ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIV 1956

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ХАРЬКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Л. Я. Гиршвальд

1. В истории Харьковского университета мы впервые встречаемся с темой, посвященной теории вероятностей, в выступлении профессора Харьковского университета Андрея Федоровича Павловского. Пользуясь традицией, установившейся в этом университете, произносить на годичных актах речи, посвященные успехам в какой-либо научной области, А. Ф. Павловский на торжественном собрании университета 30-го августа 1821 года выступил с речью «О вероятности». В том же году речь была издана [1]. Имея в виду аудиторию, состоящую из студентов и представителей образованного общества, автор в популярной форме разъясняет основные понятия теории и указывает на возможные ее применения в естественных науках (при обосновании теории ошибок измерения) и в науках социальных. Устойчивость частот таких явлений, как рождаемость и смертность находят себе надежное обоснование в теории вероятностей. В речи приведены интересные сведения о смертности населения, в частности, приводятся данные, позволяющие считать, что широкое применение открытой в 1798 г. Эдуардом Дженнером противооспенной прививки, сократив детскую смертность, увеличило среднюю продолжительность жизни приблизительно на три года.

Отрадно отметить, что несмотря на суровую реакцию и господство ханжеского благочестия во второй половине царствования Александра I, А. Ф. Павловский не делает, подобно Буняковскому, уступок церковникам, выделяя класс событий (так называемые «чудеса»), сомневаться в которых было бы преступно. «Выкладки также показывают, — говорит он, — что, ежели происшествие само по себе невероятно, то число свидетелей не может увеличить его вероятность, а особливо ежели оно не согласно с законами природы».

В этих словах сказывается прогрессивный дух материализма, воспитанный в авторе, повидимому, его учителем, первым профессором математики в Харьковском университете — Тимофеем Федоровичем Осиповским.

Сочинение Павловского, явившееся чуть ли не первой работой на русском языке по теории вероятностей, долго оставалось единственным в этой области среди работ, опубликованных профессорами Харьковского университета. Это объясняется прежде всего общим упадком научной работы в эпоху царствования Александра I и, особенно, Николая I. Мы долго не встречаем теории вероятностей в учебных планах университета, в качестве предмета преподавания.

2. Политическая реакция первой половины XIX в. вызвала большой застой в научной жизни университетов России. Но отмена кре-

постного права в середине XIX в., развитие новых, капиталистических отношений, пробуждение национального самосознания, революционно-демократическое движение в русской общественной жизни — все это внесло значительное оживление во все стороны духовной культуры России. На научной деятельности университетов благотворно сказался университетский устав 1863 г., в котором отразились эти сдвиги.

Эти годы отмечены блестящей научной деятельностью П. Л. Чебышева. В области теории вероятности два его мемуара «О средних величинах» (1867 г.) и «О двух теоремах относительно вероятностей» (1887 г.) определили пути ее развития на много лет вперед. Работы Чебышева нашли живой отклик и в трудах харьковских математиков. Так, в 1888 г., в СХМО появилась статья профессора Харьковского университета В. Г. Имшенецкого [1], в которой он дает элементарное доказательство теоремы Пауссона, основанное на непосредственном применении классической леммы Чебышева.

С 1887 г. в Харьковском университете стала читаться теория вероятностей. Долгое время с тех пор этот курс вел ученик П. Л. Чебышева по Петербургскому университету проф. Матвей Александрович Тихомандрицкий (1844—1921), работавший в Харьковском университете 20 лет (1883—1903). В 1898 г. он выпустил курс теории вероятностей [1]. Как говорит в предисловии сам автор, при выработке этого курса он пользовался больше всего собственными записками, составленными по лекциям акад. П. Л. Чебышева, которого он имел счастье слушать в весеннем семестре 1865 года, и его мемуарами, а затем уже и другими русскими и иностранными сочинениями и мемуарами по этому предмету, знакомство с которыми дало возможность еще более оценить этот курс Чебышева. Содержание курса Тихомандрицкого вполне доступно и носит на себе яркую печать влияния Чебышева. Тихомандрицкий широко использует неравенство Чебышева, применяя его к доказательству теоремы Бернулли, теоремы Пуассона (следуя В. Г. Имшенецкому), теоремы Чебышева и обратной теоремы Бернулли. Интересно отметить, что приводя обоснование способа наименьших квадратов, он исходит не из принципа максимальной апостериорной вероятности среднего арифметического, как это обычно делали вслед за Гауссом, а исходя из принципа наименьшей средней квадратической погрешности. Эту точку зрения, берущую свое начало также от Гаусса, впоследствии широко развил А. А. Марков.

Из трудов харьковских математиков по теории вероятностей, вышедших в XIX ст., следует еще отметить работу Константина Алексеевича Андреева (1848—1921) — «Опыт теоретического исследования о законах смертности и составление таблиц смертности для России» [1]. Это сочинение, вышедшее из печати в Москве в 1871 г., где К. А. Андреев закончил университет, в 1873 г. было представлено в Харьковский университет в качестве диссертации pro venia legendi (для допущения к чтению лекций). В дальнейшем научная деятельность К. А. Андреева была посвящена проективной геометрии, и к вопросам теории вероятностей он не возвращался.

В работе о таблицах смертности К. А. Андреев применяет графический метод Ценнера и делает попытку вслед за Буняковским составить таблицу смертности для России, основываясь на более поздних данных. К. А. Андреев составляет таблицы по трем климатическим зонам. При изучении смертности ему приходилось касаться и вопросов социальных; при этом он высказывает мысль о том, что обнаруженное им уменьшение смертности в России может быть поставлено в связи с изменением социально-экономических условий, происшедших в России в 60-х годах.

3. Исключительными по своему значению для развития теории вероятностей являются две работы, выполненные А. М. Ляпуновым в период его деятельности в Харьковском университете [1, 5]. В этих работах он дал новое вполне строгое доказательство основной предельной теоремы вероятностей, за которой с тех пор упрочилось его имя[1].

В то время как Чебышев, а вслед за ним и Марков, при доказательстве теоремы о предельном законе распределения суммы случайных независимых величин пользовались методом моментов, Ляпунов в указанных двух мемуарах развил метод характеристических функций, являющихся и теперь одним из наиболее мощных средств теории вероятностей. Преимущество этого метода перед методом моментов прежде всего в том, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,dF(x)=\varphi(t)$, представляющий характеристическую функцию $\varphi(t)$ закона распределения $F(x)$, сходится, каков бы ни был закон распределения $F(x)$, в то время как существование моментов $C_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$ требует ограничения в поведении $F(x)$ на бесконечности.

Примененный Ляпуновым метод позволил ему дать безупречное доказательство предельной теоремы, на много при этом расширив рамки ее приложения. Оценки сходимости закона распределения суммы к нормальному закону оказались необычайно точны.

Обратим внимание на одну деталь доказательства — введение небольшого дополнительного слагаемого с достаточно гладким законом распределения. Это позволило Ляпунову вполне корректно провести доказательство в весьма общих предположениях. Таким же приемом впоследствии пользовались почти все математики при рассмотрении свертки произвольных законов распределения.

К теории вероятностей А. М. Ляпунов обратился в связи с тем, что ему пришлось некоторое время читать этот курс в Харьковском университете и указанные выше работы по теории вероятностей стоят особняком в его научном наследии, но именно они определили на несколько десятилетий вперед направление исследований в области теории вероятностей. Деятельность русских, а затем советских математиков упрочила за ними ведущую роль в этой отрасли науки.

4. Прямым и достойным продолжателем направления, созданного в теории вероятности Чебышевым и его непосредственными учениками Марковым и Ляпуновым, является профессор Харьковского университета, ныне действительный член АН СССР и УССР, Сергей Натанович Бернштейн (род. 1880 г.). В Харьковском университете он работал 25 лет (1908—1933). Для того чтобы дать более цельное представление о его творчестве, мы в дальнейшем коснемся его работ по теории вероятностей, выполненных им и после переезда из Харькова сначала в Ленинград, а затем в Москву. Значительную часть своей научной деятельности Бернштейн посвятил теории вероятностей, охватив в своих работах все ее отрасли. Признание за Бернштейном ведущей роли в развитии теории вероятностей в 20-х и 30-х годах сказалось в том, что ему были поручены обзорные доклады по теории вероятностей на первом Всероссийском съезде математиков в Москве в 1927 г. и на международном конгрессе в Цюрихе в 1932 г. [21, 27, 28].

---

[1] Работы эти доложены на заседаниях Харьковского математического об-ва 24/III 1900 г. и 7/V 1900 г. (см. СХМО, сер. 2, т. VII (1902), стр. 289).

В этих докладах С. Н. Бернштейн дал глубокий анализ основных проблем теории вероятностей, остановившись особо в первом из них на вопросах логического обоснования этой дисциплины, которым посвящена одна из его первых работ в этой области [4]. До него не делалось сколько-нибудь серьезных попыток в этом направлении. Между тем успехи естествознания требовали все более и более широкого применения статистического метода, и поэтому встает все более и более остро вопрос о надежности этих методов, о том, можно ли пользоваться теорией вероятностей, как точным объективным познавательным методом. Поэтому прежде всего надо быть уверенным, что теория вероятностей свободна от внутренних противоречий, т. е. ее основания должны быть аксиоматически построены [28] (стр. 6).

Такое аксиоматическое построение и дал впервые С. Н. Бернштейн. К сожалению, в силу обстоятельств времени эта работа прошла мало замеченной. Более широкое признание получила аксиоматика, данная в 1933 г. А. Н. Колмогоровым[1], сводящая понятие вероятностей к понятию меры.

Существенным отличием аксиоматики С. Н. Бернштейна является то, что он не постулирует ни существования элементарных событий, ни существования события, представляющего собой соединение (сумму) счетного множества частных случаев. Этой ценой удается сохранить справедливость утверждения, что из равенства вероятностей случайного события нулю следует категорическая его невозможность, в то время как в аксиоматике Колмогорова этого может и не быть, подобно тому, как мера множества может равняться нулю не только в случае пустого множества.

Вообще С. Н. Бернштейн во всем построении теории вероятностей явно предпочитает финитные схемы, прибегая к непрерывным схемам лишь в случае, когда они служат для асимптотического представления дискретных схем; при этом он всякий раз не уклоняется от оценок приближения.

С. Н. Бернштейн энергично противится и тенденциям, воспринятым от английских статистиков — смешивать априорные вероятности, устанавливаемые изучением схемы, при которой реализуется случайное явление, с эмпирически наблюдаемой частотой явления, — хотя бы эти тенденции и облекались в сложные аксиоматические построения, как это делает Р. Мизес. Остроумный пример, обнаруживающий невозможность вскрыть физическую схему, определяющую вероятность события, пользуясь лишь результатами многократно повторенного опыта, дает одна из задач в курсе С. Н. Бернштейна [53] (стр. 292, задача 7).

5. Перейдем к конкретным вопросам теории вероятностей, которыми занимался С. Н. Бернштейн.

В области закона больших чисел ему удалось значительно уточнить классическое неравенство Чебышева [13, 53]. Эта же уточненная оценка была им распространена [53] и на случай неравенства, которое положил А. Н. Колмогоров в основу вывода так называемого усиленного закона больших чисел.

Для применимости закона больших чисел к среднему арифметическому случайных величин оказалось достаточной равномерная, относительно номера величины, сходимость их центров распределения без предположения существования моментов более высокого порядка [53].

Это обобщение было достигнуто применением приема Маркова, при

[1] А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ, «Математика в монографиях», сер. обзоров, II (1936).

котором неограниченные случайные величины заменяются ограниченными, усеченными величинами, в известном смысле эквивалентными прежним.

Этот же элементарный прием позволил С. Н. Бернштейну значительно обобщить и основную предельную теорему Ляпунова, отказавшись от предположения сходимости моментов даже 1-го порядка [19, 51]. Условия, при которых таким образом была доказана сходимость закона распределения суммы случайных величин к нормальному закону, оказались не только достаточными, а в известном смысле необходимыми. (Это показал в 1935 г. В. Феллер)[1].

Мемуар [19], в котором мы находим этот сам по себе интересный результат, содержит и другие, гораздо более сильные предельные теоремы. Во-первых, в нем С. Н. Бернштейн впервые подверг систематическому рассмотрению применимость основной предельной теоремы в случае зависимых величин. Во-вторых, в этой работе впервые поставлен и решен для весьма общих случаев вопрос о сходимости двумерного закона распределения к нормальному. Эти исследования играют основную роль в вопросе обоснования теории нормальной корреляции.

Фундаментальные исследования С. Н. Бернштейна нашли свое продолжение лишь много лет спустя в работах М. Лева[2] и Б. В. Гнеденко[3].

6. Что касается методов изучения связи между случайными величинами, то следует обратить внимание на прием, не раз употребляемый С. Н. Бернштейном в той же работе [19, 51].

Стохастическая связь сложнее функциональной. Поэтому С. Н. Бернштейн старается представить стохастическую связь между случайными величинами $\{\xi_n\}$ при помощи рекуррентного соотношения

$$\xi_{n+1}=f_{n+1}(\xi_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ представляют собой независимые случайные величины.

Этот же прием использован и в фундаментальной работе [34], [40], [53] (добавление VI), посвященной сравнительно недавно возникшей теории случайных процессов, играющей важную роль в физике и в технике.

Весьма общую теорию случайных процессов развил А. Н. Колмогоров[4]. Но в то время как последний допускает существование закона распределения величины, меняющейся со временем, С. Н. Бернштейн ищет условия, при которых такой закон можно рассматривать как предельный при стремлении к нулю интервала времени, по истечении которого происходит случайное изменение величины.

Разностное уравнение, связывающее случайные величины, порождает разностное уравнение для их функций распределения. Это последнее уравнение, при известных условиях, асимптотически переходит в дифференциальное уравнение параболического типа, за которым утвердилось название уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова.

Исследованию некоторых вопросов теории стохастических процессов в направлении работ С. Н. Бернштейна посвящен ряд статей Г. М. Гинзбурга [1, 2]. (Первая из них является извлечением из его кандидатской диссертации, защищенной в 1940 г. по окончании аспирантуры в Харьковском университете).

---

[1] W. Feller. Ueber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr., Bd. 40 (1935).

[2] M. Loéve. Etude asymptotique des sommes de variables aleatoires lieés. J. math. pureet appl., 24 (1945), pp. 249—318.

[3] Б. В. Гнеденко. Элементы теории функций случайных векторов. Успехи математ. наук, вып. X (1944), стр. 230—244.

[4] А. Н. Колмогоров. Аналитические методы теории вероятностей. Успехи математ. наук, вып. V (1936).

7. Участие С. Н. Бернштейна в работе советских статистических учреждений нашло отражение в тематике ряда его работ [6, 15, 16, 24, 37].

Обращаясь к вопросам обоснования статистических методов, С. Н. Бернштейн решительно выступил против методов голого эмпиризма, насаждаемых, главным образом, ведущими английскими статистиками — К. Пирсоном, Р. Фишером и др. Критике этих методов посвящен его доклад на съезде по математической статистике [47]. (Работа эта удостоена Сталинской премии).

С. Н. Бернштейн дал замечательные образцы построений широких классов кривых распределения, применение которых может быть строго обосновано весьма простой и естественной статистической схемой [17]. Кром того, продолжая исследования А. А. Маркова, С. Н. Бернштейн показал [50] как надо изменить схему, положенную К. Пирсоном в основание своих широко известных кривых, чтобы эти кривые получили свое настоящее теоретическое обоснование. В отношении этих кривых мы находим в курсе [53] (стр. 337) интересное указание, обнаруживающее еще одно заблуждение Пирсона. Вопреки его мнению, по четырем заданным моментам в с е г д а можно найти одну из кривых Пирсона с такими моментами. Полному исследованию этого вопроса посвящена работа Л. Я. Гиршвальда [1].

8. Многолетняя научно-педагогическая деятельность С. Н. Бернштейна в области теории вероятностей естественно нашла свое отражение в учебной литературе. До Октябрьской революции были дважды изданы литографским способом его университетские лекции [2]. Следует отметить, что во втором издании этих лекций помещено (повидимому впервые в учебной литературе) доказательство теоремы Ляпунова. Кроме того, в этих же лекциях мы находим доказательство обратной теоремы Лапласа, которое проведено без произвольного допущения, как это обычно делалось до того, относительно равномерности распределения априорной вероятности гипотез о возможных значениях оцениваемой вероятности события.

В 1927 г. Госиздатом был выпущен курс С. Н. Бернштейна [20]. Он быстро завоевал себе широкое признание и вскоре (в 1934 г.) потребовалось дважды переиздать его [35]. Одновременно (в 1934 г.) вышел и украинский перевод этого курса [36].

В 1941 г. в Ленинграде С. Н. Бернштейн подготовил новое, четвертое издание курса, но рукопись и матрицы набора погибли во время блокады Ленинграда.

Лишь в 1946 г. работа была восстановлена, и курс вышел из печати в значительно дополненном, по сравнению с прежними изданиями, виде [53].

Заканчивая этот обзор, нельзя не упомянуть о классических полиномах Бернштейна, при помощи которых он получил замечательно простое доказательство теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций. Оно дано [3] почти без всяких выкладок, так как основное неравенство, которое подлежало доказательству, попросту выражало теорему Бернулли, доказываемую в теории вероятностей.

Подобно этому Л. Я. Гиршвальд [2] в небольшой заметке показал, что некоторые экстремальные свойства кривых постоянной ширины могут быть обнаружены соответствующим истолкованием решения классической задачи из теории вероятностей, связанной с именем Buffon'а.

Ниже помещаем библиографию работ по теории вероятностей, которые принадлежат математикам, работавшим в Харьковском университете.

БИБЛИОГРАФИЯ

АНДРЕЕВ К. А.

1. О таблицах смертности. Опыт теоретического исследования о законах смертности и составления таблиц смертности. Университ. типогр., М., 1871.

БЕРНШТЕЙН С. Н.

1. Sur le calcul approché des probabités par la formule de Laplace. СХМО (2), т. 12 (1911), стр. 106—110.

2. Теория вероятностей (лит.). Изд. об-ва взаимопомощи студ.-математиков ун-та, Х., 1911, 1917.

3. Demonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. СХМО (2), т. 13, Х. (1912), стр. 1—2.

4. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей. СХМО (2), т. 15, Х. (1917), стр. 209—274.

5. Элементарный курс теории вероятностей. Изд. Харьк. коммерч. ин-та, Х. (1917).

6. К вопросу о математической разработке данных об урожайности. Южно-русская сельскохозяйственная газета (1918), №№ 23—24, стр. 13—15.

7. О законе больших чисел. СХМО (2), т. 16, Х. (1918), стр. 82—87.

8. О взаимоотношении между балловой оценкой и фактическим весом урожая по Харьковской губернии за 1913—1918 гг. Статистич. бюлл. ЦСУ УССР, № 4, Х. (1921).

9. *О приложении математики к биологии. «Наука на Украине», № 1 (1922)*, стр. 14—19.

10. Sur le théorème limite du calcul de probabilités. Math. Ann., Vol. 85 (1922), pp. 237—241.

11. Demonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel. Comtes rendus, Paris, vol. 177 (1923), pp. 528—531.

12. Principe de stationarité et generalisation de la loi de Mendel. Comptes rendus, Paris, vol. 177 (1923), pp. 581—584.

13. Об одном видоизменении неравенства Чебышева и о погрешности формулы Лапласа. Уч. зап. научн.-исслед. кафедр, т. 1, Х. (1924), стр. 38—49.

14. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Уч. зап. научн.-исслед. кафедр, т. 1, Х. (1924), стр. 83—115.

15. Введение к кн. Теоретические основания выборочного метода. Выдержки из 4-го англ. издания «Elements of statistics» A. Bowley, под ред. С. Н. Бернштейна, ЦСУ УССР, Х. (1924), стр. 5—9.

16. Об экономическом барометре конъюнктурного института. «Хозяйство Украины», № 4 (1925), стр. 12—22.

17. Sur les courbes de distribution des probabilités. Math. Zeitschr., vol. 24 (1925), pp. 199—211.

18. Sur les sommes de quantités dépendantes. Изв. АН СССР, сер. 6, vol. 20 (1926), pp. 1459—1478.

19. Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes. Math. Ann. vol. 97 (1926), pp. 1—59.

20. Теория вероятностей. Госиздат, М.—Л. (1927).

21. Современное состояние теории вероятностей и ее приложений. Труды Всеросс. съезда матем., М. (1927), стр. 50—63.

22. О применении одного геометрического принципа к теории корреляции. Казань. Сб. In memoriam Lobačevski, т. II (1926), стр. 137—150.

23. Fondements géométriques de la théorie de corrélations. Metron. vol. 7. Livr. 2, (1927), pp. 3—27.

24. Поняття кореляції між статистичними величинами. «Вісник статистики України», II (1928), стр. 111—113.

25. Addition à l'article «Sur les sommes des quantités dépendantes». ДАН(А), (1928), стр. 55—60.

26. Sur une propriété élémentaire du coefficient de corrélation. Зап. матем. т-ва, т. 5. Х. (1932), стр. 65—66.

27. Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires. Zürich, Verhand. Math. Kongr. vol. I (1932), pp. 288—309.

28. Современное состояние теории вероятностей. ГТТИ. М.—Л. (1933), стр. 1—41. Переизд. и перевод работ [19] и [25].

29. Sur l'équation différentielle de Fokker — Planck. Comptes rendus, Paris., vol. 196 (1933), pp. 1062—1064.

30. О зависимости между случайными величинами. Труды ноябрьской юбилейной сессии АН СССР (1933), стр. 33—62.

31. О линейных квазинепрерывных цепях Маркова, ст. I, ДАН, т. 1 (1934), стр. 1—9.
32. О рассеянии с поглощением. ДАН, т. 1 (1934), стр. 230—234.
33. О линейных квазинепрерывных цепях Маркова, ст. II, ДАН, т. 1 (1934), стр. 361—365.
34. Principes de la théorie des equations différentielles stochastiques. Труды физ.-матем. ин-та им. Стеклова, т. V (1934), стр. 95—124.
35. Теория вероятностей. Изд. 2, 3 доп., М.—Л., ГТТИ (1934).
36. Теорія ймовірностей. ДНТВУ, Х.—К. (1934).
37. О математическом ожидании простоя рабочих единиц при сложном производственном процессе. Х., «Уголь», т. 117 (1935), стр. 109—111.
38. Détermination d'une limite inférieure de la dispersion des sommes de grandours lieés en châine singulière. Матем. сб., 1 (43) (1936), стр. 29—38.
39. О некоторых видоизменениях неравенства Чебышева. ДАН, т. 17 (1937), стр. 275—278.
40. Equations différentielles stochastiques. Paris. Hermann (1938), p. 31. Act. sci. ind.
41. Несколько замечаний по поводу предельной теоремы Ляпунова. ДАН, т. 24 (1939), стр. 3—7.
42. Петербургская школа теории вероятностей, «Природа», № 8 (1939), стр. 17—22.
43. Исправление одного доказательства. ДАН, т. 25 (1939), стр. 705—707.
44. Задача об урне с добавляемыми шарами. ДАН, т. 28 (1940), стр. 5—7.
45. Новые приложения почти независимых величин. Изв. АН, сер. матем., т. 4 (1940), стр. 137—150.
46. О суммах зависимых величин, имеющих взаимно почти нулевую регрессию. ДАН, т. 32 (1941), стр. 303—307.
47. О «доверительных» вероятностях Фишера. Изв. АН, серия матем., т. 5 (1941) стр. 85—94.
48. Петербургская школа теории вероятностей. Уч. зап. ЛГУ, № 55 (1941), стр. 3—11 (то же, что № [39]).
49. Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса. Труды политехн. ин-та, т. 3, Л. (1941), стр. 3—20.
50. Возврат к вопросу о точности предельной формулы Лапласа. Изв. АН, сер. матем., т. 7 (1943), стр. 3—16.
51. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. «Успехи матем. наук», вып. 10 (1944), стр. 65—114 (перевод [17]).
52. О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей. Сб. «Научное наследие П. Л. Чебышева», ч. I. Изд. АН СССР (1945), стр. 43—67.
53. Теория вероятностей. Изд. 4 доп., М.—Л., ГТТИ (1946), стр. 556.
54. О предельной теореме теории вероятностей. Изв. научн.-исслед. ин-та матем. и мех. при Томском гос. ун-те, т. 3, вып. 1, Томск (1946), стр. 174—190.

ГИНЗБУРГ Г. М.

1. О предельных законах распределения в стохастических процессах. СХМО, 4 сер., т. 17 (1940), стр. 65—74.
2. О достаточных условиях единственности предельных распределений. ДАН, т. 30 (1941), стр. 293—295.

ГІРШВАЛЬД Л. Я.

1. Про криві Пірсона. «Вісн. Стат. Укр.», № 2 (1928).
2. Кривые постоянной ширины и задача Бюффона. Геометр. збірн. ХДУ, № 2 (1940), стр. 9.

ИМШЕНЕЦКИЙ В. Г.

1. Элементарный вывод закона больших чисел теории вероятностей. СХМО (2), 1 (1888), стр. 1—6.

ЛЯПУНОВ А. М.

1. Sur une proposition de la théorie des probabilités. Изв. АН, 5-я сер., т. XII, № 4 (1900), стр. 359—380.
2. Ответ Н. А. Некрасову. Зап. Харк. универс. (1901), № 3, стр. 51—63.
3. Sur un théorème du Calcul des probabilités. Comptes rendus, Paris, vol. CXXXII, 1901, pp. 126—128.
4. Une proposition génèrale du Calcul des probabilités. Comptes rendus, Paris, vol. CXXXII, 1901, pp. 814—815.
5. Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. Зап. АН по физ.-мат. отд., 8-я сер., т. XII, № 5 (1901), стр. 1—24.

6. Об одной теореме теории вероятностей. А. М. Ляпунов. Избранные труды. «Классики науки». Изд-во АН СССР (1948), стр. 179—218 (перевод [1]).

7. Новая форма теоремы о пределе вероятности. А. М. Ляпунов. Избранные труды. «Классики науки». Изд-во АН СССР (1948), стр. 218—250 (перевод [5]).

ПАВЛОВСКИЙ А. Ф.

1. О вероятности. Рассуждение. «Речи, произнесенные в торжественном собрании императорского Харьковского университета 30.VIII 1821 г.», Х. (1821).

ТИХОМАНДРИЦКИЙ М. А.

1. Курс теории вероятностей. Х. (1898).