УДК 517.53

А. М. УЛАНОВСКИЙ

РЕГУЛЯРНОСТЬ РОСТА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ МАКСИМУМ МОДУЛЯ НА ЛУЧЕ

Пусть f — аналитическая функция в области U, где U — комплексная плоскость $\boldsymbol{C}$ или угол $U(\alpha, \beta) = \{z \in \boldsymbol{C} : \alpha < \arg z < \beta\}$. Положим

$$M(r) = M(r, f, U) = \sup_{|z| < r,\ z \in U} |f(z)|;$$

$$\rho = \rho(f, U) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r};$$

$$\lambda = \lambda(f, U) = \liminf_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}.$$

Числа ρ и λ называются порядком и нижним порядком аналитической функции f. Они являются важными характеристиками роста f. Если $\rho = \lambda$, то говорят, что f имеет регулярный рост.

Хорошо известно, что числа ρ и λ для целой функции f могут быть произвольными неотрицательными: $0 \leqslant \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$. Положение меняется, если потребовать, чтобы f не имела нулей в некоторых углах. Например, если все нули f лежат на луче, то [1, с. 342]: $\rho \leqslant [\lambda] + 1$, где $[\ .\ ]$ — целая часть. Если нули f лежат на трех лучах, то [2]: $[\rho] \leqslant 3[\lambda] + 3$, в то же время разность $\rho - \lambda$ может быть сколь угодно велика. Другого типа условия, влекущие ограничения на ρ и λ, получены в [3], где, в частности, доказано, что если для целой функции f множество $z \in \boldsymbol{C}$, где $|f(z)| M(|z|) \leqslant 1$, имеет неограниченную компоненту, то $\rho = \lambda$ (возможно, $= \infty$).

В настоящей работе изучается рост аналитической функции (в частности, связь между ρ и λ), удовлетворяющей одному из условий:

(A) *f аналитична в угле $U(-2\alpha, 2\alpha)$, $0<\alpha\leqslant\pi/2$; не обращается в нуль в угле $U(-\alpha, \alpha)$ и имеет максимум на положительном луче: $|f(r)| = M(r)$, $r>0$.*

(B) *f аналитична в угле $U(-\alpha, \alpha)$, $0<\alpha\leqslant\pi$; непрерывна в его замыкании и $|f(r)|M(r)\leqslant 1$, $r\geqslant 0$.*

Условие (B) возникло в связи с работой [3]. Условие (A) — в связи со следующим дополнением к работе [4], сообщенным А. М. Вишняковой: если f удовлетворяет условию (A), то $\rho-\lambda\leqslant\leqslant 3\pi/\lambda$.

Оказывается, что если аналитическая функция f удовлетворяет одному из условий (A), (B) и достаточно быстро растет

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-\pi/\alpha}\ln M(r) > 0, \tag{1}$$

то f имеет не только регулярный, но и вполне регулярный в смысле Левина — Пфлюгера рост в угле $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$ относительно r^ρ. Отметим, что из (1) следует, что $\rho\geqslant\pi/\alpha$; с другой стороны, если $\rho>\pi/\alpha$, то верно (1).

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условию (A) и условию (1). Тогда $\rho=\lambda$ и при некотором $\sigma\geqslant 0$ асимптотическое равенство*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \sigma r^\rho\cos\rho\varphi + o(r^\rho),\ r\to\infty \tag{2}$$

выполняется равномерно по $\varphi\in(-\pi/\rho+\varepsilon, \pi/\rho-\varepsilon)$ при любом $0<\varepsilon<\pi/\rho$.

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условию (B) и условию (1). Тогда $\rho=\lambda$ и при некотором $\sigma\leqslant 0$ асимптотическое равенство (2) выполняется равномерно по $\varphi\in(-\pi/\rho, \pi/\rho)$ при $r\to\infty$ вне исключительного множества $r\in E$ такого, что $R^{-1}\int\limits_{(0,R)\cap E} dr\to 0$, $R\to\infty$.*

Замечание. Утверждения теорем 1 и 2 потеряют силу, если опустить условие (1). Так, целая функция f, удовлетворяющая условию (A) с $\alpha=\pi/2$, может иметь произвольные ρ и λ, $0\leqslant\lambda\leqslant\rho\leqslant 1$. То же верно и для функции f, удовлетворяющей условию (B) с $\alpha=\pi$. Соответствующие примеры строятся с помощью приемов, развитых в [1, гл. II, § 5; гл. VI, § 1]. Заметим, что если целая функция f имеет только отрицательные нули и $\rho>1$, то функция $f(z^2)$ удовлетворяет условию (A) с $\alpha=\pi/2$ и условию (1), поэтому из теоремы 1 следует, что $\rho=\lambda$.

Для доказательства теорем 1 и 2 понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть f удовлетворяют условию (A). Для любого δ, $0<\delta<\alpha$, найдется постоянная $C=C(\delta)$ такая, что верна оценка $|\ln f(z)|\leqslant C\ln|f(C|z|)|$, $z\in U(-\alpha+\delta, \alpha-\delta)$.*

Доказательство. В силу условия (A) имеем $\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln|f(re^{i\varphi})|_{\varphi=0}= =0$. Поэтому $\frac{\partial}{\partial r}\arg f(r)=0$, $\arg f(r)=\text{const}$, и, не уменьшая общности, можно считать, что $f(r)>0$ при $r>0$. Рассмотрим аналитическую в круге $\{\zeta:|\zeta|<1\}$ функцию $g_R(\zeta)=\ln f(R+\zeta R\sin\alpha)$. В силу неравенства Каратеодори [5, с. 28] имеем

$$|g_R(\zeta)|\leqslant\frac{2}{1-|\zeta|}\{\max_{|\xi|=1}\operatorname{Re}g_R(\zeta)-\operatorname{Re}g_R(0)\}+|g_R(0)|=$$

$$=\frac{2}{1-|\zeta|}\{\ln f(R(1+\sin\alpha))-\ln f(R)\}+\ln f(R)\leqslant\frac{2}{1-|\zeta|}\ln f(2R),$$

откуда следует доказываемая оценка.

Лемма 2. *Положим* $u=\ln|f|$, $\gamma=\min\{\pi/\lambda,\ \alpha\}$. а) *Если* f *удовлетворяет условию (A), то* $\frac{\partial u}{\partial\varphi}(z)\leqslant 0$, $z\in U(0,\gamma)$. б) *Если* f *удовлетворяет условию (B), то при всех* $0\leqslant|\varphi|\leqslant|\theta|\leqslant\gamma$, $\varphi\theta>0$ *выполняется* $u(re^{i(\theta-\varphi)})+u(re^{i\varphi})\leqslant 0$; *кроме того,* $u(re^{i\varphi})\leqslant 0$ *при* $0\leqslant|\varphi|\leqslant\gamma/2$.

Доказательство. а) Положим $f_\theta(z)=\overline{f(e^{2i\theta}\bar z)}/f(z)$, где $0<\theta<\gamma$. Ввиду условия (A), f_θ — аналитична в $U(0,\theta)$, $|f_\theta(re^{i\theta})|=1$ и $|f_\theta(r)|\leqslant 1$ при $r>0$. Из леммы 1 видно, что $\lambda(f_\theta, U(0,\theta))\leqslant\lambda<\pi/\theta$, поэтому из принципа Фрагмена — Линделефа следует, что $|f_\theta(z)|<1$, $z\in U(0,\theta)$. Отсюда $u(re^{i(2\theta-\varphi)})\leqslant u(re^{i\varphi})$ при всех $0<\varphi<\theta$, $0<\theta<\gamma$. В частности, полагая $\varphi=\theta-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, видим, что $u(re^{i(\theta+\varepsilon)})-u(re^{i(\theta-\varepsilon)})\leqslant 0$, откуда вытекает утверждение п. а).

б) Положим $\tilde f_\theta(z)=\overline{f(e^{i\theta}\bar z)}f(z)$. Из условия (B) следует, что $|\tilde f_\theta(r)|$, $|\tilde f_\theta(re^{i\theta})|<1$, $r>0$, и $\lambda(\tilde f_\theta, U(0,\theta))\leqslant\lambda<\pi/\theta$. Из принципа Фрагмена — Линделефа получаем, что $|\tilde f_\theta(z)|<1$, $z\in U(0,\theta)$, значит, $u(re^{i(\theta-\varphi)})+u(re^{i\varphi})\leqslant 0$ при $0\leqslant\varphi\leqslant\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\gamma$. Аналогично доказывается это неравенство и при $0\geqslant\varphi\geqslant\theta$, $0\geqslant\theta\geqslant-\gamma$. Полагая в нем $\varphi=\theta/2$, имеем $u(re^{i\theta/2})\leqslant 0$, $0\leqslant|\theta|\leqslant\gamma$, что доказывает п. б).

Доказательство теоремы 1. Из п. а) леммы 2 следует, что функция $v(\zeta)=\frac{\partial u}{\partial\varphi}(\zeta^{\gamma/\pi})$ гармонична и неположительна в $U(0,\pi)$. Поскольку f имеет максимум на положительном луче, то $v(r)=0$, $r>0$. Таким образом [6, с. 191], справедливо представление: $\exists b\geqslant 0$: $v(\zeta)=-b\operatorname{Im}\zeta+\int_{-\infty}^{0}v(t).\left\{\operatorname{Im}\frac{1}{t-\zeta}\right\}dt$, $\zeta\in U(0,\pi)$, где $\int_{-\infty}^{0}\frac{v(t)|}{1+t^2}dt<\infty$. Легко видеть, что при любом ε, $0<\varepsilon<\gamma$, равномерно по φ в угле $0\leqslant\varphi\leqslant\gamma-\varepsilon$ выполняется $\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_{-\infty}^{0}v(t)\{\operatorname{Im}(t-z^{\pi/\gamma})^{-1}\}dt\right|=o(r^{\pi/\gamma})$, $z=re^{i\varphi}$, $r\to\infty$. Учитывая, что $\Delta u=r^{-2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\equiv 0$ в $U(0,\gamma)$, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)(re^{i\varphi})=\frac{-1}{r}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=\frac{b\pi}{\gamma}r^{\frac{\pi}{\gamma}-1}\cos\frac{\pi}{\gamma}\varphi+o\left(r^{\frac{\pi}{\gamma}-1}\right),\ r\to\infty.$$

Интегрируя, получаем оценку $u(re^{i\varphi}) = (\gamma b/\pi) r^{\pi/\gamma} \cos(\pi\varphi/\gamma) + o(r^{\pi/\gamma})$, $r \to \infty$, которая выполняется равномерно по φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma - \varepsilon$. Аналогично доказывается, что эта оценка выполняется равномерно по φ при $0 \geqslant \varphi \geqslant -\gamma + \varepsilon$. Осталось показать, что $\lambda = \rho = \pi/\gamma$. Действительно, очевидно, что $\rho \leqslant \pi/\gamma = \max\{\lambda, \pi/\alpha\}$. Если $\rho > \pi/\alpha$, то $\pi/\gamma = \lambda$, $\lambda = \rho$. Если $\rho = \pi/\alpha$, то, ввиду (1), $b > 0$ и, значит, $\lambda = \rho$.

Доказательство теоремы 2. Ввиду п. б) леммы 2 функция $\tilde{v}(z) = u(z^{\gamma/\pi})$ субгармонична и неположительна в $U(-\pi/2, \pi/2)$. Поэтому [7] найдется $b \geqslant 0$ и множество $F \subset [1, \infty)$, такие, что $\int\limits_F d \ln r < \infty$ и $\tilde{v}(z) = -b \operatorname{Re} z + o(|z|)$, $r = |z| \to \infty$, $r \notin F$, $z \in U(-\pi/2, \pi/2)$; $\tilde{v}(z) \leqslant -b \operatorname{Re} z + o(|z|)$, $r \to \infty$, $z \in U(-\pi/2, \pi/2)$. Отсюда

$$u(re^{i\varphi}) = -br^{\frac{\pi}{\gamma}} \cos\frac{\pi}{\gamma}\varphi + o\left(r^{\frac{\pi}{\gamma}}\right), \ r \to \infty, \ r^{\frac{\pi}{\gamma}} \notin F, \ -\frac{\pi}{2\gamma} < \varphi < \frac{\pi}{2\gamma}, \tag{3}$$

$$u(re^{i\varphi}) \leqslant -br^{\frac{\pi}{\gamma}} \cos\frac{\pi}{\gamma}\varphi + o\left(r^{\frac{\pi}{\gamma}}\right), \ r \to \infty, \ -\frac{\pi}{2\gamma} < \varphi < \frac{\pi}{2\gamma}. \tag{4}$$

Из (3), монотонности $M(r)$ и неравенства $\ln M(r) \leqslant -u(r)$ видно, что $\rho \leqslant \pi/\gamma = \max\{\lambda, \pi/\alpha\}$. Отсюда и из (1), как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что $\lambda = \rho = \pi/\gamma$. Осталось доказать, что представление (3) верно в угле $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$.

Обозначим $h(\varphi) = \limsup\limits_{r \to \infty} r^{-\rho} u(re^{i\varphi})$ — индикатор функции f. Из (4) следует, что $h(\varphi) = -b \cos\rho\varphi$ при $-\pi/2\rho \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\rho$, а из п. б) леммы 2 следует, что $h(\pi/\rho - \varphi) \leqslant -h(\varphi) = b \cos\rho\varphi = -h(-\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\rho$. Отсюда и из основного соотношения для индикаторов [5, гл. 1, § 16] получаем $h(\pi/\rho - \varphi) = -h(-\varphi) = b\cos\rho\varphi$, $h(\varphi) = -b\cos\rho\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/\rho$. Аналогично имеем $h(\varphi) = -b\cos\rho\varphi$, $0 \geqslant \varphi \geqslant -\pi/\rho$. Значит, функция f имеет тригонометрический индикатор в $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$ и, ввиду (3), вполне регулярный рост в $U(-\pi/2\rho, \pi/2\rho)$. Отсюда [5, с. 213] вытекает, что f имеет вполне регулярный рост в $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$, т. е. найдется множество $E \subset (0, \infty)$ такое, что $R^{-1} \int\limits_{E \cap (0, R)} dr \to 0$, $R \to \infty$ и асимптотическое равенство $u(re^{i\varphi}) = -br^{\rho} \cos\rho\varphi + o(r^{\rho})$ выполняется при $r \to \infty$, $r \notin E$ всюду в угле $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$.

В заключение отметим два следствия теоремы 1, сообщенные автору И. В. Островским.

Следствие 1. *Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 1, то она имеет вполне регулярный рост (в. р. р.) в смысл Левина — Пфлюгера относительно r^{ρ} в угле $U(-2\pi/\rho, 2\pi/\rho)$ с индикатором $h(\varphi) = \sigma\cos\rho\varphi$, где число σ определяется из (2).*

Следствие 2. *Если дополнительно к условиям теоремы 1 предположить, что функция f не обращается в нуль в угле $U(-\beta, \beta)$, $\alpha \leqslant \beta \leqslant 2\alpha$, то асимптотическое равенство (2) имеет место равномерно по $\varphi \in [-\beta + \delta, \beta - \delta]$ при любом $0 < \delta < \beta$.*

Для доказательства следствия 1 рассмотрим в угле $U(0, \pi/\rho)$ функцию $\tilde{f}(z) = \overline{f(e^{2\pi i/\rho}\bar{z})}/f(z)$. В силу условия (А) эта функция аналитична и ограничена на сторонах угла. Нетрудно видеть, что она имеет в угле рост не выше нормального типа порядка ρ. Отсюда следует, что она имеет в. р. р. в угле $U(0, \pi/\rho)$ и $\tilde{h}(\varphi) = -b \sin \rho\varphi$, $b \geqslant 0$. Так как, в силу теоремы 1, функция f также имеет в. р. р. в $U(0, \pi/\rho)$ и $h(\varphi) = \sigma \cos \rho\varphi$, то заключаем, что функция $\overline{f(\bar{z}e^{2\pi i/\rho})}$ имеет там в. р. р. с индикатором $h(2\pi i/\rho - \varphi) = \sigma \cos \rho\varphi - b \sin \rho\varphi$. Это означает, что f имеет в. р. р. в $U(\pi/\rho, 2\pi/\rho)$ и $h(\varphi) = \sigma \cos \rho\varphi + b \sin \rho\varphi$, $\varphi \in [\pi/\rho, 2\pi/\rho]$. Учитывая свойство индикатора $h(\varphi) + h(\varphi + \pi/\rho) \geqslant 0$, видим, что $b = 0$, откуда следует доказываемое утверждение.

Для доказательства следствия 2 рассмотрим аналитическую в $U(-\beta, \beta)$ функцию $g(z) = z^{-\rho} \ln f(z)$. В силу леммы 1, в которой вместо α берем β, и теоремы 1 функция g ограничена в угле $U(-\beta + \delta, \beta - \delta)$, $0 < \delta < \beta$. По теореме 1 существует предел $\lim\limits_{r \to \infty} \operatorname{Re} g(r)$, а так как $\arg f(r) = \text{const}$, $r > 0$, то и предел $\lim\limits_{r \to \infty} g(r)$. Отсюда, как известно [8, с. 51], следует, что функция g стремится к тому же пределу при $z \to \infty$, $z \in U(-\beta + \delta, \beta - \delta)$.

Отметим, что анализ доказательств теорем 1, 2 и следствий 1, 2 показывает, что эти утверждения верны для субгармонических функций u, удовлетворяющих одному из условий: (А) u — субгармонична в $U(0, 2\alpha)$ и $U(-2\alpha, 0)$, $0 < \alpha \leqslant \pi$, гармонична в $U(-\alpha, \alpha)$ и $u(z) \leqslant u(|z|)$ при $z \in U(0, 2\alpha) \cup U(-2\alpha, 0)$; (В) u — субгармонична в замыкании $\overline{U(-\alpha, \alpha)}$, $0 < \alpha \leqslant \pi$ и $u(z) + u(|z|) \leqslant 0$, $z \in U(-\alpha, \alpha)$

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 590 с. 2. *Глейзер Е. В.* О росте целых функций с нулями на системе лучей // Укр. мат. журн. 1986. 38, № 3. С. 297—302. 3. *Hayman W. K., Kjellberg B.* On the minimum of a subharmonis function on a connected set.// Studies in Pure Math. to the Memory of Paul Turan. Budapest, 1983. P. 291—322. 4. *Вишнякова А. М., Островский И. В., Улановский А. М.* Об одной гипотезе Ю. В. Линника // Алгебра и анализ. 1990. 2, вып. 4. С. 71—78. 5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 630 с. 6. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М., 1963. 312 с. 7. *Hayman W. K.* Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelox principle // I. Math. Pures et Appl. 1956. 35. P. 115—126. 8. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции, М., 1941. 388 с.

Поступила в редколлегию 12.08.89