*С.Н. Зиненко*

# *Векторный и тензорный анализ*

## *Скалярные и векторные поля*

***(сборник задач)***

**2016**

# 5. Скалярные и векторные поля: градиент, ротор, дивергенция. Оператор Гамильтона $\nabla$

## *Условия*

| Найти grad скалярного поля $f(\vec{r})$, применяя оператор Гамильтона $\nabla$ | |
|---|---|
| **№ 5.1.** $a)$ $\alpha f(\vec{r})+\beta g(\vec{r})$<br>$b)$ $f(\vec{r})\cdot g(\vec{r})$<br>$c)$ $f(g(\vec{r}))$ | **№ 5.1.** $a)$ $\alpha f(r)+\beta g(r)$<br>$b)$ $f(r)\cdot g(r)$<br>$c)$ $f(g(r))$ |
| **№ 5.2** $a)$ $f(\vec{r})=\lvert\vec{r}\rvert=r$<br>$b)$ $f(\vec{r})=\dfrac{q}{r}$<br>$c)$ $f(\vec{r})=(\vec{c},\vec{r})$ | **№ 5.2.** $a)$ $f(\vec{r})=\lvert\vec{d}\rvert=d,\quad \vec{d}=[[\vec{e},\vec{r}],\vec{e}]$<br>$b)$ $f(\vec{r})=\ln d$<br>$c)$ $f(\vec{r})=(\vec{e},\vec{d})$ |
| Найти div и rot векторного поля $\vec{F}(\vec{r})$, применяя оператор Гамильтона $\nabla$ | |
| **№ 5.3.** $a)$ $\alpha\vec{F}(\vec{r})+\beta\vec{G}(\vec{r})$<br>$b)$ $f(\vec{r})\cdot\vec{G}(\vec{r})$<br>$c)$ $\vec{F}(g(\vec{r}))$<br>**№ 5.4.** $a)$ $\vec{F}(\vec{r})=\vec{r}$<br>$b)$ $\vec{E}(\vec{r})=f(r)\vec{r},\quad \left(f(r)=\dfrac{q}{r^3}\right)$<br>$c)$ $\vec{F}(\vec{r})=[\vec{c},\vec{r}]$ | **№ 5.3.** $a)$ $\alpha\vec{F}(r)+\beta\vec{G}(r)$<br>$b)$ $f(r)\cdot\vec{G}(r)$<br>$c)$ $\vec{F}(g(r))$<br>**№ 5.4.** $a)$ $\vec{F}(\vec{r})\equiv\vec{F}(\vec{d})=\vec{d}$<br>$b)$ $\vec{E}(\vec{d})=f(d)\vec{d},\quad \left(f(d)=\dfrac{2q}{d^2}\right)$<br>$c)$ $\vec{H}(\vec{d})=[\vec{e},f(d)\vec{d}]$ |
| **№ 5.5.** Найти выражения векторных операций второго порядка | |

## *Теория*

### *1° Скалярное поле*

*В объеме $V$ задано **скалярное** поле $f$, если каждой точке $A$*

$$A\equiv\overrightarrow{OA}=\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

*поставлен в соответствие **скаляр** (число)*

$$\vec{r}\to f=f(\vec{r})=f(x,y,z)$$

*Удобным геометрическим описанием скалярного поля являются **поверхности уровня** (изоповерхности) – поверхности постоянства поля $f(\vec{r})=const$. В случае плоского поля говорят о линиях уровня (изолинии).*

*Например, температура $T(\vec{r})$ (изотермы), плотность $\rho(\vec{r})$, давление $p(\vec{r})$ (изобары), потенциал электростатического поля $\varphi(\vec{r})$ (эквипотенциальные поверхности) и т.д.*

*Всякий единичный вектор* $\vec{e} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ *будем называть направлением. Производной скалярного поля* $f = f(\vec{r})$ *в точке* $\vec{r}$ *по направлению* $\vec{e}$ *называется*

$$f'_{\vec{e}}(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{r}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\vec{r} + \Delta t\,\vec{e}) - f(\vec{r})}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta t\cos\alpha,\ y+\Delta t\cos\beta,\ z+\Delta t\cos\gamma) - f(x,y,z)}{\Delta t} = f_x'\cdot\cos\alpha + f_y'\cdot\cos\beta + f_z'\cdot\cos\gamma$$

*Физический смысл производной по направлению – скорость изменения поля* $f(\vec{r})$ *в точке* $\vec{r}$ *по направлению* $\vec{e}$.

***Градиентом*** *скалярного поля* $f = f(\vec{r})$ *называется вектор*

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = f_x'\,\vec{i} + f_y'\,\vec{j} + f_z'\,\vec{k} = \begin{bmatrix} f_x' \\ f_y' \\ f_z' \end{bmatrix}$$

*Приведенное определение градиента, удобное с точки зрения его нахождения, имеет тот недостаток, что зависит от выбора базиса.*

*Из связи* $\operatorname{grad} f(\vec{r})$ *с производной по направлению*

$$\boxed{f'_{\vec{e}}(\vec{r}) = \left(\operatorname{grad} f(\vec{r}),\ \vec{e}\right)}$$

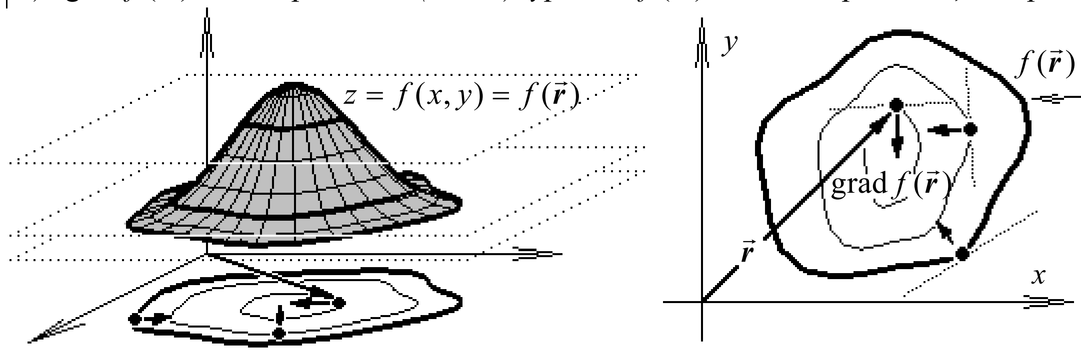
*вытекает инвариантный характер градиента и его физический смысл.*

***Теорема***

1) *направление* $\operatorname{grad} f(\vec{r})$ *- направление* $\vec{e}_{\max}$ *наибольшего роста поля* $f(\vec{r})$
2) *длина* $\operatorname{grad} f(\vec{r})$ *- величина* $f'_{\vec{e}_{\max}} = \max\limits_{\vec{e}} f'_{\vec{e}}$ *наибольшего роста поля* $f(\vec{r})$

$$\boxed{\operatorname{grad} f = f'_{\vec{e}_{\max}}\cdot \vec{e}_{\max}}$$

3) $\operatorname{grad} f(\vec{r}) \perp$ *поверхности (линии) уровня* $f(\vec{r}) = const$, *проходящей через точку* $\vec{r}$




*Удобно ввести в рассмотрение оператор Гамильтона - символический вектор “набла”* $\nabla$

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

*Тогда* ***градиент*** *может быть записан как “произведение” вектора* $\nabla$ *на скаляр* $f(\vec{r})$

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{i}\,f_x' + \vec{j}\,f_y' + \vec{k}\,f_z' = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \nabla f$$

## $2^{\circ}$ *Векторное поле*

*В объеме* $V$ *задано* ***векторное*** *поле* $\vec{F}$*, если каждой точке* $A$

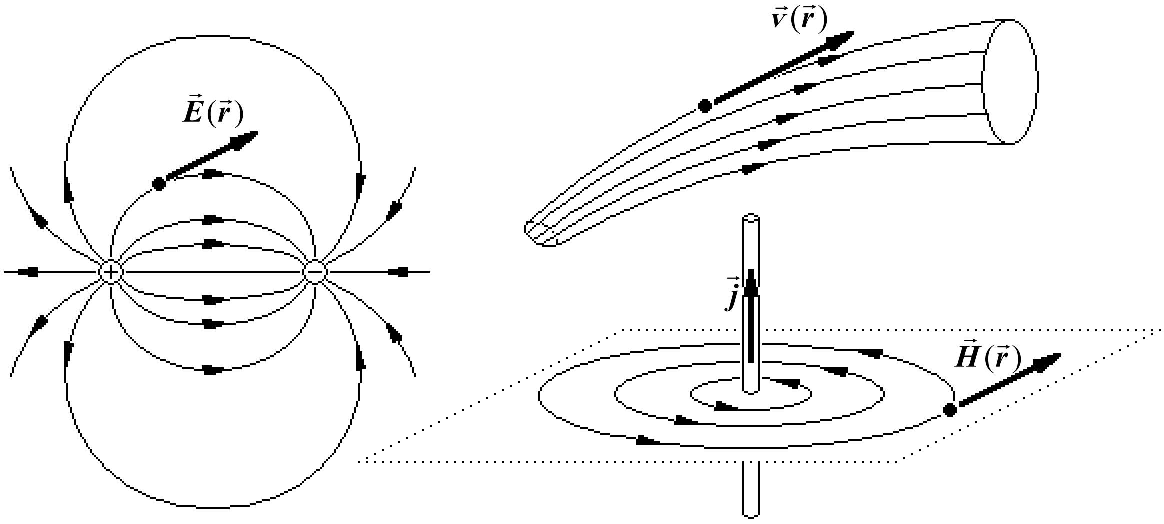
$$A \equiv \overrightarrow{OA} = \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

*поставлен в соответствие* ***вектор***

$$\vec{r} \to \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}\,) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k} = \begin{bmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

*Удобным геометрическим описанием векторного поля являются* ***векторные линии*** *– кривые, в каждой точке которых касательная параллельна полю* $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}\,)$*. Пучок векторных линий, пронизывающих некоторую поверхность* $S$*, образует так называемую* ***векторную трубку****.*

*Например, стационарное поле скоростей* $\vec{v}(\vec{r}\,)$ *жидкости (линии тока), гравитационное поле* $\vec{F}(\vec{r}\,)$*, электростатическое поле* $\vec{E}(\vec{r}\,)$ *(силовые линии), магнитостатическое поле* $\vec{H}(\vec{r}\,)$ *(линии индукции) и т.д.*




***Дивергенцией*** *векторного поля* $\vec{F}(\vec{r}\,)$ *называется* ***скаляр***

$$\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}\,) = P_x' + Q_y' + R_z' = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = \left(\nabla,\, \vec{F}(\vec{r}\,)\right)$$

***Ротором*** *векторного поля* $\vec{F}(\vec{r}\,)$ *называется* ***вектор***

$$\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}\,) = \left(R_y' - Q_z'\right)\vec{i} + \left(P_z' - R_x'\right)\vec{j} + \left(Q_x' - P_y'\right)\vec{k} = \begin{bmatrix} R_y' - Q_z' \\ P_z' - R_x' \\ Q_x' - P_y' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left[\nabla,\, \vec{F}(\vec{r}\,)\right]$$

*С помощью оператора Гамильтона* ***дивергенция*** *и* ***ротор*** *могут быть записаны соответственно как “скалярное” и “векторное” “произведения” символического вектора* $\nabla$ *на вектор* $\vec{F}(\vec{r}\,)$*.*

*Данные определения дивергенции и ротора, удобные с точки зрения их нахождения, имеют тот недостаток, что зависят от выбора базиса. В дальнейшем будут получены инвариантные формулы дивергенции и ротора и выяснен их физический смысл.*

## ***Решения***

*При нахождении*

$$\mathrm{grad} = \nabla \bullet, \quad \mathrm{div} = \left( \nabla, \bullet \right), \quad \mathrm{rot} = \left[ \nabla, \bullet \right]$$

*оператор Гамильтона*

$$\nabla = \vec{\boldsymbol{i}} \, \frac{\partial}{\partial x} + \vec{\boldsymbol{j}} \, \frac{\partial}{\partial y} + \vec{\boldsymbol{k}} \, \frac{\partial}{\partial z}$$

*удобно рассматривать как "дифференциальный вектор", который "умножается **слева**" на скаляр $\nabla \bullet$ или вектор (в скалярном $\left( \nabla, \bullet \right)$ / векторном $\left[ \nabla, \bullet \right]$ произведении). Сначала оператор $\nabla$ действует подобно операции дифференцирования. При этом на нахождение частных производных удобно смотреть, как на одновременное действие, которое вместо "штриха сбоку" $(\ )'_{xyz}$ будем обозначать $\overset{\downarrow}{\frown}$ "стрелкой сверху". Правила "стрелки" $\overset{\downarrow}{\frown}$ вытекают из соответствующих правил "штриха" $(\ )'_{xyz}$ для*

$a)$ *суммы* $\qquad \alpha f + \beta g, \qquad \alpha \vec{\boldsymbol{F}} + \beta \vec{\boldsymbol{G}}$

$b)$ *произведения* $\qquad f \cdot g, \qquad f \cdot \vec{\boldsymbol{G}}, \qquad \left( \vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{G}} \right), \qquad \left[ \vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{G}} \right]$

$c)$ *суперпозиции* $\qquad f(g), \qquad f(\vec{\boldsymbol{G}}), \qquad \vec{\boldsymbol{F}}(g), \qquad \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{G}})$

*Затем, воспринимая $\nabla$ как обычный вектор в составе соответствующего произведения и применяя правила векторной алгебры, преобразуем полученное выражение, поставив $\nabla$ **слева** от сомножителя, на который он подействовал $\nabla \overset{\overset{\downarrow}{\frown}}{\bullet}$*

**№ 5.5.**

Операции

$$\text{grad} = \nabla \bullet, \quad \text{div} = (\nabla, \bullet), \quad \text{rot} = [\nabla, \bullet]$$

называются векторными операциями первого порядка

Построим векторные операции второго порядка

| | $\nabla f$ | $[\nabla, \vec{\boldsymbol{F}}]$ | $(\nabla, \vec{\boldsymbol{F}})$ |
|---|---|---|---|
| $\nabla \bullet$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nabla(\nabla, \vec{\boldsymbol{F}})$ |
| $[\nabla, \bullet]$ | $[\nabla, \nabla f]$ | $[\nabla, [\nabla, \vec{\boldsymbol{F}}]]$ | $\nexists$ |
| $(\nabla, \bullet)$ | $(\nabla, \nabla f)$ | $(\nabla, [\nabla, \vec{\boldsymbol{F}}])$ | $\nexists$ |

Используя символическое исчисление, получим

$\text{rot grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}) = [\nabla, \nabla f] = [\nabla, \nabla] f = \vec{\boldsymbol{0}}$

$\text{div rot} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = (\nabla, [\nabla, \vec{\boldsymbol{F}}]) = (\nabla, \nabla, \vec{\boldsymbol{F}}) = ([\nabla, \nabla], \vec{\boldsymbol{F}}) = 0$

$\text{div grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}) = (\nabla, \nabla f) = (\nabla, \nabla) f = \nabla^2 f = \Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz}$ - ***лапласиан***

$$\text{grad div} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla(\nabla, \vec{\boldsymbol{F}}) = \begin{bmatrix} (P'_x + Q'_y + R'_z)'_x \\ (P'_x + Q'_y + R'_z)'_y \\ (P'_x + Q'_y + R'_z)'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P''_{xx} + Q''_{xy} + R''_{xz} \\ P''_{yx} + Q''_{yy} + R''_{yz} \\ P''_{zx} + Q''_{zy} + R''_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\text{rot rot} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = [\nabla, [\nabla, \vec{\boldsymbol{F}}]] = \nabla(\nabla, \vec{\boldsymbol{F}}) - (\nabla, \nabla)\vec{\boldsymbol{F}} = \text{grad div} \vec{\boldsymbol{F}} - \Delta \vec{\boldsymbol{F}} =$$

$$= \begin{bmatrix} P''_{xx} + Q''_{xy} + R''_{xz} \\ P''_{yx} + Q''_{yy} + R''_{yz} \\ P''_{zx} + Q''_{zy} + R''_{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P''_{xx} + P''_{yy} + P''_{zz} \\ Q''_{xx} + Q''_{yy} + Q''_{zz} \\ R''_{xx} + R''_{yy} + R''_{zz} \end{bmatrix}$$

Следовательно,

| | $\text{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}})$ | $\text{rot} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ | $\text{div} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ |
|---|---|---|---|
| grad | $\nexists$ | $\nexists$ | $\boxed{\text{grad div} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$ |
| rot | $\boxed{\vec{\boldsymbol{0}}}$ | $\boxed{\text{grad div} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) - \Delta \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$ | $\nexists$ |
| div | $\boxed{\Delta f(\vec{\boldsymbol{r}})}$ | *0* | $\nexists$ |

## 6. Криволинейные интегралы от скалярных и векторных полей

***Условия***

<table>
<tr><td colspan="2">№ 6.1. Найти массу кривой $L$ с линейной плотностью $\rho(\vec{\boldsymbol r})$</td></tr>
<tr><td>$$L=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{bmatrix},\quad t\in\left[\,0,\ 2\pi\,\right]\right\}$$ $$\rho(\vec{\boldsymbol r})=\sqrt{x^2+y^2}\cdot z$$</td><td>$$L=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\begin{bmatrix}\operatorname{ch} t\\ \operatorname{sh} t\\ t\end{bmatrix},\quad t\in\left[\,0,\ 1\,\right]\right\}$$ $$\rho(\vec{\boldsymbol r})=\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 6.2. Найти заряд кривой $L$ с линейной плотностью заряда $q(\vec{\boldsymbol r})$</td></tr>
<tr><td>$$L=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\begin{bmatrix}e^{-t}\cos t\\ e^{-t}\sin t\\ e^{-t}\end{bmatrix},\ t\in\left[\,0,\ +\infty\,\right)\right\}$$ $$q(\vec{\boldsymbol r})=x\cdot y\cdot z$$</td><td>$$L=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\begin{bmatrix}\cos e^{-t}\\ \sin e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix},\ t\in\left[\,0,\ +\infty\,\right)\right\}$$ $$q(\vec{\boldsymbol r})=x\cdot y\cdot z$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 6.3. Найти работу силы $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})$ при перемещении материальной точки из начала $A$ в конец $B$ кривой $L_{AB}$</td></tr>
<tr><td>$$L_{AB}=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\begin{bmatrix}\operatorname{ch} t\\ \operatorname{sh} t\\ t\end{bmatrix},\quad t\in\left[\,-1,\ +1\,\right]\right\}$$ $$\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})=\begin{bmatrix}y\\ z\\ x\end{bmatrix}$$</td><td>$$L_{AB}=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{bmatrix},\quad t\in\left[\,-\pi,+\pi\,\right]\right\}$$ $$\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})=\begin{bmatrix}z\\ x\\ y\end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>№ 6.4. Найти работу силы трения $\vec{\boldsymbol F}_{TP}(\vec{\boldsymbol r})$ при перемещении материальной точки по плоской кривой<br>$$L_{AB}=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\quad t\in\left[\,\alpha,\ \beta\,\right]\right\}$$</td><td>№ 6.4. Найти работу силы сопротивления $\vec{\boldsymbol F}_C(\vec{\boldsymbol r})$ воздуха при перемещении материальной точки по кривой<br>$$L_{AB}=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\quad t\in\left[\,\alpha,\ \beta\,\right]\right\}$$</td></tr>
<tr><td>№ 6.5. Найти работу силы тяготения $\vec{\boldsymbol F}_T(\vec{\boldsymbol r})$, создаваемой материальной точкой массой $M$, находящейся в начале координат, при перемещении материальной точки массой $m$ по кривой<br>$$L_{AB}=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\quad t\in\left[\,\alpha,\ \beta\,\right]\right\}$$</td><td>№ 6.5. Найти работу силы упругости $\vec{\boldsymbol F}_У(\vec{\boldsymbol r})$, создаваемой бесконечно растяжимой пружиной, прикрепленной к началу координат, при перемещении материальной точки по кривой<br>$$L_{AB}=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\quad t\in\left[\,\alpha,\ \beta\,\right]\right\}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 6.6. Найти работу векторного поля $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})=\operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol r})$ при перемещении материальной точки из начала $A$ конец $B$ кривой $L_{AB}$</td></tr>
<tr><td>$$L_{AB}=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\quad t\in\left[\,\alpha,\ \beta\,\right]\right\}$$</td><td>$$L_{AB}=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\quad t\in\left[\,\alpha,\ \beta\,\right]\right\},\quad A=B$$</td></tr>
</table>

## Теория

### 1° Криволинейные интегралы от скалярных полей

*Пусть дана простая гладкая кривая*

$$L=\left\{\,\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\quad t\in\left[\,\alpha,\,\beta\,\right]\right\}\qquad (\exists \text{ непрерывная } \vec{\boldsymbol r}_t'(t),\ \text{причем } \vec{\boldsymbol r}_t'(t)\neq\vec{\boldsymbol 0})$$

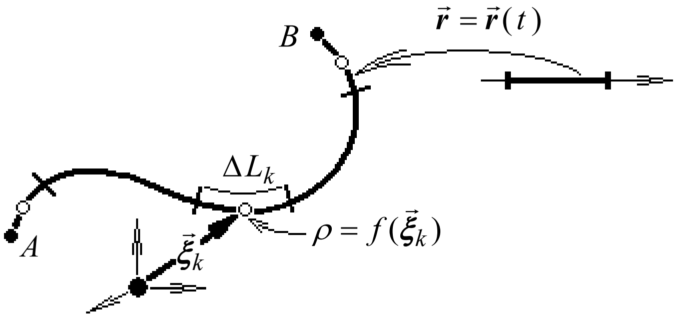
*на которой задано скалярное поле* $f(\vec{\boldsymbol r})$ *(например, линейная плотность вещества/заряда)*

$$\rho=f(\vec{\boldsymbol r})=\lim_{\Delta L\to\vec{\boldsymbol r}}\frac{\Delta m}{\Delta L}$$

*Найдем массу (заряд) кривой*

$$m=\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\vec{\boldsymbol\xi}_k)\,\Delta L_k=$$

$$=\int\limits_{L} f(\vec{\boldsymbol r})\,dL$$




*Полученный предел называется криволинейным интегралом от скалярного поля* $f(\vec{\boldsymbol r})$ *по кривой* $L$ *и сводится к следующему определенному*

$$\boxed{\int\limits_{L} f(\vec{\boldsymbol r})\,dL=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\vec{\boldsymbol r})\left|\,\vec{\boldsymbol r}_t'\,\right|dt}$$

### 2° Криволинейные интегралы от векторных полей

*Пусть дана простая гладкая* ***ориентированная*** *кривая*

$$L_{\pm}=\left\{\,\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\quad t\in\left[\,\alpha,\,\beta\,\right]\right\}\qquad (\exists \text{ непрерывная } \vec{\boldsymbol r}_t'(t),\ \text{причем } \vec{\boldsymbol r}_t'(t)\neq\vec{\boldsymbol 0})$$

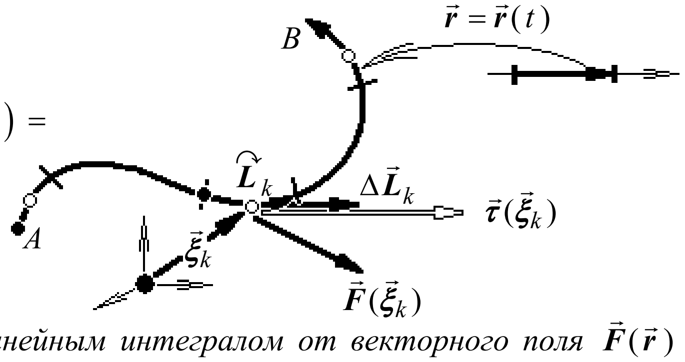
*воспринимаемая, как траектория движения материальной точки, направление которой* $L_+$ *(или* $L_-$*) задается непрерывным полем единичных векторов касательных*

$$\vec{\boldsymbol\tau}(\vec{\boldsymbol r})=\vec{\boldsymbol\tau}(\vec{\boldsymbol r}(t))=\frac{\vec{\boldsymbol r}'(t)}{\left|\vec{\boldsymbol r}'(t)\right|}\quad (\text{или } -\vec{\boldsymbol\tau}(\vec{\boldsymbol r}))$$

*(что равносильно указанию для концевых точек* $A$ *или* $B$ *начала или конца:* $L_+=L_{AB}$*).* *Пусть на кривой* $L_{AB}$ *задано непрерывное векторное поле* $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})$ *(например, силовое).* *Найдем работу силы* $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})$ *при перемещении материальной точки из начала* $A$ *в конец* $B$ *кривой* $L_{AB}$

$$A=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Big(\,\vec{\boldsymbol F}(\vec\xi_k),\ \vec{\boldsymbol\tau}(\vec\xi_k)\underbrace{\Delta L_k}_{}\overset{\Delta\vec{\boldsymbol L}_k}{/\!/}\,\Big)=$$

$$=\int\limits_{L}\Big(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol\tau}(\vec{\boldsymbol r})\,\Big)dL=\int\limits_{L_{AB}}\Big(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\,d\vec{\boldsymbol L}\,\Big)$$




*Полученный предел называется криволинейным интегралом от векторного поля* $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})$ *по ориентированной кривой* $L_{AB}$ *(совпадая с интегралом от скалярного поля* $f=\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol\tau}\,\right)$*)* *и сводится к следующему определенному*

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}}\Big(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\,d\vec{\boldsymbol L}\,\Big)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}_t'\,\Big)dt}$$

## 7. Поверхностные интегралы от скалярных и векторных полей

***Условия***

<table>
<tr><td colspan="2">№ 7.1. Найти массу поверхности $S$ с поверхностной плотностью $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$</td></tr>
<tr><td>$S=\left\{ z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\ x^2+y^2\le a^2 \right\}$<br><br>$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=\sqrt{(x^2+y^2)\cdot z}$</td><td>$S=\left\{ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le ax \right\}$<br><br>$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=\sqrt{(x^2+y^2)}\cdot z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 7.2. Найти заряд поверхности $S$ с поверхностной плотностью $q(\vec{\boldsymbol{r}})$</td></tr>
<tr><td>$S=\left\{ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le ay \right\}$<br><br>$q(\vec{\boldsymbol{r}})=\left(x^2+y^2\right)\cdot z$</td><td>$S=\left\{ z=xy,\ x^2+y^2\le a^2 \right\}$<br><br>$q(\vec{\boldsymbol{r}})=\left(x^2+y^2\right)^2\cdot z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 7.3. Найти количество жидкости (объем), протекающее в единицу времени через верхнюю сторону поверхности $S_+$, со скоростью $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})$</td></tr>
<tr><td>$S_+=\left\{ z=xy,\ \ x^2+y^2\le a^2 \right\},\quad \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$</td><td>$S_+=\left\{ z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2\le a^2 \right\},\ \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 7.4. Найти величину заряда, протекающего в единицу времени через нижнюю сторону поверхности $S_-$, с плотностью заряда $q(\vec{\boldsymbol{r}})$ и со скоростью $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ (силу тока)</td></tr>
<tr><td>$S_-=\left\{ z=x^2+y^2,\ x^2+y^2\le a^2 \right\},\ \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}$<br>$q(\vec{\boldsymbol{r}})=x\cdot y\cdot z$</td><td>$S_-=\left\{ z=xy,\ x^2+y^2\le a^2 \right\},\quad \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix}$<br>$q(\vec{\boldsymbol{r}})=x\cdot y\cdot z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 7.5. Найти поток вектора $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ через коническую поверхность</td></tr>
<tr><td>$S=\left\{ z=a\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in D \right\},\quad \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{r}}$</td><td>$S=\left\{ z=a\sqrt{x^2+y^2},\ \ (x,y)\in D \right\},\ \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти поток вектора $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{r}}$ через поверхность</td></tr>
<tr><td>№ 7.6.<br>$S_+=\left\{ \vec{\boldsymbol{r}}=\begin{bmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v \end{bmatrix},\quad \begin{matrix} 0\le u\le a \\ 0\le v\le 2\pi \end{matrix} \right\}$<br><br>№ 7.7.<br>часть сферы $S_+=\left\{ \lvert\vec{\boldsymbol{r}}\rvert=r_0 \right\}$ площади $S$</td><td>№ 7.6.<br>$S_+=\left\{ \vec{\boldsymbol{r}}=\begin{bmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ u \end{bmatrix},\quad \begin{matrix} 0\le u\le a \\ 0\le v\le 2\pi \end{matrix} \right\}$<br><br>№ 7.7.<br>часть плоскости $\left(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0,\ \vec{\boldsymbol{n}}\right)=0$ площади $S$</td></tr>
</table>

## *Теория*

### *1° Поверхностные интегралы от скалярных полей*

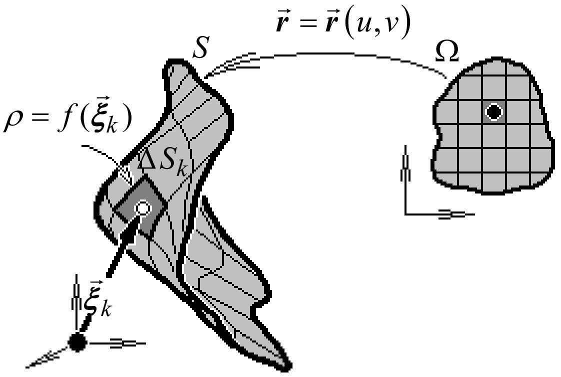
*Пусть дана простая гладкая поверхность*

$$S=\left\{\,\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega\,\right\}\qquad (\exists\ \text{ непрерывные }\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v',\ \text{ причем }\ \left[\,\vec{\boldsymbol r}_u',\,\vec{\boldsymbol r}_v'\,\right]\neq\vec{\boldsymbol 0})$$

*на которой задано скалярное поле* $f(\vec{\boldsymbol r})$.

*Например,* $f(\vec{\boldsymbol r})=\rho$ *поверхностная плотность вещества (заряда)*

$$\rho=\lim_{\Delta S\to\vec{\boldsymbol r}}\frac{\Delta m}{\Delta S}$$




*Найдем массу (заряд) поверхности*

$$m=\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\vec{\boldsymbol\xi}_k)\,\Delta S_k=$$

$$=\iint_S f(\vec{\boldsymbol r})\,dS$$

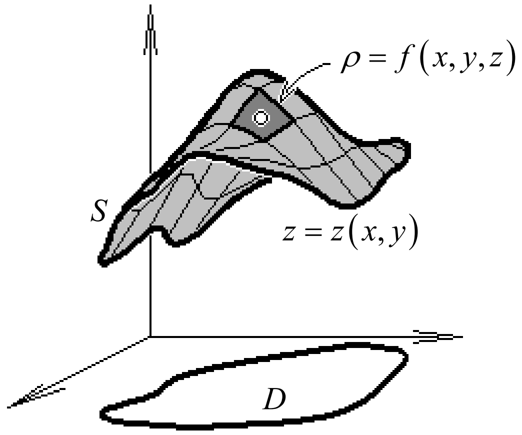
*Полученный предел называется поверхностным интегралом от скалярного поля* $f(\vec{\boldsymbol r})$ *по поверхности* $S$ *и сводится к следующему двойному*

$$\boxed{\iint_S f(\vec{\boldsymbol r})\,dS=\iint_\Omega f(\vec{\boldsymbol r})\,\left|\left[\,\vec{\boldsymbol r}_u',\vec{\boldsymbol r}_v'\,\right]\right|du\,dv}$$

*В частном случае, когда поверхность*

$$S=\left\{\,z=z(x,y),\ (x,y)\in D\,\right\}$$

*график непрерывно дифференцируемой функции, интеграл равен*




$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_S f(x,y,z)\,dS=\\&=\iint_D f(x,y,z)\,\sqrt{1+{z_x'}^2+{z_y'}^2}\;dx\,dy\end{aligned}}$$

## *2° Поверхностные интегралы от векторных полей*

*Пусть дана простая гладкая* ***ориентированная*** *поверхность*

$$S_{\pm} = \left\{ \vec{\boldsymbol r} = \vec{\boldsymbol r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega \right\} \qquad (\exists \text{ непрерывные } \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v',\ \text{причем } \left[\, \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v' \,\right] \neq \vec{\boldsymbol 0})$$

*со стороной задаваемой непрерывным полем единичных векторов нормалей* $\pm\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})$

$$\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}) = \vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}(u,v)) = \frac{\left[\, \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v' \,\right]}{\left|\left[\, \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v' \,\right]\right|}$$

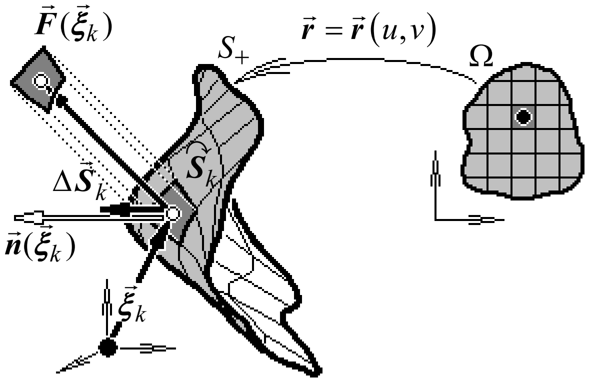
*на которой задано непрерывное векторное поле* $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})$. *Например,*

- $\vec{\boldsymbol F} = \vec{\boldsymbol v}(\vec{\boldsymbol r})$ *поле скоростей стационарного потока жидкости*
- $\vec{\boldsymbol F} = \vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol r}) = q(\vec{\boldsymbol r}) \cdot \vec{\boldsymbol v}(\vec{\boldsymbol r})$ *стационарный ток зарядов с плотностью* $q$ *и скоростью* $\vec{\boldsymbol v}$

*Найдем поток векторного поля через заданную сторону поверхности, т.е.*
- *объем жидкости, протекающий в данном направлении в единицу времени*
- *силу тока (массу жидкости)*

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} \Delta\Pi_k = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left( \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol \xi}_k),\ \underbrace{\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol \xi}_k)\, \Delta S_k}_{\Delta \vec{\boldsymbol S}_k} \right) =$$

$$= \iint\limits_{S} \left( \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}) \right) dS = \iint\limits_{S_+} \left( \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S} \right)$$



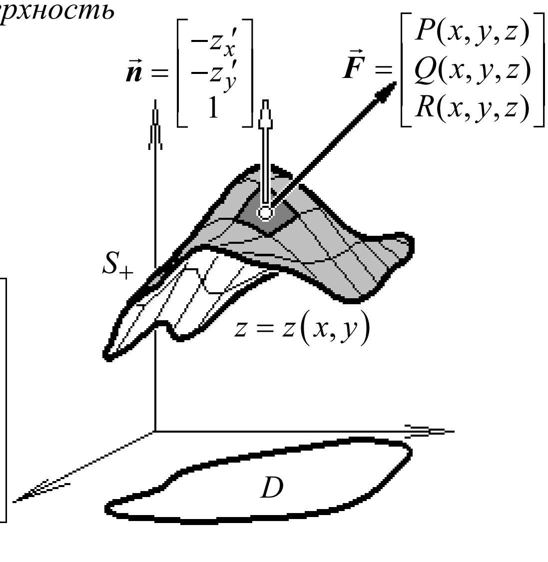

*где через* $\Delta\vec{\boldsymbol S}_k = \vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol \xi}_k)\Delta S_k$ *обозначен вектор ориентированной площади.*
*Полученный предел называется поверхностным интегралом от векторного поля* $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})$ *по выбранной стороне* $S_+$ *ориентированной поверхности (совпадая с интегралом от скалярного поля* $f = \left( \vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol n} \right)$*) и сводится к следующему двойному*

$$\boxed{\iint\limits_{S_+} \left( \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S} \right) = \iint\limits_{\Omega} \left( \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v' \right) du\,dv}$$

*В частном случае, когда* ***ориентированная*** *поверхность*

$$S_+ = \left\{ z = z(x,y),\ (x,y) \in D \right\}$$

***верхняя*** *сторона графика непрерывно дифференцируемой функции, интеграл равен*




$$\boxed{\begin{aligned} &\iint\limits_{S_+} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(\ldots)\,dz\,dx + R(\ldots)\,dx\,dy = \\ &= \iint\limits_{D} \Big( -P(x,y,z)\cdot z_x' - Q(\ldots)\cdot z_y' + R(\ldots) \Big)\,dx\,dy \end{aligned}}$$

## 8. Теорема Стокса. Ротор

### *Условия*

| | |
|---|---|
| **№ 8.1.** Найти циркуляцию “плоского” поля $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ вдоль замкнутой “плоской” кривой $L$ | |
| $L=\left\{\, x^2+y^2=2ax \,\right\},\qquad \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} x-x^2y \\ xy^2+y \end{bmatrix}$ | $L=\left\{\, x^2+y^2=a^2 \,\right\},\quad \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} -3x^4y-x^2y^3 \\ x^3y^2+3xy^4 \end{bmatrix}$ |
| **№ 8.2.** Используя формулу Грина, найти работу поля $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ вдоль незамкнутой кривой $L_{AB}$ | |
| $\underset{AB}{L}=\left\{\begin{bmatrix} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{bmatrix}, t\in\left[0,\pi\right]\right\},\ \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} e^x\cos y \\ -e^x\sin y \end{bmatrix}$ | $\underset{AB}{L}=\left\{\begin{bmatrix} x=\cos t \\ y=\sin t \end{bmatrix} t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} \cos x\cos y \\ -\sin x\sin y \end{bmatrix}$ |
| **№ 8.3.** Используя формулу Грина, найти площадь фигуры, ограниченной кривой | |
| эллипс $L=\left\{\begin{bmatrix} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{bmatrix},\qquad t\in\left[0,2\pi\right]\right\}$ | астроида $L=\left\{\begin{bmatrix} x=a\cos^3 t \\ y=b\sin^3 t \end{bmatrix},\quad t\in\left[0,2\pi\right]\right\}$ |
| Найти циркуляцию поля $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ вдоль замкнутой кривой $L$ (движение по кривой совершается по часовой стрелке, если смотреть со стороны оси $Ox$) | |
| **№ 8.4.**<br>$L=\left\{\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ 1x+2y+3z=0 \end{bmatrix}\right\},\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} 1x-2y+3z \\ 4x-5y+6z \\ 7x-8y+9z \end{bmatrix}$<br>**№ 8.5.**<br>$L=\left\{\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{bmatrix}\right\},\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} x^3-y^2+z \\ y^3-z^2+x \\ z^3-x^2+y \end{bmatrix}$ | **№ 8.4.**<br>$L=\left\{\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ 3x+2y+1z=0 \end{bmatrix}\right\},\ \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} 9x-8y+7z \\ 6x-5y+4z \\ 3x-2y+1z \end{bmatrix}$<br>**№ 8.5.**<br>$L=\left\{\begin{bmatrix} x^2+y^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{bmatrix}\right\},\ \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} x^4-y^2+z^2 \\ y^5-z^2+x^2 \\ z^6-x^2+y^2 \end{bmatrix}$ |
| **№ 8.6.** Используя формулу Стокса, найти работу поля $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ вдоль незамкнутой кривой $L_{AB}$ | |
| $\underset{AB}{L}=\left\{\vec{\boldsymbol{r}}=\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}, t\in\left[0,2\pi\right]\right\},\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} x^2-yz \\ y^2-zx \\ z^2-xy \end{bmatrix}$ | $\underset{AB}{L}=\left\{\vec{\boldsymbol{r}}=\begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{bmatrix}, t\in\left[0,2\pi\right]\right\},\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix} 2xy+z^2 \\ 2yz+x^2 \\ 2zx+y^2 \end{bmatrix}$ |

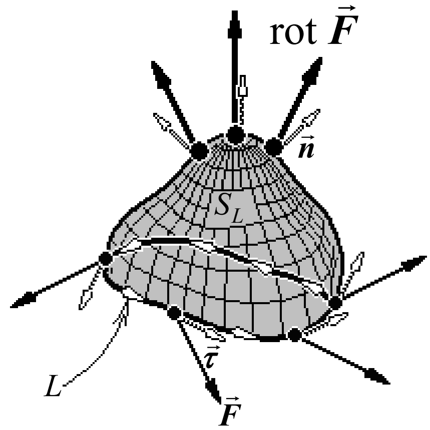
## *Теория*

***Ротором*** *векторного поля* $\vec{F}(\vec{r})$ *называется вектор*

$$\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r})=\left[\nabla,\vec{F}(\vec{r})\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}R'_y-Q'_z\\ P'_z-R'_x\\ Q'_x-P'_y\end{bmatrix}=\left(R'_y-Q'_z\right)\vec{i}+\left(P'_z-R'_x\right)\vec{j}+\left(Q'_x-P'_y\right)\vec{k}$$

***Теорема (Стокса)***

*Циркуляция векторного поля* $\vec{F}(\vec{r})$ *вдоль замкнутого контура* $L$ *равна потоку ротора* $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r})$ *через соответствующую сторону поверхности* $S_L$*, опирающуюся на* $L$




$$\boxed{\oint_L\left(\vec{F}(\vec{r}),\,d\vec{L}\right)=\iint_{S_L}\left(\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}),\,d\vec{S}\right)}$$

*или*

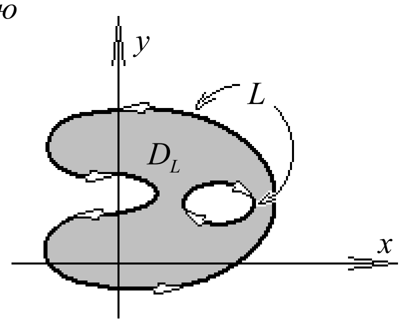
$$\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_{S_L}\left(R'_y-Q'_z\right)dy\,dz+\left(P'_z-R'_x\right)dz\,dx+\left(Q'_x-P'_y\right)dx\,dy$$

***Замечание.*** *Ориентация поверхности (поле единичных векторов нормалей* $\vec{n}(\vec{r})$*) согласована с ориентацией кривой* $L$ *(поле единичных векторов касательных* $\vec{\tau}(\vec{r})$*), т.е. при движении вектора нормали* $\vec{n}$ *вдоль кривой* $L$ *в направлении* $\vec{\tau}$ *поверхность* $S_L$ *должна оставаться слева (обход границы* $L$ *с выбранной стороны поверхности* $S_L$ *должен быть виден “против часовой стрелки”* $\Rightarrow$ *“правило правого винта”)*

*В частном случае плоской кривой, ограничивающей плоскую область* $D_L$*, и плоского поля*

$$L=\left\{\begin{bmatrix}x=x(t)\\ y=y(t)\end{bmatrix},\ t\in[\alpha,\,\beta]\right\},\quad \vec{F}(\vec{r})=\begin{bmatrix}P(x,y)\\ Q(x,y)\end{bmatrix}$$

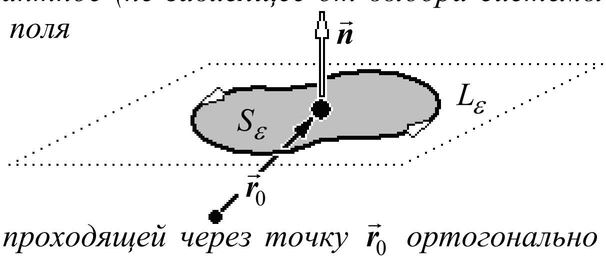
*получаем частный случай формулы Стокса -* ***формулу Грина***




$$\boxed{\oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_{D_L}\left(Q'_x-P'_y\right)dx\,dy}$$

*Из теоремы Стокса можно получить инвариантное (не зависящее от выбора системы координат) определение ротора векторного поля*

$$\boxed{\left(\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}_0),\,\vec{n}\right)=\lim_{S_\varepsilon\to\vec{r}_0}\frac{\oint_{L_\varepsilon}\left(\vec{F}(\vec{r}),\,d\vec{L}\right)}{\left|S_\varepsilon\right|}}$$




*(здесь* $L_\varepsilon$ *- замкнутый контур в плоскости, проходящей через точку* $\vec{r}_0$ *ортогонально заданному направлению* $\vec{n}$*, ограничивающий плоскую область* $S_\varepsilon\ni\vec{r}_0$ *с площадью* $\left|S_\varepsilon\right|$*)*

*Приведенная формула позволяет найти не сам ротор, а его проекцию на произвольное направление. Выбирая последовательно в качестве* $\vec{n}$ *базисные векторы* $\vec{i}$*,* $\vec{j}$*,* $\vec{k}$ *можно получить данную выше координатную формулу для ротора.*

*Из инвариантного определения вытекает физический смысл ротора – плотность циркуляции векторного поля или, как говорят, степень завихренности поля (отсюда другое название ротора –* ***вихрь*** *поля).*

## 9. Теорема Гаусса - Остроградского. Дивергенция

### *Условия*

<table>
<tr><td colspan="2">Найти поток поля $\vec{F}(\vec{r})$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $S$</td></tr>
<tr><td>

**№ 9.1.**

$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^5 + 10\,x\,y^2 z^2 \\ y^5 + 10x^2\,y\,z^2 \\ z^5 + 10x^2 y^2\,z \end{bmatrix}$

$S = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \right\}$

**№ 9.2.**

$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^3 z \\ y^3 z \\ \left( x^2 + y^2 \right) z^2 \end{bmatrix}$

$S = S_V, \quad V = \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{2a^2 - x^2 - y^2} \right\}$

**№ 9.3.**

$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$

$S = \left\{ \left( \vec{r} - \vec{r}_0,\ \vec{r} - \vec{r}_0 \right) = a^2 \right\}$

</td><td>

**№ 9.1.**

$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^3 + x(y - z) \\ y^3 + y(z - x) \\ z^3 + z(x - y) \end{bmatrix}$

$S = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = 2az \right\}$

**№ 9.2.**

$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^5 z \\ y^5 z \\ 5\,x^2 y^2 z^2 \end{bmatrix}$

$S = S_V, \quad V = \left\{ x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$

**№ 9.3.**

$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$

$S = \left\{ \left( \mathbf{J}\,(\vec{r} - \vec{r}_0),\ (\vec{r} - \vec{r}_0) \right) = 1 \right\},\ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

**№ 9.4.** Используя формулу Гаусса-Остроградского, найти объем тела

</td></tr>
<tr><td>$V = \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 - (x^2 + y^2) \right\}$</td><td>$V = \left\{ x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

**№ 9.5.** Используя формулу Гаусса-Остроградского, найти поток поля $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ через верхнюю сторону части сферы, заключенной внутри конуса

</td></tr>
<tr><td>$S = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \left( \sqrt{3} z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right\}$</td><td>$S = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = 2az \quad \left( z \ge \sqrt{3(x^2 + y^2)} \right) \right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

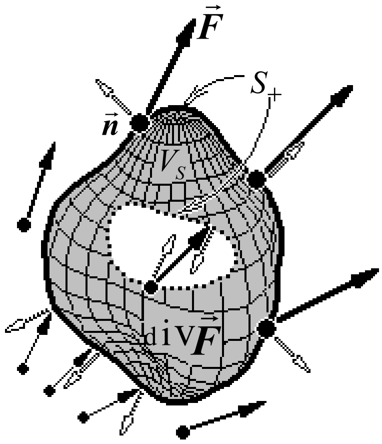
**№ 9.6.** Доказать, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью и плоскостью равен $V = \frac{1}{3} S\,h$, где $S$ - площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, и $h$ - его высота

</td></tr>
</table>

## *Теория*

***Дивергенцией*** *векторного поля* $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *называется скаляр*

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \left(\nabla, \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right) = \tfrac{\partial}{\partial x}P + \tfrac{\partial}{\partial y}Q + \tfrac{\partial}{\partial z}R = P_x' + Q_y' + R_z'$$




***Теорема (Гаусса-Остроградского)***

*Поток векторного поля* $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *через внешнюю сторону* $S_+$ *поверхности, ограничивающей объем* $V_S$, *равен объемному интегралу от дивергенции поля* $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$

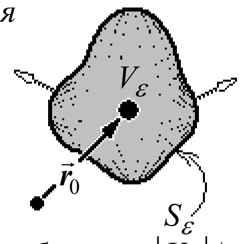
$$\boxed{\oiint\limits_{S_+}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\, d\vec{\boldsymbol{S}}\right) = \iiint\limits_{V_S}\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,dV}$$

*или*

$$\iint\limits_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{V_S}\left(P_x' + Q_y' + R_z'\right)dx\,dy\,dz$$

***Замечание.*** *Ориентация поверхности выбирается внешней* $S_+$ *(поле единичных векторов нормалей* $\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *внешнее по отношению к* $V_S$*).*

*Из теоремы Гаусса-Остроградского можно получить инвариантное (не зависящее от выбора системы координат) определение дивергенции векторного поля*




$$\boxed{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol{r}}_0}\frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\, d\vec{\boldsymbol{S}}\right)}{\left|V_\varepsilon\right|}}$$

*(здесь* $S_\varepsilon$ *- замкнутая поверхность, ограничивающая область* $V_\varepsilon \ni \vec{\boldsymbol{r}}_0$ *с объемом* $\left|V_\varepsilon\right|$*)*

*Из инвариантного определения вытекает физический смысл дивергенции – плотность (мощность, интенсивность) источников векторного поля или, как говорят, степень расходимости поля (отсюда другое название дивергенции –* ***расходимость*** *поля)*

## 10. Интегральные теоремы о градиенте, роторе, дивергенции, лапласиане

### *Условия*

| Применяя интегральные теоремы о градиенте, роторе, дивергенции, найти | |
|---|---|
| **№ 10.1.** *a*) grad $c$, *b*) div $\vec{c}$, *c*) rot $\vec{c}$<br>**№ 10.2.** *a*) grad $r$, *b*) div $\vec{r}$, *c*) rot $\vec{r}$<br>**№ 10.3.** *a*) $\operatorname{grad}(\vec{c},\vec{r})$, *b*) $\operatorname{div}[\vec{c},\vec{r}]$, *c*) $\operatorname{rot}[\vec{c},\vec{r}]$ | **№ 10.1.** $\operatorname{grad}\left(\alpha f(\vec{r})+\beta g(\vec{r})\right)$<br>**№ 10.2.** div, rot $\left(\alpha\vec{F}(\vec{r})+\beta\vec{G}(\vec{r})\right)$<br>**№ 10.3.** $\operatorname{grad}\left(\mathbf{J}\vec{r},\ \vec{r}\right)$ |
| **№ 10.4.** Применяя интегральные теоремы, показать, что $\oint\limits_L \vec{\tau}(\vec{r})\,dL=\vec{0}$, $\oint\!\!\!\oint\limits_S \vec{n}(\vec{r})\,dS=\vec{0}$ | **№ 10.4.** Тело $V$ погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, показать, что выталкивающая сила равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх (закон Архимеда) |
| **№ 10.5.** Показать, что поток Ньютонова поля $\vec{F}(\vec{r})=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ через поверхность $S$ равен величине телесного угла, опирающегося на $S$ | **№ 10.5.** Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$ Найти расходимость и вихрь линейных скоростей $\vec{v}(\vec{r})$ точек этого тела |
| **№ 10.6.** Найти “скалярный” и “векторный” поток Ньютонова поля $\vec{F}(\vec{r})=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ через замкнутую поверхность $S_+$ | **№ 10.6.** Получить уравнение, описывающее распределение скорости $\vec{v}(\vec{r})$ и плотности $\rho(\vec{r})$ жидкости в объеме $V$ (стационарное уравнение неразрывности) |
| **№ 10.7.** Найти поток поля *a*) $\vec{F}(\vec{r})=\operatorname{grad} f(\vec{r})$, *b*) $\vec{F}(\vec{r})=\operatorname{rot}\vec{G}(\vec{r})$ через замкнутую поверхность $S_+$ | **№ 10.7.** Получить уравнение, описывающее распределение температуры $u(\vec{r})$ в объеме $V$ (стационарное уравнение теплопроводности) |

### *Теория*

***1°*** *Формуле* ***Гаусса-Остроградского*** *можно придать вид, получивший название формулы*

*“о* ***дивергенции****”*

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint\limits_{S_+}\left(\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{F}(\vec{r})\right)dS=\iiint\limits_{V_S}\left(\nabla,\vec{F}(\vec{r})\right)dV}$$

*Полагая вместо* $\vec{F}(\vec{r})\ \to\ f(\vec{r})\cdot\vec{c},\ \left[\vec{F}(\vec{r}),\vec{c}\,\right],\ \operatorname{grad} f(\vec{r})=\nabla f(\vec{r})$, *получаем формулы*

*“о* ***градиенте****”*

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint\limits_{S_+}\vec{n}(\vec{r})\,f(\vec{r})\,dS=\iiint\limits_{V_S}\nabla f(\vec{r})\,dV}$$

*“о* ***роторе****”*

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint\limits_{S_+}\left[\,\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{F}(\vec{r})\,\right]dS=\iiint\limits_{V_S}\left[\,\nabla,\vec{F}(\vec{r})\,\right]dV}$$

*“о* ***лапласиане****”*

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint\limits_{S_+}\underbrace{\left(\vec{n}(\vec{r}),\ \nabla f(\vec{r})\right)}_{f'_{\vec{n}}(\vec{r})}dS=\iiint\limits_{V_S}\underbrace{\left(\nabla,\nabla f(\vec{r})\right)}_{\Delta f(\vec{r})}dV}$$

*Отсюда вытекают единообразные инвариантные определения векторных операций*

***градиент***

$$\boxed{\nabla f(\vec{\boldsymbol r}_0)=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol r}_0}\frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon}\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})\,f(\vec{\boldsymbol r})\,dS}{|V_\varepsilon|}}$$

***дивергенция***

$$\boxed{\left(\nabla,\ \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}_0)\right)=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol r}_0}\frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})\right)dS}{|V_\varepsilon|}}$$

***ротор***

$$\boxed{\left[\nabla,\ \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}_0)\right]=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol r}_0}\frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left[\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})\right]dS}{|V_\varepsilon|}}$$

***лапласиан***

$$\boxed{\Delta f(\vec{\boldsymbol r}_0)=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol r}_0}\frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}),\nabla f(\vec{\boldsymbol r})\right)dS}{|V_\varepsilon|}=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol r}_0}\frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon}f'_{\vec{\boldsymbol n}}(\vec{\boldsymbol r})\,dS}{|V_\varepsilon|}}$$

**2°** *Из формулы* ***Гаусса-Остроградского*** *при* $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})=f(\vec{\boldsymbol r})\,\nabla g(\vec{\boldsymbol r})$, *вытекает*

*1)* ***первая формула Грина***

$$\boxed{\oiint\limits_{S_+}f(\vec{\boldsymbol r})\,g'_{\vec{\boldsymbol n}}(\vec{\boldsymbol r})\,dS=\iiint\limits_{V_S}\Big(f(\vec{\boldsymbol r})\,\Delta g(\vec{\boldsymbol r})+\left(\nabla f(\vec{\boldsymbol r}),\ \nabla g(\vec{\boldsymbol r})\right)\Big)dV}$$

*из которой следует "симметричная"*

*2)* ***вторая формула Грина***

$$\boxed{\oiint\limits_{S_+}\left(f(\vec{\boldsymbol r})\,g'_{\vec{\boldsymbol n}}(\vec{\boldsymbol r})-g(\vec{\boldsymbol r})\,f'_{\vec{\boldsymbol n}}(\vec{\boldsymbol r})\right)dS=\iiint\limits_{V_S}\left(f(\vec{\boldsymbol r})\,\Delta g(\vec{\boldsymbol r})-g(\vec{\boldsymbol r})\,\Delta f(\vec{\boldsymbol r})\right)dV}$$

*превращающаяся при* $g(\vec{\boldsymbol r})=\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}_0|}$ , *где* $\vec{\boldsymbol r}_0\in V_S$ *внутренняя точка, в*

*3)* ***интегральную формулу Грина***

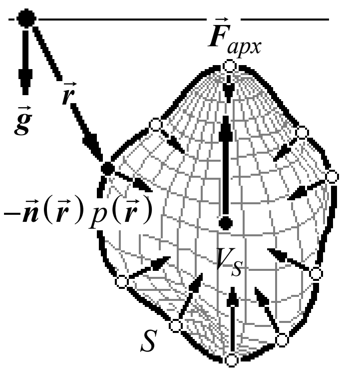
$$\boxed{4\pi f(\vec{\boldsymbol r}_0)=-\iiint\limits_{V_S}\frac{\Delta f(\vec{\boldsymbol r})}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}_0|}dV-\oiint\limits_{S}f(\vec{\boldsymbol r})\,\frac{\partial}{\partial\vec{\boldsymbol n}}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}_0|}dS+\oiint\limits_{S}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}_0|}\,\frac{\partial}{\partial\vec{\boldsymbol n}}f(\vec{\boldsymbol r})\,dS}$$

*$3^{\circ}$ Рассмотрим ряд полезных физических примеров применения интегральных теорем.*

### *$3.1^{\circ}$* ***Градиент (закон Архимеда)***

*Тело $V$ погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, показать, что выталкивающая сила равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх.*

*В покоящейся жидкости под действием силы тяжести каждый ее слой давит своим весом на нижние слои. Создаваемое тем самым гидростатическое давление по закону* ***Паскаля передается по всем направлениям одинаково*** *и равно*




$$p(\vec{r}) = \rho\, g\, h = \rho \cdot \left( \vec{g},\, \vec{r} \right)$$

*Сила давления, действующая со стороны жидкости в точке $\vec{r}$ на элементарную площадь $dS$ равна по величине $p(\vec{r})dS$ и направлена по нормали $-\vec{n}(\vec{r})$*

$$d\vec{F}_{дав}(\vec{r}) = -\,\vec{n}(\vec{r})\,p(\vec{r})\,dS$$

*(Если тело погружено в жидкость не полностью, то сила давления на “верхнюю” сторону погруженной части равна нулю, как и должно быть на глубине $h = 0$).*

*Следовательно, результирующая сила гидростатического давления (Архимеда) равна*

$$\vec{F}_{apx} = \oint\!\!\!\oint_S d\vec{F}_{дав}(\vec{r}) = -\oint\!\!\!\oint_S \vec{n}(\vec{r})\,p(\vec{r})\,dS = -\rho \oint\!\!\!\oint_S \vec{n}(\vec{r})\left(\vec{g},\, \vec{r}\right)dS = -\rho \iiint_{V_S} \underset{\vec{g}}{\underset{\parallel}{\operatorname{grad}\left(\vec{g},\, \vec{r}\right)}}\,dV =$$

$$= -\rho\,\vec{g} \iiint_{V_S} \underset{V}{\underset{\parallel}{1\,dV}} = -\rho\, V \vec{g} = -\,m\vec{g} = -\,\vec{G}$$

*Тем самым получен закон* ***Архимеда****:* ***на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости.***

***Замечание****. Наглядно представить себе закон Архимеда можно, заменив тело помещенное в жидкость на саму эту жидкость, вес которой в покое уравновешивается гидростатическим давлением.*

***Замечание****. В состоянии невесомости гидростатическое давление, обусловленное весом жидкости, отсутствует, так что сила Архимеда равна нулю.*

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S d\vec{S} = \oint\!\!\!\oint_S \vec{n}(\vec{r})\,dS = \vec{0}}$$

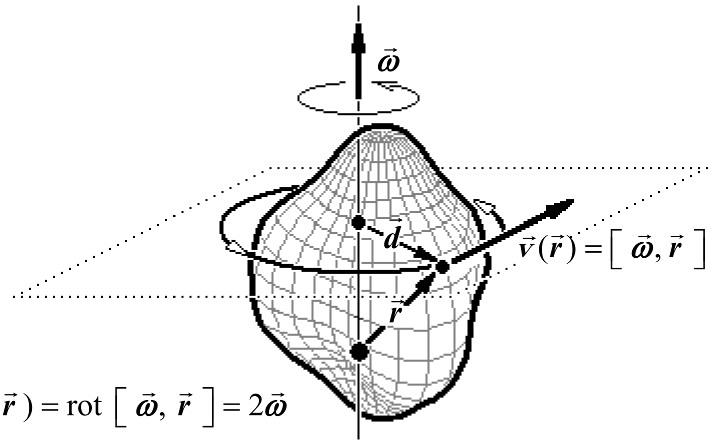
***Замечание****. Диаметрально противоположно случаю плавающего тела, пересекающегося с верхним уровнем жидкости, выглядит ситуация соприкосновения с нижним (дном). В этом случае выталкивающая сила гидростатического давления уменьшается на величину, пропорциональную площади соприкосновения (т.е. на величину веса соответствующего столба жидкости).*

*Поплавок, герметично прижатый ко дну резервуара, не будет всплывать, т.к. к силе тяжести, тянущей его вниз, добавится ещё и сила давления столба жидкости над ним.*

### *3.2° Ротор (угловая скорость)*

*Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с* ***угловой скоростью*** $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.
*Найти* ***расходимость*** *и* ***вихрь линейных скоростей*** $\vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *точек твердого тела.*

*Линейная скорость* $\vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *точки* $\vec{\boldsymbol{r}}$ *направлена по касательной к окружности радиуса* $d = \left|\, \vec{\boldsymbol{d}}\, \right|$, *лежащей в плоскости ортогональной оси* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, *так что* $\vec{v} \perp \vec{\boldsymbol{\omega}} \perp \vec{\boldsymbol{d}}$




*Учитывая, что*

$$\left|\, \vec{v}\, \right| = v = \omega\, d = \left|\, \vec{\boldsymbol{\omega}}\, \right| \cdot \left|\, \vec{\boldsymbol{d}}\, \right| \cdot \sin\frac{\pi}{2}$$

*получим (сравнить стр. 5)*

$$\vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \left[\, \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\boldsymbol{d}}\, \right] = \left[\, \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\boldsymbol{r}}\, \right]$$

*Следовательно, (см.* **№ 5.4.***)*

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{div}\left[\, \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\boldsymbol{r}}\, \right] = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{rot}\left[\, \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\boldsymbol{r}}\, \right] = 2\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

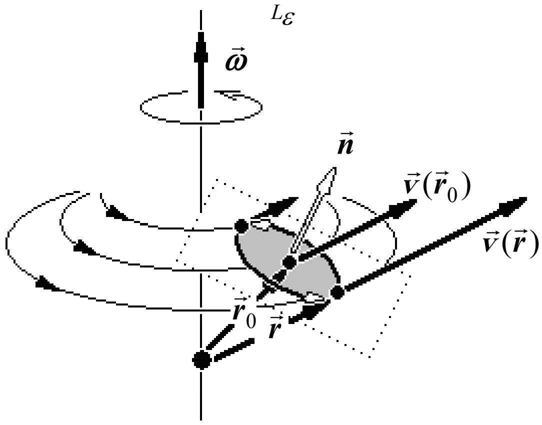
***Замечание****. Нахождение* **div** *и* **rot** *с помощью соответствующих интегральных формул, вытекающих из теоремы* ***Гаусса-Остроградского****, будет проведено в* **№ 10.3.**
*Для разнообразия при вычислении* **rot** *воспользуемся другой интегральной формулой, ранее полученной из теоремы* ***Стокса*** *(стр. 53)*

$$\left( \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}_0), \vec{\boldsymbol{n}} \right) = \lim_{S_\varepsilon \to \vec{\boldsymbol{r}}_0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \oint_{L_\varepsilon} \left( \vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}), d\vec{\boldsymbol{L}} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \oint_{L_\varepsilon} \left( \left[\, \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\boldsymbol{r}}\, \right], \vec{\boldsymbol{\tau}} \right) dL =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \left( \left( \vec{\boldsymbol{\omega}}, \oint_{L_\varepsilon} \left[\, \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0, \vec{\boldsymbol{\tau}}\, \right] dL \right) + \left( \left[\, \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\boldsymbol{r}}_0\, \right], \oint_{L_\varepsilon} \vec{\boldsymbol{\tau}}\, dL \right) \right) = \to$$

*Замечая, что*

$$\boxed{\oint_L d\vec{\boldsymbol{L}} = \oint_L \vec{\boldsymbol{\tau}}\, dL = \vec{\boldsymbol{0}}}$$




*получим*

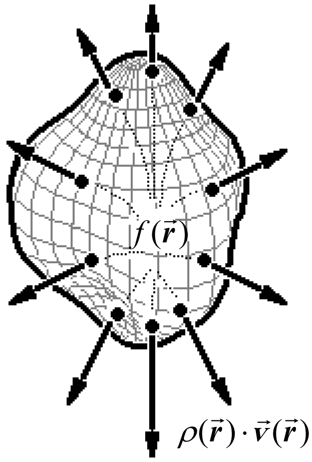
$$\to = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \left( \vec{\boldsymbol{\omega}}, \oint_{L_\varepsilon} \left[\, \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0, \vec{\boldsymbol{\tau}}\, \right] dL \right) = \to$$

*Возьмем в качестве контура* $L_\varepsilon$ *окружность радиуса* $\varepsilon$ *(*$\Rightarrow \left| S_\varepsilon \right| = \pi \varepsilon^2$*) с центром* $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ *лежащей в плоскости* $\perp \vec{\boldsymbol{n}}$ *. В любой точке* $\vec{\boldsymbol{r}}$ *окружности ее радиус-вектор* $\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 \perp \vec{\boldsymbol{\tau}}$ *вектору касательной, так что* $\left[\, \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0, \vec{\boldsymbol{\tau}}\, \right] = \varepsilon \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$. *Имеем*

$$\to = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \left( \vec{\boldsymbol{\omega}}, \oint_{L_\varepsilon} \varepsilon \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, dL \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \left( \vec{\boldsymbol{\omega}}, \varepsilon \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \right) \cdot 2\pi \varepsilon = \left( 2\vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\boldsymbol{n}} \right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 2\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

### *3.3° Дивергенция (стационарное движение жидкости)*

*Пусть в объеме $V$ циркулируют стационарные потоки жидкости, характеризуемые установившимся распределением постоянной скорости $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ (в каждой точке своей) и постоянной плотности $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$. Предположим, что имеются внутренние источники жидкости интенсивности $f(\vec{\boldsymbol{r}})$ (количество жидкости, выделяемое в точке $\vec{\boldsymbol{r}}$ за единицу времени). Найти уравнение, описывающее распределение скорости $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ и плотности $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$ в объеме $V$.*




*Выделим достаточно малый объем $V_\varepsilon$, окружающий точку $\vec{\boldsymbol{r}}$ и ограниченный поверхностью $S_\varepsilon$. Количество жидкости, выделившееся внутри $V_\varepsilon$ за счет источников, равно*

$$m_\varepsilon = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{\boldsymbol{r}})\,dV$$

*Поскольку плотность $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$ остается неизменной, то образовавшееся количество жидкости вытекает во внешность через поверхность $S_\varepsilon$*

$$m_\varepsilon = \oiint\limits_{S_\varepsilon} \left( \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}),\, d\vec{\boldsymbol{S}} \right)$$

*Таким образом,*

$$\oiint\limits_{S_\varepsilon} \left( \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}),\, d\vec{\boldsymbol{S}} \right) = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{\boldsymbol{r}})\,dV$$

*Применяя формулу Гаусса-Остроградского, получим*

$$\iiint\limits_{V_\varepsilon} \operatorname{div}\left( \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}) \right) dV = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{\boldsymbol{r}})\,dV$$

*В силу произвольности объема $V_\varepsilon$, приходим к равенству подынтегральных выражений*

$$\boxed{\operatorname{div}\left( \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}}) \right) = f(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

*называемом* ***стационарным уравнением неразрывности.***

*Полученное уравнение особенно отчетливо вскрывает*
***физический смысл дивергенции – плотность источников векторного поля.***

***Замечание.*** *Аналогично можно рассмотреть установившееся движение с плотностью $q(\vec{\boldsymbol{r}})$ и скоростью $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ зарядов, т.е. стационарный электрический ток с плотностью*

$$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = q(\vec{\boldsymbol{r}})\,\vec{v}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

*Физический* ***закон сохранения зарядов****, формулируемый в том смысле, что заряды могут лишь перемещаться в пространстве, но не могут ни возникать, ни исчезать ( $f(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$ ), приобретает дифференциальную форму*

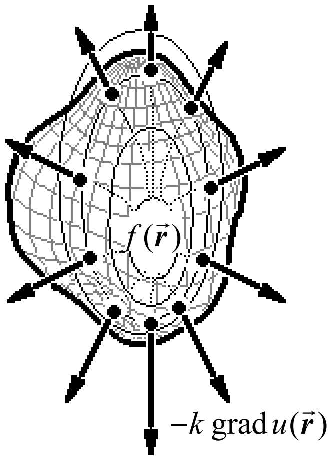
$$\boxed{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0}$$

*Если стационарный ток циркулирует в объеме $V$, то на границе $S_V$, очевидно, ток скользит вдоль поверхности: $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \perp \vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\vec{\boldsymbol{r}} \in S_V$. Итак,*

$$\left( \nabla, \vec{\boldsymbol{j}} \right)\Big|_V = \left( \vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{j}} \right)\Big|_{S_V} = 0$$

### *3.4° Лапласиан (стационарное распределение тепла)*

*Пусть в объеме $V$ циркулируют стационарные потоки тепла, характеризуемые установившимся распределением постоянной температуры $u(\vec{\boldsymbol r})$ (в каждой точке своей). Предположим, что имеются внутренние источники тепла интенсивности $f(\vec{\boldsymbol r})$ (количество тепла, выделяемое в точке $\vec{\boldsymbol r}$ за единицу времени). Найти уравнение, описывающее распределение температуры $u(\vec{\boldsymbol r})$ в объеме $V$.*




*Выделим достаточно малый объем $V_\varepsilon$, окружающий точку $\vec{\boldsymbol r}$ и ограниченный поверхностью $S_\varepsilon$. Количество тепла, выделившееся внутри $V_\varepsilon$ за счет тепловых источников, равно*

$$Q_\varepsilon = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{\boldsymbol r})\,dV$$

*Поскольку температура $u(\vec{\boldsymbol r})$ остается неизменной, то образовавшееся количество тепла вытекает во внешность через поверхность $S_\varepsilon$.*

*Для его нахождения вспомним очевидный физический факт: в неравномерно нагретом теле поток тепла распространяется из мест с более высокой температурой в места с более низкой, причем тем интенсивней, чем больше перепад температур. Перепад температур в данной точке $\vec{\boldsymbol r}$ в заданном направлении $\vec{\boldsymbol n}$ - это производная $u'_{\vec{\boldsymbol n}}(\vec{\boldsymbol r})$ в точке $\vec{\boldsymbol r}$ по направлению $\vec{\boldsymbol n}$. Естественно предположить, что количество тепла, протекающее через ориентированную площадку $d\vec{\boldsymbol S} = \vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})\,dS$ пропорционально перепаду температур $u'_{\vec{\boldsymbol n}}(\vec{\boldsymbol r})$ (закон Фурье) и, разумеется, величине площади $dS$*

$$dQ = -\,k\cdot u'_{\vec{\boldsymbol n}}(\vec{\boldsymbol r})\cdot dS = -\,k\left(\mathrm{grad}\,u(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})\right)dS = -\,k\left(\mathrm{grad}\,u(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S}\right)$$

*где $k$ - коэффициент теплопроводности, который в случае изотропной однородной среды является $k = const$. Следовательно, количество тепла, вытекающее через поверхность $S_\varepsilon$ во внешность пропорционально* ***потоку градиента*** *поля температур*

$$Q_\varepsilon = \oiint\limits_{S_\varepsilon} dQ = -\,k \oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\mathrm{grad}\,u(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S}\right)$$

*Таким образом,*

$$-\,k \oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\mathrm{grad}\,u(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S}\right) = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{\boldsymbol r})\,dV$$

*Применяя формулу Гаусса-Остроградского (“о лапласиане”), получим*

$$-\,k \iiint\limits_{V_\varepsilon} \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u(\vec{\boldsymbol r})\,dV = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{\boldsymbol r})\,dV$$

*В силу произвольности объема $V_\varepsilon$, приходим к равенству подынтегральных выражений*

$$\boxed{-\,k\,\Delta\,u(\vec{\boldsymbol r}) = f(\vec{\boldsymbol r})}$$

*называемом* ***стационарным уравнением распределение тепла***.

***Замечание.*** *Стационарные уравнения распределения тепла называются*

- *неоднородное -* $\Delta u(\vec{r}) = f(\vec{r})$ *уравнением* ***Пуассона***
- *однородное -* $\Delta u(\vec{r}) = 0$ *уравнением* ***Лапласа***

***Замечание.*** *Конкретное распределение температуры* $u(\vec{r})$ *внутри тела* $V$, *очевидно, зависит не только от интенсивности внутренних источников* $f(\vec{r})$, *но и от температурного режима на границе* $S_V$. *Типичными являются*

- *задача* ***Дирихле*** $u(\vec{r})\Big|_{\vec{r} \in S_V} = g(\vec{r})$

  *когда в каждой точке границы поддерживается заданная температура*

- *задача* ***Неймана*** $u'_{\vec{n}}(\vec{r})\Big|_{\vec{r} \in S_V} = g(\vec{r})$

  *когда в каждой точке границы задан тепловой поток*

*В случае задачи* ***Дирихле*** *интенсивность источников тепла* $f(\vec{r})$ *и поддерживаемая на границе температура* $g(\vec{r})$ *не связаны друг с другом (произвольны). При этом решение уравнения Пуассона (в частности, Лапласа), как это следует из физических соображений, очевидно (?!), единственное.*

*В случае задачи* ***Неймана****, естественно, что должно выполняться требование: сколько тепла выделяется внутри объема* $V$, *столько же его вытекает во внешнее пространство, так что между интенсивностью источников тепла* $f(\vec{r})$ *и величиной потока* $g(\vec{r})$ *через границу должен быть сохранен баланс*

$$\oiint\limits_{S_V} g(\vec{r})\,dS = \iiint\limits_V f(\vec{r})\,dV$$

*При этом решение уравнения Пуассона (в частности, Лапласа) не единственно, а определяется с точностью до* $const$. *Действительно, если* $u_1(\vec{r})$, $u_2(\vec{r})$ *два решения, то разность* $u(\vec{r}) = u_1(\vec{r}) - u_2(\vec{r})$ *есть решение однородной задачи Неймана*

$$\left[\begin{array}{l} \Delta u(\vec{r}) = 0 \\ u'_{\vec{n}}(\vec{r})\Big|_{\vec{r} \in S_V} = 0 \end{array}\right.$$

*т.е. представляет собой распределение температуры* $u(\vec{r})$ *внутри теплоизолированного с "боков" тела и лишенного внутренних источников тепла, так что из физических соображений, очевидно (?!),*

$$u(\vec{r}) = const$$

***Замечание****. Из первой формулы Грина при* $f(\vec{r}) = g(\vec{r}) = u(\vec{r})$ *вытекает*

$$\oiint\limits_{S_+} u(\vec{r})\, \underset{0}{\underset{\parallel}{u'_{\vec{n}}(\vec{r})}}\, dS = \iiint\limits_{V_S} u(\vec{r})\, \underset{0}{\underset{\parallel}{\Delta u(\vec{r})}}\, dV + \iiint\limits_{V_S} \left|\nabla u(\vec{r})\right|^2 dV \quad \Rightarrow \quad \iiint\limits_{V_S} \left|\nabla u(\vec{r})\right|^2 dV = 0$$

$$\left|\nabla u(\vec{r})\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad u(\vec{r}) = const$$