы рассмотреть другие вложения, а также изучить вопрос о минимальности, то есть для какого минимального n возможно вложение того или иного кратного сплетения в группу W_n.

В работе также было показано, как на основе полученного вложения строить вложения произвольных кратных сплетений. Было бы интересно рассмотреть другие более компактные способы таких вложений в группы W_n для меньшего n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каргаполов М.И. Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, – 1972. – 240с.

2. Калужнин Л.А. Избранные главы теории групп. – Киев: Изд-во КГУ. – 1979. – 52с.

3. Леонов Ю.Г. Вложения кратных сплетений групп Z_2 в группы Калужнина. // Математичні Студії. – 2007. – Т.28 N1 – С.18-24.

4. Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сущанский В.И. Автоматы, динамические системы и группы. // Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, – 2000. – Т.231, – С. 134-214.

5. Bartholdi L., Grigorchuk R. I., Sunik Z. Branch groups. Handbook of algebra. – 2003 – Vol. 3 – North-Holland, Amsterdam, 989–1112.

6. Nekrashevych V. Self-Similar Groups. – Amer Mathematical Society. – 2005. – 231p.

Статья получена: 04.07.2008; окончательный вариант: 07.09.2009; принята: 05.10.2009.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 875, 2009, с.25–47

О векторных полиномиальных последовательностях

С.М. Загороднюк
Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua

В работе определяются и изучаются N-мерные (векторные) полиномиальные последовательности ($N \in \mathbb{N}$). Введено понятие оператора N-мерной полиномиальной последовательности и изучаются свойства этого оператора. Получено спектральное представление для векторной полиномиальной последовательности. Устанавливается изоморфизм А.Н. Колмогорова между пространством значений одномерной полиномиальной последовательности и пространством $L^2(F)$, где F - некоторая спектральная функция последовательности. Аналогичный результат при некоторых ограничениях справедлив и для векторных полиномиальных последовательностей.

Загороднюк С.М., **Про векторні поліноміальні послідовності.** У роботі визначаються та досліджуються N-мірні (векторні) поліноміальні послідовності ($N \in \mathbb{N}$). Введено поняття оператора N-мірної поліноміальної послідовності та вивчаються властивості цього оператору. Одержано спектральний розклад для векторної поліноміальної послідовності. Встановлюється ізоморфізм А.Н. Колмогорова між простором значень одномірної поліноміальної послідовності та простором $L^2(F)$, де F - деяка спектральна функція послідовності. Аналогічний результат за деяких обмежень справедливий і для векторних поліноміальних послідовностей.

S.M. Zagorodnyuk, **On vector polynomial sequences.** In this work N-dimensional (vector) polynomial sequences are defined and studied ($N \in \mathbb{N}$). A notion of an operator of a N-dimensional polynomial sequence is introduced and properties of this operator are studied. A spectral representation for a vector polynomial sequence is obtained. A.N. Kolmogorov's isomorphism between the space of values of a one-dimensional polynomial sequence and a space $L^2(F)$ is established, where F is a spectral function of the sequence. Under some restrictions, an analogous result is true for vector polynomial sequences as well.
2000 Mathematics Subject Classification: 42C05, 33C45, 60G12.

1. Введение

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n \in T}$ в некотором гильбертовом пространстве H, где T - некоторое счетное множество индексов. Функцию

$K_{n,m} := (x_n, x_m)$, называют корреляционной функцией последовательности $\{x_n\}_{n\in T}$ (здесь $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в H). В том случае, когда множество T является множеством целых чисел и корреляционная функция зависит от разности аргументов, последовательность называют стационарной. В этом случае корреляционная функция и последовательность допускают спектральные представления:

$$K_{n,m} = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d(F_\theta x_0, x_0), \qquad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$x_n = U^n x_0 = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ - ортогональное разложение единицы некоторого унитарного оператора U в H.

К. Карунен изучал последовательности вида

$$x_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda) dZ_\lambda, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где φ_n - некоторые комплекснозначные функции на $\mathbb{R}$, Z - некоторая мера на $\mathbb{R}$, а интеграл понимался в том или ином смысле [1]. Он показал, что (3) эквивалентно спектральному представлению корреляционной функции следующего вида:

$$K_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda)\overline{\varphi_m(\lambda)} dF_\lambda, \ n, m \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

где F - неотрицательная мера на $\mathbb{R}$.

Разложение вида (3) удобно тем, что случайный процесс представляется в виде интеграла по случайной мере (в частном случае, суммы), где подинтегральные функции (соответственно слагаемые) неслучайны. В практическом применении легко вычислить корреляционную функцию такой последовательности.

Нас будут интересовать последовательности, для которых функции φ_n в представлении (3) являются ортогональными многочленами. Именно, последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ называется полиномиальной, если она допускает представление

$$x_n = p_n(A)x_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) dE_\lambda x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

где A - некоторый самосопряженный оператор в H, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора A, а $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - система ортогональных многочленов на вещественной оси.

Напомним, что набор вещественных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент, называется системой ортогональных многочленов на вещественной оси относительно $\sigma(x)$, если выполняются соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\sigma(\lambda) = 0, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+ : \ n \neq m, \tag{6}$$

где $\sigma(\lambda)$ - неубывающая функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$.

Полная предистория возникновения последовательностей вида (5) описана в статье [2], см. также ссылки в ней. В работе [3] мы получили для полиномиальных последовательностей разложение Вольда. Примеры полиномиальных последовательностей мы укажем ниже.

В данной работе мы введем понятие векторной (или многомерной) полиномиальной последовательности. Для таких последовательностей можно получить аналоги известных результатов Ю.А. Розанова о многомерных стационарных последовательностях [4],[5]. Вводится понятие спектральной матрицы-функции векторной полиномиальной последовательности. В отличие от случая стационарной последовательности, для полиномиальной последо-вательности спектральная функция не обязательно единственна. Вводится оператор векторной полиномиальной последовательности и изучаются его свойства. Устанавливается изоморфизм А.Н. Колмогорова между пространством значений одномерной полиномиальной последовательности и пространством $L^2(F)$, где F - некоторая спектральная функция последовательности. Аналогичный результат справедлив и для векторных полиномиальных последовательностей при некоторых ограничениях.

Обозначения. Как обычно, мы обозначаем $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ множества комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно, а также $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество комплексных многочленов будем обозначать $\mathbb{P}$. Пространство n-мерных комплексных векторов $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, будет обозначаться $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $a \in \mathbb{C}^n$, то a^* обозначает комплексно сопряженный вектор.

Посредством $(\cdot,\cdot)_H$, $\|\cdot\|_H$ мы обозначаем скалярное произведение и норму в некотором гильбертовом пространстве H. Если это не приводит к недоразумению, индекс H мы не пишем. Посредством $\operatorname{Lin} M$ и $\operatorname{span} M$ обозначены линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка элементов множества M в H, соответственно. $\overline{M}$ означает замыкание множества $M \subseteq H$ в метрике H. Если L - подпространство H, то P_L^H обозначает оператор ортогонального проектирования в H на подпространство L. Для линейного оператора A в H мы обозначаем $D(A)$ его область определения, и посредством A^* обозначается сопряженный оператор, если он существует. Посредством $\overline{A}$ обозначается замыкание оператора A, если оно существует. Если для A существует обратный оператор, то мы обозначаем его A^{-1}. Если A ограничен, то $\|A\|$ обозначает его норму. Посредством E_H обозначается единичный оператор в H, т.е. $E_H x = x$, $x \in H$. Встречающиеся в работе гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными.

Пусть $M(x)$ является непрерывной слева неубывающей матрицей-функцией

$M(x) = (m_{k,l}(x))_{k,l=1}^N$ на $\mathbb{R}$, $M(-\infty) = 0$, и $\tau_M(x) := \sum_{k=1}^N m_{k,k}(x)$; $\Psi(x) = (dm_{k,l}/d\tau_M)_{k,l=1}^N$. Посредством $L^2(M)$ мы обозначаем множество (классов эквивалентности) векторных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$, таких, что (см., например, [6])

$$\|f\|^2_{L^2(M)} := \int_{\mathbb{R}} f(x)\Psi(x)f^*(x)d\tau_M(x) < \infty.$$

Пространство $L^2(M)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f,g)_{L^2(M)} := \int_{\mathbb{R}} f(x)\Psi(x)g^*(x)d\tau_M(x), \qquad f,g \in L^2(M).$$

Под финитными функциями мы будем понимать функции, принимающие отличные от нулевого вектора значения лишь на ограниченном подмножестве $\mathbb{R}$.

2. Спектральная функция последовательности. Изоморфизм А.Н. Колмогорова.

Рассмотрим полиномиальную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в некотором гильбертовом пространстве H, допускающую представление (5) с ортогональными многочленами (6). Введем следующие обозначения:

$$H_x = \operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \quad L_x = \operatorname{Lin}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}. \tag{7}$$

Подпространство H_x будем называть *пространством значений полиномиальной последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Ортогональные многочлены $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ удовлетворяют следующему разностному соотношению (см. [7]):

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}p_{n-1}(\lambda) - b_n p_n(\lambda) + c_n p_{n+1}(\lambda)\right) = \lambda p_n(\lambda), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

где $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, $c_n > 0$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, являются некоторыми числовыми последовательностями, а $c_{-1} = 0$, $p_{-1} = 0$.
В частности, для многочленов Чебышева 1-го рода $T_n(\lambda) = \cos(n \arccos\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in [-1,1]$, выполнено соотношение (8) с $a_n = 1$, $b_n = 0$, $c_n = \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$.

Если записать соотношение (8) с операторным аргументом, применить к вектору x_0 и учесть соотношение (5), мы придём к следующему равенству:

$$Ax_n = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1} - b_n x_n + c_n x_{n+1}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{9}$$

где A - самосопряженный оператор из (5).

Заметим, что для одной и той же полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ существуют и другие самосопряженные операторы, для которых имеет место представление вида (5) (например, можно взять любое самосопряженное расширение A). Однако, в силу соотношения (9) все эти операторы совпадают на L_x. Оператор, который задан на L_x равенствами (9) будем обозначать A_x и называть *оператором полиномиальной последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Оператор последовательности является симметрическим оператором в пространстве значений последовательности и является частью всех самосопряженных операторов, для которых имеет место представление вида (5).

Из соотношения (9) следует, что

$$A_x L_x \subseteq L_x, \tag{10}$$

и значит определен оператор $p(A_x)$, где $p(x) \in \mathbb{P}$. Более того, при этом выполняется $p(A_x) = p(A)$, поскольку на L_x операторы A_x и A совпадают. В частности, отсюда следует, что

$$x_n = p_n(A_x)x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

Пусть $\widetilde{A}$ является некоторым самосопряженным расширением A_x в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_x$. Тогда $p(A_x) = p(\widetilde{A})$, $p \in \mathbb{P}$, поскольку операторы A_x и $\widetilde{A}$ совпадают на L_x. Значит

$$x_n = p_n(A_x)x_0 = p_n(\widetilde{A})x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Следовательно, всевозможные самосопряженные расширения оператора последовательности A_x описывают все самосопряженные операторы для которых имеет место представление вида (5).

Определение 1 *Пусть A_x является оператором некоторой полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $\widetilde{A}$ является самосопряженным расширением A_x в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_x$. Функцию*

$$F(\lambda) = (P^{\widetilde{H}}_{H_x} \widetilde{E}_\lambda x_0, x_0)_H,$$

где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widetilde{A}$, будем называть **спектральной функцией полиномиальной последовательности** $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Из данного определения видно, что спектральная функция полиномиальной последовательности не обязана, вообще говоря, быть единственной. Множество спектральных функций полиномиальной последовательности порождается множеством спектральных функций симметрического оператора A_x (см. [8]).

Заметим, что для корреляционной функции полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ выполнено соотношение

$$K_{n,m} = (p_n(\widetilde{A})x_0, p_m(\widetilde{A})x_0)_{\widetilde{H}} = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)d(\widetilde{E}_\lambda x_0, x_0)_{\widetilde{H}} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda) dF(\lambda). \quad (13)$$

Ниже будет доказано, что дефектные числа оператора последовательности совпадают и значит он допускает самосопряженные расширения в H_x.

Теорема 1 *Пусть задана полиномиальная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в некотором гильбертовом пространстве H, и A_x является оператором последовательности. Пусть $\widehat{A}$ - некоторое самосопряженное расширение оператора A_x действующее в пространстве значений последовательности H_x, и $F(x)$ - соответствующая ему спектральная функция последовательности. Для произвольного элемента x из H_x существует и единственна функция $\varphi_x \in L^2(F)$ такая, что*

$$x = \varphi_x(\widehat{A}) x_0 = \int_{\mathbb{R}} \varphi_x(\lambda) d\widehat{E}_\lambda x_0, \quad (14)$$

где $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widehat{A}$.

Отображение $x \to \varphi_x$ является изометрическим отображением пространства значений последовательности H_x на всё пространство $L^2(F)$.

Данная теорема следует из более общей теоремы для векторных полиномиальных последовательностей с вещественной корреляционной функцией, которая будет доказана ниже. Ввиду важности одномерного случая мы привели здесь данную формулировку. Кроме того, в одномерном случае формула типа (14) имеет место для всех $x \in H_x$, чего уже нельзя сказать в многомерном случае.

Формулу (14) будем называть *спектральным представлением элементов пространства значений* полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Функцию φ_x в (14) назовём *спектральной характеристикой* элемента x из пространства значений последовательности.

В случае стационарной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H, изоморфизм между пространством значений последовательности и пространством $L^2(F)$, где F - спектральная функция последовательности, был установлен А.Н. Колмогоровым, а затем распространен на случай векторных стационарных последовательностей Ю.А. Розановым.

Приведем некоторые примеры полиномиальных последовательностей.

Пример 1 *(Белый шум).* Рассмотрим вероятностное пространство $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ случайных величин $\xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ с конечным вторым моментом и нулевым математическим ожиданием (здесь Ω есть пространство элементарных событий, $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра событий и P обозначает вероятность). Рассмотрим последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ортонормированных случайных величин (белый шум). В этом случае корреляционная функция равна

$$K_{n,m} = \delta_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (15)$$

Последовательность в гильбертовом пространстве, удовлетворяющую соотношению (15), называют фундаментальной. В работе [3] было показано, что произвольная фундаментальная последовательность является полиномиальной с произвольным выбором системы ортогональных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ (см. представление (5)), если только для этой системы многочленов параметры a_n в рекуррентном соотношении (8) постоянны: $a_n = a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. В частности, последнее условие всегда выполнено для ортонормированных многочленов. Таким образом, белый шум является полиномиальной последовательностью для произвольной системы ортонормированных многочленов в (5).

Пример 2 *(Вещественная часть некоторых почти периодических последовательностей).* Рассмотрим вероятностное пространство $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ (см. предыдущий пример). Пусть ζ_m, $m = 1, 2, ..., p$, - набор вещественных ортогональных случайных величин из H. Выберем произвольные точки λ_m, $m = 1, 2, ..., p$, на отрезке $[0, \pi]$. Рассмотрим последовательность

$$\xi_n = \sum_{m=1}^{p} \exp(in\lambda_m)\zeta_m, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Последовательность вида (16) является почти периодической стационарной последовательностью. Примером почти периодического явления может служить вибрация самолета с несколькими моторами, работающими в асинхронном режиме [9].

Рассмотрим вещественную часть последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. В виду вещественности случайных величин ζ_m записываем

$$\operatorname{Re}\xi_n = \sum_{m=1}^{p} \cos(n\lambda_m)\zeta_m, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Поскольку $\operatorname{Re}\xi_{-n} = \operatorname{Re}\xi_n$, достаточно рассматривать лишь неотрицательные значения индекса n. Положим

$$y_m = \cos\lambda_m, \qquad m = 1, 2, ..., p.$$

Тогда

$$x_n := \operatorname{Re}\xi_n = \sum_{m=1}^{p} \cos(n \arccos y_m)\zeta_m = \sum_{m=1}^{p} T_n(y_m)\zeta_m, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{18}$$

где T_n - многочлены Чебышева первого рода.

В силу рекуррентного соотношения (8) для многочленов Чебышева первого рода легко проверяется, что корреляционная функция $K_{n,m} = (x_n, x_m)$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$ удовлетворяет соотношению

$$K_{n-1,m} + K_{n+1,m} = K_{n,m-1} + K_{n,m+1}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{19}$$

где $K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$. Применяя теорему 1 из [2] заключаем, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$. Ниже будет доказано, что индексы дефекта оператора полиномиальной последовательности всегда равны. Значит существует самосопряженное расширение этого оператора внутри H. Согласно сказанному перед определением 1 это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в пространстве H.

Пример 3. Рассмотрим пространство $H = L^2([0,1])$ (классов эквивалентности) комплексных измеримых относительно меры Лебега на $[0,1]$ функций $f(t)$, $t \in [0,1]$, таких, что

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty.$$

В пространстве H рассмотрим оператор второй производной

$$A = \frac{d^2}{dt^2}, \tag{20}$$

определенный на множестве D_A бесконечно дифференцируемых функций из H таких, что

$$f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0.$$

Легко проверяется, что оператор A является симметрическим.

Рассмотрим произвольную систему ортогональных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент. Для данной системы выполняется соотношение (8) с некоторым набором коэффициентов a_n, b_n, c_n.

Выберем и зафиксируем произвольную функцию $x_0 = x_0(t) \in D_A$. Мы определим следующую последовательность в H:

$$x_{n+1} = \frac{1}{c_n}\left(a_n A x_n - c_{n-1}x_{n-1} + b_n x_n\right), \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{21}$$

где $x_{-1} = 0$, $c_{-1} = 0$. Пусть $\widetilde{A} \supseteq A$ является самосопряженным расширением оператора A в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$. Используя равенство (8), из соотношения (21) по индукции заключаем, что

$$x_n = p_n(A)x_0 = p_n(\widetilde{A})x_0, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{22}$$

Последнее равенство показывает, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в $\widetilde{H}$. Соотношение (21) эквивалентно соотношению

$$\frac{d^2}{dt^2}x_n(t) = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1}(t) - b_n x_n(t) + c_n x_{n+1}(t)\right), \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{23}$$

где $x_{-1}(t) = 0$, $c_{-1} = 0$. Значит функции $x_n(t)$ являются решением части бесконечной цепочки, описывающей бесконечный одномерный гармонический кристалл (см., например, [10]). Напомним, что цепочка Тода описывает бесконечный одномерный гармонический кристалл.

Наоборот, произвольное решение полубесконечной цепочки (23), как легко заключить по индукции, допускает представление (22) и значит является полиномиальной последовательностью.

Заметим также, что уравнения (23) при $n = 0, 1, 2, ..., N$; $N \in \mathbb{N}$, описывают колебания нагруженной струны, содержащей N точечных масс, см. [11].

3. Векторные полиномиальные последовательности. Спектральное представление. Спектральная матрица-функция.

Напомним следующее определение [3].

Определение 2 *Две полиномиальные последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *и* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *в гильбертовом пространстве* H, *отвечающие одной и той же системе многочленов* $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ *в представлении (5), называются* **полиномиально связанными**, *если их взаимная корреляционная функция* $R_{n,m} := (x_n, u_m)_H$ *удовлетворяет соотношению*

$$\frac{1}{a_n}(c_{n-1}R_{n-1,m} - b_n R_{n,m} + c_n R_{n+1,m}) =$$

$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}R_{n,m-1} - b_m R_{n,m} + c_m R_{n,m+1}\right), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{24}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *из рекуррентного соотношения (8),* $c_{-1} = 0$, $R_{-1,m} = R_{n,-1} = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$.

Определим векторные (многомерные) полиномиальные последовательности следующим образом.

Определение 3 *Набор из* N *полиномиальных последовательностей*

$$\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, ..., \{x_n^N\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \tag{25}$$

в гильбертовом пространстве H $(N \in \mathbb{N})$, *полиномиально связанных между собой, будем называть* N*-мерной (многомерной, векторной) полиномиальной последовательностью и изображать в виде вектор-столбца*

$$\vec{x}_n = (x_n^k)_{k=1}^N.$$

Пусть задана некоторая N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Введем следующие обозначения:

$$H_{\vec{x}} = \mathrm{span}\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+, 1\le r\le N}, \quad L_{\vec{x}} = \mathrm{Lin}\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+, 1\le r\le N}. \tag{26}$$

Подпространство $H_{\vec{x}}$ будем называть *пространством значений N-мерной полиномиальной последовательности* $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Определим следующие элементы:

$$x_n^{j\,'} = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1}^j - b_n x_n^j + c_n x_{n+1}^j\right), \qquad n\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le j\le N, \tag{27}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ из соотношения (24) для полиномиально связанных последовательностей $\{x_n^j\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Условия полиномиальной связанности последовательностей $\{x_n^j\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $1\le j\le N$ эквивалентны равенствам

$$(x_n^{j\,'}, x_m^k)_H = (x_n^j, x_m^{k\,'})_H, \qquad n,m\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le j,k\le N. \tag{28}$$

Выберем произвольный элемент $x\in L_{\vec{x}}$. Пусть x допускает представления

$$x = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^j, \qquad x = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \beta_{j,k}x_k^j, \qquad \alpha_{j,k},\beta_{j,k}\in\mathbb{C}, \tag{29}$$

где лишь конечное число коэффициентов $\alpha_{j,k},\beta_{j,k}$ отлично от нуля. Используя соотношение (28) мы можем записать

$$\left(\sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^{j\,'}, x_l^s\right)_H = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}(x_k^{j\,'}, x_l^s)_H = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}(x_k^j, x_l^{s\,'})_H =$$

$$= (x, x_l^{s\,'})_H, \qquad l\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le s\le N.$$

Аналогичным образом получаем

$$\left(\sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \beta_{j,k}x_k^{j\,'}, x_l^s\right)_H = (x, x_l^{s\,'})_H, \qquad l\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le s\le N.$$

В силу того, что $\mathrm{span}\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+,1\le r\le N} = H_{\vec{x}}$, мы получаем

$$\sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^{j\,'} = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \beta_{j,k}x_k^{j\,'}. \tag{30}$$

Суммы здесь и далее являются конечными. Определим оператор

$$A_{\vec{x}}x = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^{j\,'}, \qquad x\in L_{\vec{x}},\ x = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^j,\ \alpha_{j,k}\in\mathbb{C}. \tag{31}$$

В силу сказанного выше, это определение не зависит от выбора представления элемента x и является корректным. Оператор $A_{\vec{x}}$ является линейным оператором в пространстве значений последовательности $H_{\vec{x}}$ с плотной

областью определения $L_{\vec{x}}$. Оператор $A_{\vec{x}}$ будем называть *оператором N-мерной полиномиальной последовательности* $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.
Выберем произвольные $x, y \in L_{\vec{x}}$,

$$x = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{j,k}x_k^j, \quad y = \sum_{s=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty}\gamma_{s,l}x_l^s, \quad \alpha_{j,k}, \gamma_{s,l} \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$(A_{\vec{x}}x, y)_H = \sum_{j,s=1}^{N}\sum_{k,l=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\overline{\gamma_{s,l}}(A_{\vec{x}}x_k^j, x_l^s)_H = \sum_{j,s=1}^{N}\sum_{k,l=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\overline{\gamma_{s,l}}(x_k^{j\prime}, x_l^s)_H =$$

$$= \sum_{j,s=1}^{N}\sum_{k,l=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\overline{\gamma_{s,l}}(x_k^j, x_l^{s\prime})_H = \sum_{j,s=1}^{N}\sum_{k,l=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\overline{\gamma_{s,l}}(x_k^j, A_{\vec{x}}x_l^s)_H = (x, A_{\vec{x}}y)_H,$$

и значит оператор последовательности является симметрическим оператором. Из определения оператора N-мерной полиномиальной последовательности следует, что

$$A_{\vec{x}}L_{\vec{x}} \subseteq L_{\vec{x}}. \tag{32}$$

Значит определены все степени оператора $A_{\vec{x}}$ на $L_{\vec{x}}$, и $p(A_{\vec{x}})$, $p \in \mathbb{P}$.
Пусть полиномиальная последовательность $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ имеет представление

$$x_n^r = p_n(A_r)x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{33}$$

где A_r - самосопряженный оператор в H, $1 \leq r \leq N$. Если записать соотношение (8) с операторным аргументом A_r, применить к вектору x_0^r и учесть соотношение (33), мы получим равенство:

$$A_r x_n^r = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1}^r - b_n x_n^r + c_n x_{n+1}^r\right) = x_n^{r\prime} = A_{\vec{x}}x_n^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leq r \leq N. \tag{34}$$

Обозначим

$$L_{x^r} = \mathrm{Lin}\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \qquad 1 \leq r \leq N. \tag{35}$$

Из (34) следует, что

$$A_{x^r}x = A_r x = A_{\vec{x}}x, \qquad x \in L_{x^r}, \qquad 1 \leq r \leq N, \tag{36}$$

где A_{x^r} является оператором полиномиальной последовательности $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.
В частности, последнее соотношение показывает, что оператор N-мерной полиномиальной последовательности $A_{\vec{x}}$ является симметрическим расширением всех операторов A_{x^r} полиномиальных последовательностей $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ $(1 \leq r \leq N)$:

$$A_{\vec{x}} \supseteq A_{x^r}, \qquad 1 \leq r \leq N. \tag{37}$$

Из соотношения (36), с учетом (10), по индукции получаем, что

$$A^j_{x^r} x = A^j_{\vec{x}} x, \qquad x \in L_{x^r},\ j \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{38}$$

Учитывая соотношение (11) получаем

$$x^r_n = p_n(A_{x^r}) x^r_0 = p_n(A_{\vec{x}}) x^r_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, 1 \le r \le N. \tag{39}$$

Пусть $\widetilde{A}$ есть некоторое самосопряженное расширение $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_{\vec{x}}$. Из соотношения (32) по индукции заключаем, что

$$\widetilde{A}^n x = A^n_{\vec{x}} x, \qquad x \in L_{\vec{x}} = D(A_{\vec{x}}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и значит $p(\widetilde{A})x = p(A_{\vec{x}})x$, $x \in L_{\vec{x}}$, $p \in \mathbb{P}$. Следовательно, справедливы равенства

$$x^r_n = p_n(A_{\vec{x}}) x^r_0 = p_n(\widetilde{A}) x^r_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, 1 \le r \le N. \tag{40}$$

Таким образом, для векторной полиномиальной последовательности всегда найдется самосопряженный оператор $\widetilde{A}$, реализующий *согласованное спектральное представление* вида (40). Под согласованностью понимается то обстоятель-ство, что оператор $\widetilde{A}$ от r не зависит (в отличии от представлений (33)).

Наоборот, пусть $\widehat{A}$ есть некоторый самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\widehat{H}$, такой, что

$$x^r_n = p_n(\widehat{A}) x^r_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, 1 \le r \le N. \tag{41}$$

Записывая соотношение (8) с операторным аргументом $\widehat{A}$, и применяя к вектору x^r_0 мы получим равенство:

$$\widehat{A} x^r_n = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1} x^r_{n-1} - b_n x^r_n + c_n x^r_{n+1} \right) = x^r_n{}' = A_{\vec{x}} x^r_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{42}$$

Значит

$$\widehat{A} \supseteq A_{\vec{x}}. \tag{43}$$

Следовательно, всевозможные самосопряженные расширения оператора последовательности $A_{\vec{x}}$ дают все самосопряженные операторы $\widehat{A}$, для которых имеет место согласованное спектральное представление вида (41). Согласованное представление (41) для компонент N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ приводит к следующему *спектральному разложению N-мерной полиномиальной последовательности*:

$$\vec{x}_n = p_n(\widehat{A}) \vec{x}_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) d \begin{pmatrix} \widehat{E}_\lambda x^1_0 \\ \widehat{E}_\lambda x^2_0 \\ \vdots \\ \widehat{E}_\lambda x^r_0 \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{44}$$

где $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widehat{A}$, и понимается, что оператор $p_n(\widehat{A})$ действует на каждую компоненту вектора $\vec{x}_0$.

Определение 4 *Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором некоторой N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $\widetilde{A}$ является самосопряженным расширением $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}\supseteq H_x$. Матрицу-функцию*

$$F(\lambda)=(F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N=\left((P_{H_{\vec{x}}}^{\widetilde{H}}\widetilde{E}_\lambda x_0^j,x_0^k)_H\right)_{j,k=1}^N,$$

где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разло-жением единицы оператора $\widetilde{A}$, будем называть **спектральной матрицей-функцией N-мерной полиномиальной последовательности** $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Заметим, что для взаимной корреляционной функции компонент векторной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ выполнено соотношение

$$K_{n,m}^{r,s}:=(x_n^r,x_m^s)_H=(p_n(\widetilde{A})x_0^r,p_m(\widetilde{A})x_0^s)_{\widetilde{H}}=\int_{\mathbb{R}}p_n(\lambda)p_m(\lambda)d(\widetilde{E}_\lambda x_0^r,x_0^s)_{\widetilde{H}}=$$

$$=\int_{\mathbb{R}}p_n(\lambda)p_m(\lambda)dF_{r,s}(\lambda),\qquad n,m\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le r,s\le N. \tag{45}$$

Функцию

$$K_{n,m}=(K_{n,m}^{r,s})_{r,s=1}^N,\qquad n,m\in\mathbb{Z}_+,$$

будем называть **матричной корреляционной функцией N-мерной полиномиальной последовательности** $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Из (45) следует, что матричная корреляционная функция допускает спектральное представление:

$$K_{n,m}=\int_{\mathbb{R}}p_n(\lambda)p_m(\lambda)dF(\lambda),\qquad n,m\in\mathbb{Z}_+, \tag{46}$$

где F - спектральная матрица-функция последовательности.

Теорема 2 *Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H, и $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности. Индекс дефекта симметрического оператора $A_{\vec{x}}$ равен (j,k), где $0\le j,k\le N$*

В том случае, когда матричная корреляционная функция последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ вещественна (т.е. элементы матрицы-функции являются вещественнозначными функциями), дефектные числа оператора $A_{\vec{x}}$ совпадают. В частности, для одномерной полиномиальной последовательности индекс дефекта оператора последовательности равен $(0,0)$ или $(1,1)$.

Доказательство. Обозначим

$$v_n^r = A_{\vec{x}}^n x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{47}$$

Обозначим $S = \mathrm{Lin}\{v_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+, 1\le r\le N}$. Проверим, что $S = L_{\vec{x}}$. Действительно, из соотношения (39) следует, что $x_n^r \in S$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le r \le N$; и значит $L_{\vec{x}} \subseteq S$. Обратно, в силу того, что многочлены $\{p_n\}_0^\infty$ образуют линейный базис в пространстве $\mathbb{P}$, мы можем записать

$$v_n^r = A_{\vec{x}}^n x_0^r = \sum_{s=0}^n \xi_s p_s(A_{\vec{x}}) x_0^r = \sum_{s=0}^n \xi_s x_s^r \in L_{\vec{x}},\ \ \xi_s \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N,$$

и $S \subseteq L_{\vec{x}}$.

Выберем произвольный элемент $y \in L_{\vec{x}}$, $y = \sum_{r=1}^N \sum_{n=0}^\infty f_{r,n} v_n^r$, $f_{r,n} \in \mathbb{C}$, где лишь конечное число $f_{r,n}$ отлично от нуля. Выберем произвольное невещественное число z и рассмотрим систему уравнений:

$$-zd_{r,0} = f_{r,0}, \tag{48}$$

$$d_{r,k-1} - zd_{r,k} = f_{r,k}, \qquad k \in \mathbb{N},\ 1 \le r \le N, \tag{49}$$

относительно неизвестных $\{d_{r,k}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$.

Предположим, что $f_{r,k} = 0$, при $k > M$, $1 \le r \le N$, для некоторого $M \in \mathbb{N}$. Положим

$$d_{r,k} = 0, \qquad k \ge M;$$

$$d_{r,k-1} = f_{r,k} + zd_{r,k}, \qquad k = M, M-1, \dots, 1. \tag{50}$$

Для таким образом выбранных чисел $\{d_{r,k}\}_{k\in\mathbb{Z}_+, 1\le r\le N}$ уравнения (49) будут выполнены. Однако уравнения (48) могут и не выполняться. Пусть $w := \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty d_{r,k} v_k^r$, $w \in L_{\vec{x}}$. Заметим, что

$$(A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})w = \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty (d_{r,k-1} - zd_{r,k}) v_k^r, \qquad d_{r,-1} := 0,$$

и

$$(A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})w - y = \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty (d_{r,k-1} - zd_{r,k} - f_{r,k}) v_k^r = \sum_{r=1}^N (-zd_{r,0} - f_{r,0}) v_0^r =$$

$$= \sum_{r=1}^N (-zd_{r,0} - f_{r,0}) x_0^r;$$

$$y = (A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})w + \sum_{r=1}^N (zd_{r,0} + f_{r,0}) x_0^r, \qquad w \in L_{\vec{x}}. \tag{51}$$

Пусть $H_z := \overline{(A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})L_{\vec{x}}} = \overline{(A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})D(A_{\vec{x}})}$. Положим

$$y_0^r := x_0^r - P_{H_z}^{H_{\vec{x}}} x_0^r, \quad 1 \le r \le N.$$

Обозначим $H_0 := \mathrm{span}\{y_0^r\}_{r=1}^N$. Из (51) следует, что $L_{\vec{x}} \subseteq H_z \oplus H_0$; $H_{\vec{x}} \subseteq H_z \oplus H_0$, и значит $H_{\vec{x}} = H_z \oplus H_0$. Таким образом, H_0 является дефектным подпространством оператора $A_{\vec{x}}$, отвечающим невещественному z. Из определения H_0 видно, что его размерность не превышает N. Следовательно, дефектные числа оператора $A_{\vec{x}}$ могут принимать лишь значения от 0 до N.

Покажем теперь, что в случае вещественности матричной корреляционной функции дефектные числа оператора $A_{\vec{x}}$ равны.

Для произвольного $x \in L_{\vec{x}}$, $x = \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty f_{r,k} x_k^r$, $f_{r,k} \in \mathbb{C}$, мы полагаем

$$Jx := \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \overline{f_{r,k}} x_k^r. \tag{52}$$

Если существует другое представление $x = \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty d_{r,k} x_k^r$, $d_{r,k} \in \mathbb{C}$, тогда

$$\left\| \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \overline{f_{r,k}} x_k^r - \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \overline{d_{r,k}} x_k^r \right\|_H^2 = \left\| \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \overline{(f_{r,k} - d_{r,k})} x_k^r \right\|_H^2 =$$

$$= \sum_{r,s=1}^N \sum_{k,n=0}^\infty \overline{(f_{r,k} - d_{r,k})} (f_{s,n} - d_{s,n}) (x_k^r, x_n^s)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^N \sum_{k,n=0}^\infty \overline{(f_{r,k} - d_{r,k})} (f_{s,n} - d_{s,n}) K_{k,n}^{r,s} =$$

$$= \sum_{r,s=1}^N \sum_{k,n=0}^\infty \overline{(f_{r,k} - d_{r,k})} (f_{s,n} - d_{s,n}) K_{n,k}^{s,r} =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^N \sum_{n=0}^\infty (f_{s,n} - d_{s,n}) x_n^s, \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty (f_{r,k} - d_{r,k}) x_k^r \right)_H =$$

$$= \left\| \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty f_{r,k} x_k^r - \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty d_{r,k} x_k^r \right\|_H^2 = 0,$$

где мы воспользовались вещественностью корреляционной функции. Таким образом, J является корректно заданным антилинейным оператором в $H_{\vec{x}}$ с областью определения $L_{\vec{x}}$. Заметим, что

$$J^2 u = u, \qquad u \in L_{\vec{x}}. \tag{53}$$

Для произвольных $u, v \in L_{\vec{x}}$, $u = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}x_k^r$, $v = \sum_{s=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} d_{s,n}x_n^s$, $f_{r,k}, d_{s,n} \in \mathbb{C}$, можно записать

$$(Ju, Jv)_H = \left(\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{f_{r,k}}x_k^r, \sum_{s=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{d_{s,n}}x_n^s\right)_H = \sum_{r,s=1}^{N}\sum_{k,n=0}^{\infty}\overline{f_{r,k}}d_{s,n}(x_k^r, x_n^s)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N}\sum_{k,n=0}^{\infty}\overline{f_{r,k}d_{s,n}K_{k,n}^{r,s}} = \sum_{r,s=1}^{N}\sum_{k,n=0}^{\infty}\overline{f_{r,k}}d_{s,n}K_{n,k}^{s,r} =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}d_{s,n}x_n^s, \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}f_{r,k}x_k^r\right)_H = (v,u)_H;$$

$$(Ju, Jv)_H = (v,u)_H, \qquad u, v \in L_{\vec{x}}. \tag{54}$$

В частности, это означает, что $\|Ju\| = \|u\|$, $u \in L_{\vec{x}}$. По непрерывности продолжим J до ограниченного оператора во всем $H_{\vec{x}}$. Нетрудно проверить, что J будет антилинейным и удовлетворять свойствам (53),(54) во всем $H_{\vec{x}}$. Такой оператор называют оператором сопряжения (см [12]).

Для произвольного элемента $u \in L_{\vec{x}}$, $u = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}x_k^r$, $f_{r,k} \in \mathbb{C}$, можно записать

$$A_{\vec{x}}Ju = A_{\vec{x}}\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{f_{r,k}}x_k^r = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{f_{r,k}}\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^r - b_kx_k^r + c_kx_{k+1}^r\right),$$

$$JA_{\vec{x}}u = J\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}f_{r,k}\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^r - b_kx_k^r + c_kx_{k+1}^r\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{f_{r,k}}J\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^r - b_kx_k^r + c_kx_{k+1}^r\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{f_{r,k}}\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^r - b_kx_k^r + c_kx_{k+1}^r\right),$$

где мы воспользовались соотношением (9) и вещественностью коэффициентов a_k, b_k, c_k. Значит операторы $A_{\vec{x}}$ и J коммутируют. В этом случае оператор $A_{\vec{x}}$ называют вещественным относительно оператора сопряжения J ([12]). Нетрудно проверить, что и $\overline{A_{\vec{x}}}$ будет вещественным относительно J (симметрическим) оператором. Следовательно, дефектные числа оператора $\overline{A_{\vec{x}}}$ равны (см. [12, Theorem 9.14]).

Осталось заметить, что для одномерной полиномиальной последовательности корреляционная функция всегда вещественна, что следует из (13). □

4. Изоморфизм А.Н. Колмогорова для векторных полиномиальных последовательностей.

Рассмотрим некоторую N-мерную полиномиальную последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности в пространстве значений последовательности $H_{\vec{x}}$. Будем предполагать в этом параграфе, что матричная корреляционная функция последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является вещественной. В этом случае найдется самосопряженное расширение $\widehat{A}$ оператора $A_{\vec{x}}$ в пространстве $H_{\vec{x}}$, поскольку дефектные числа $A_{\vec{x}}$ равны согласно теоремы 2. Рассмотрим соответствующую спектральную матрицу-функцию:

$$F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N = \left((\widehat{E}_\lambda x_0^j, x_0^k)_H \right)_{j,k=1}^N,$$

где $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widehat{A}$.

Будем обозначать $\mathbf{I} = \{\Delta = [a,b) : \ -\infty < a < b < +\infty\}$ множество конечных полуоткрытых интервалов вещественной оси, и

$$\widehat{E}(\Delta) = \widehat{E}_b - \widehat{E}_a, \qquad \Delta = [a,b) \in \mathbf{I};$$

$$F_{j,k}(\Delta) = F_{j,k}(b) - F_{j,k}(a), \qquad \Delta = [a,b) \in \mathbf{I},\ 1 \le j,k \le N.$$

Рассмотрим также множество

$$L_\Delta = \mathrm{Lin}\left\{ \widehat{E}(\Delta) x_0^r,\ 1 \le r \le N,\ \Delta \in \mathbf{I} \right\} = \left\{ \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \alpha_{r,k} E(\Delta_{r,k}) x_0^r,\ \alpha_{r,k} \in \mathbb{C} \right\},$$

где суммы понимаются конечными.

Заметим, что $\overline{L_\Delta} = H_{\vec{x}}$. Действительно, предположим, что найдется ненулевой элемент $u \in H_{\vec{x}}$, такой, что

$$(u, \widehat{E}(\Delta) x_0^r)_H = 0, \qquad 1 \le r \le N,\ \Delta \in \mathbf{I}. \tag{55}$$

Мы можем записать

$$(u, \widehat{A}^n x_0^r)_H = \int_{\mathbb{R}} \lambda^n d(\widehat{E}_\lambda u, x_0^r)_H = \int_{\mathbb{R}} \lambda^n d(u, \widehat{E}_\lambda x_0^r)_H = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Последнее равенство означает, что $u \perp S$, где S определяется равенством (47). Поскольку $S = L_{\vec{x}}$, мы получаем $u = 0$.

Выберем произвольные элементы $x, y \in L_\Delta$,

$$x = \sum_{r=1}^N \sum_{\Delta \in I_r} \alpha_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r, \qquad \alpha_r(\Delta) \in \mathbb{C}, \tag{56}$$

$$y = \sum_{s=1}^{N} \sum_{\Delta \in J_s} \beta_s(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^s, \qquad \beta_s(\Delta) \in \mathbb{C}, \tag{57}$$

где I_r, J_s - некоторые конечные множества интервалов из $\mathbf{I}$. Далее, запишем равенство

$$(x,y)_H = \sum_{r,s=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r} \sum_{\Delta' \in J_s} \alpha_r(\Delta) \beta_s(\Delta') \left(\widehat{E}(\Delta) x_0^r, \widehat{E}(\Delta') x_0^s \right)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r} \sum_{\Delta' \in J_s} \alpha_r(\Delta) \overline{\beta_s(\Delta')} \left(\widehat{E}(\Delta \cap \Delta') x_0^r, x_0^s \right)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r} \sum_{\Delta' \in J_s} \alpha_r(\Delta) \overline{\beta_s(\Delta')} F_{r,s}(\Delta \cap \Delta'). \tag{58}$$

Рассмотрим функции

$$f_x(t) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r} \alpha_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r, \tag{59}$$

$$f_y(t) = \sum_{s=1}^{N} \sum_{\Delta \in J_s} \beta_s(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_s, \tag{60}$$

где

$$\vec{e_r} := (\delta_{1,r}, \delta_{2,r}, ..., \delta_{N,r}), \qquad 1 \le r \le N,$$

а χ_Δ является характеристической функцией интервала Δ. Очевидно, что функции f_x, f_y принадлежат $L^2(F)$. Запишем равенство

$$(f_x, f_y)_{L^2(F)} = \sum_{r,s=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r} \sum_{\Delta' \in J_s} \alpha_r(\Delta) \overline{\beta_s(\Delta')} \int_{\mathbb{R}} \chi_\Delta(t) \vec{e}_r dF(t) \vec{e}_s^{\,*} \chi_{\Delta'}(t) =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r} \sum_{\Delta' \in J_s} \alpha_r(\Delta) \overline{\beta_s(\Delta')} \int_{\Delta \cap \Delta'} dF_{r,s}(t) =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r} \sum_{\Delta' \in J_s} \alpha_r(\Delta) \overline{\beta_s(\Delta')} F_{r,s}(\Delta \cap \Delta'). \tag{61}$$

Из соотношений (58),(61) следует, что

$$(x,y)_H = (f_x, f_y)_{L^2(F)}, \qquad x, y \in L_\Delta. \tag{62}$$

Предположим теперь, что для элемента x помимо представления (56) есть представление:

$$x = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widetilde{I}_r} \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r, \qquad \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \in \mathbb{C}, \tag{63}$$

где $\widetilde{I}_r$ некоторые конечные множества интервалов из $\mathbf{I}$, $1 \leq r \leq N$. Этому представлению мы можем поставить в соответствие функцию

$$\widetilde{f}_x(t) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widetilde{I}_r} \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r. \tag{64}$$

Из равенств (56),(63) следует, что

$$0 = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r \cap \widetilde{I}_r} (\alpha_r(\Delta) - \widetilde{\alpha}_r(\Delta)) \widehat{E}(\Delta) x_0^r + \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r \setminus \widetilde{I}_r} \alpha_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r -$$

$$- \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widetilde{I}_r \setminus I_r} \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widehat{I}_r} \gamma_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r,$$

где

$$\widehat{I}_r = I_r \cup \widetilde{I}_r, \quad \gamma_r(\Delta) = \begin{cases} \alpha_r(\Delta) - \widetilde{\alpha}_r(\Delta), & \Delta \in I_r \cap \widetilde{I}_r \\ \alpha_r(\Delta), & \Delta \in I_r \setminus \widetilde{I}_r \\ -\widetilde{\alpha}_r(\Delta), & \Delta \in \widetilde{I}_r \setminus I_r \end{cases}.$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(t) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widehat{I}_r} \gamma_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r. \tag{65}$$

Эта функция принаадлежит пространству $L^2(F)$ и применяя равенство (62) мы получаем, что

$$\|f_0(t)\|_{L^2(F)} = 0.$$

С другой стороны, мы можем записать

$$\|f_x - \widetilde{f}_x\|^2_{L^2(F)} = \left\| \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r} \alpha_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r - \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widetilde{I}_r} \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r \right\|^2_{L^2(F)} =$$

$$= \left\| \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widehat{I}_r} \gamma_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r \right\|^2_{L^2(F)} = \|f_0(t)\|^2_{L^2(F)},$$

и значит
$$f_x(t) = \widetilde{f}_x(t).$$

Таким образом, функция $f_x(t)$, определяемая равенством (59), не зависит от выбора представления вида (56) для элемента $x \in L_\Delta$. Обозначим посредством V оператор из L_Δ в $L^2(F)$, реализующий соответствие $x \to f_x(t)$. Равенство (62) показывает, в частности, что этот оператор ограничен и по непрерывности продолжается до изометрического (а значит линейного) отображения из $\overline{L_\Delta} = H_{\vec{x}}$ в некоторое подпространство $L^2(F)$. Поскольку ступенчатыми функциями можно равномерно приблизить любую непрерывную финитную функцию, а непрерывные финитные вектор-функции плотны в $L^2(F)$, то это подпространство совпадает со всем $L^2(F)$.

Теорема 3 *Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности, действующим в пространстве значений последовательности $H_{\vec{x}}$. Предположим, что матричная корреляционная функция последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ вещественна. Пусть $\widehat{A}$ - некоторое самосопряженное расширение оператора $A_{\vec{x}}$, действующее в $H_{\vec{x}}$, и $F(x)$ - соответствующая этому расширению спектральная функция последовательности. Существует изометрическое отображение V пространства $H_{\vec{x}}$ на пространство $L^2(F)$ такое, что для произвольной функции $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_N(t))$, $t \in \mathbb{R}$, такой, что*
$$\int_{\mathbb{R}} |f_r(t)|^2 dF_{r,r}(t) < \infty, \qquad 1 \le r \le N, \tag{66}$$
справедливо соотношение
$$V^{-1} f = \sum_{r=1}^{N} f_r(\widehat{A}) x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} f_r(\lambda) d\widehat{E}_\lambda x_0^r, \tag{67}$$
где $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widehat{A}$, а под $V^{-1}f$ понимается действие оператора V^{-1} на элемент пространства $L^2(F)$ (класс эквивалентности), задаваемый функцией $f(t)$.

Доказательство. Изометрическое отображение V пространства $H_{\vec{x}}$ на пространство $L^2(F)$ было построено перед формулировкой теоремы. Проверим справедливость соотношения (67). Множество функций, удовлетворяющих условию (66) обозначим M. Выберем произвольную функцию $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_N(t)) \in M$, и положим
$$x_f := \sum_{r=1}^{N} f_r(\widehat{A}) x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} f_r(\lambda) d\widehat{E}_\lambda x_0^r. \tag{68}$$

Если взять другую функцию $g(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_N(t)) \in M$, такую, что $\|f-g\|_{L^2(F)} = 0$, и определить

$$x_g := \sum_{r=1}^{N} g_r(\widehat{A})x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} g_r(\lambda)d\widehat{E}_\lambda x_0^r,$$

то

$$\|x_f - x_g\|_H^2 = \left\|\sum_{r=1}^{N}(f_r(\widehat{A}) - g_r(\widehat{A}))x_0^r\right\|_H^2 =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N}\Big((f_r(\widehat{A}) - g_r(\widehat{A}))x_0^r, (f_s(\widehat{A}) - g_s(\widehat{A}))x_0^s\Big)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}(f_r(\lambda) - g_r(\lambda))\overline{(f_s(\lambda) - g_s(\lambda))}d(\widehat{E}_\lambda x_0^r, x_0^s)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}(f_r(\lambda) - g_r(\lambda))\overline{(f_s(\lambda) - g_s(\lambda))}dF_{r,s}(\lambda) = (f-g, f-g)_{L^2(F)} = 0.$$

Посредством $L_M^2(F)$ мы обозначим множество классов эквивалентности из $L^2(F)$, отвечающих функциям из M. Последние равенства показывают, что отображение $f(t) \to x_f$ задает корректное отображение множества $L_M^2(F)$ в $H_{\vec{x}}$.

Найдется последовательность функций из $L^2(F)$ вида

$$f^{[n]}(t) = (f_1^{[n]}(t), f_2^{[n]}(t), ..., f_N^{[n]}(t)) = \sum_{r=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta)\chi_\Delta(t)\vec{e}_r, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{69}$$

где $\alpha_{n,r}(\Delta) \in \mathbb{C}$, $I_{n,r}$ - некоторые конечные множества интервалов из $\mathbf{I}$, сходящаяся в $L^2(F)$ к (классу функций, порожденному) $f(t)$:

$$\|f^{[n]}(t) - f(t)\|_{L^2(F)} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{70}$$

Рассмотрим последовательность элементов

$$x_f^{[n]} := V^{-1}f^{[n]}(t) = \sum_{r=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta)\widehat{E}(\Delta)x_0^r, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{71}$$

где последнее равенство следует из способа построения отображения V. Заметим, что

$$x_f^{[n]} = \sum_{r=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta)\int_\Delta d\widehat{E}_t x_0 = \sum_{r=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta)\int_{\mathbb{R}} \chi_\Delta(t)d\widehat{E}_t x_0^r =$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\Delta\in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta)\chi_{\Delta}(t)d\widehat{E}_t x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} f_r^{[n]}(t)d\widehat{E}_t x_0^r =$$

$$= \sum_{r=1}^{N} f_r^{[n]}(\widehat{A})x_0^r, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{72}$$

В силу непрерывности отображения V^{-1} справедливо соотношение

$$x_f^{[n]} \to V^{-1}f(t), \qquad n\to\infty. \tag{73}$$

Далее, мы можем записать

$$\|x_f^{[n]} - x_f\|_H^2 = \left\| \sum_{r=1}^{N} (f_r^{[n]}(\widehat{A}) - f_r(\widehat{A}))x_0^r \right\|_H^2 =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \left((f_r^{[n]}(\widehat{A}) - f_r(\widehat{A}))x_0^r, (f_s^{[n]}(\widehat{A}) - f_s(\widehat{A}))x_0^s \right)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} (f_r^{[n]}(\lambda) - f_r(\lambda))\overline{(f_s^{[n]}(\lambda) - f_s(\lambda))} d(\widehat{E}_\lambda x_0^r, x_0^s)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} (f_r^{[n]}(\lambda) - f_r(\lambda))\overline{(f_s^{[n]}(\lambda) - f_s(\lambda))} dF_{r,s}(\lambda) =$$

$$= \|f^{[n]} - f\|_{L^2(F)}^2 \to 0, \qquad n\to\infty. \tag{74}$$

В силу единственности предела получаем

$$V^{-1}f = x_f, \tag{75}$$

что и дает требуемое соотношение (67). $\square$

Для того, чтобы получить из доказанной теоремы теорему 1 заметим, что для одномерной полиномиальной последовательности корреляционная функция всегда вещественна. Это следует из соотношения (13). Условие (66) в одномерном случае ($N = 1$) будет выполнено для произвольной функции из $L^2(F)$. Единственность представления (14) следует из изометричности оператора V^{-1} из (67).

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору А.А. Янцевичу, обратившему внимание автора на проблематику многомерных полиномиальных последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов.– М.: Физматлит, 2005. – 408 с.

2. Загороднюк С.М., Клёц Л. Применение подхода А.Н. Колмогорова при изучении случайных последовательностей, связанных с ортогональными многочленами. // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, Сер. "Математика, прикладна математика і механіка", - 2008. - **826.** - С. 3-37.

3. Загороднюк С.М. Разложение Вольда для полиномиальных последовательностей. // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, Сер. "Математика, прикладна математика і механіка", - 2009. **850.** - С. 57-70.

4. Розанов Ю.А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем. // УМН, - 1958. - 2(80). - С. 93-142.

5. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. - М.: Наука, - 1990. - 272 с.

6. Маламуд М.М., Маламуд С.М. Операторные меры в гильбертовом пространстве. //Алгебра и анализ, - 2003. - **15.** - no. 3. С. 1-52.

7. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. - М.: Мир, - 1968. - 750 с.

8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. - Москва, Ленинград: гос. издат. тех.-теор. лит., - 1950. - 484 с.

9. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. - Москва: Мир, - 1971. - 408 с.

10. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. - Mathematical surveys and monographs vol. 72, Amer. Math. Soc., - 2000. - 353 p.

11. Марченко В.А. Введение в теорию обратных задач спектрального анализа. - АКТА, - 2005. - 144 с.

12. Stone M. H. Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis. - Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, - 1932. - 622 p.

Статья получена: 19.08.2009; окончательный вариант: 10.11.2009; принята: 12.11.2009.