УДК 519.2

Л. Б. ГОЛИНСКИЙ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ, СУММА КОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННО НОРМАЛЬНА

В работе [1] Н. А. Сапогов получил оценку устойчивости теоремы Крамера о разложении нормального вектора для произвольной размерности $n \geqslant 1$. Позднее выяснилось, что оценка из [1], относящаяся к случаю $n = 1$, является точной в смысле порядка (см. [2], [3]). В настоящей работе устанавливается, что в случае $n \geqslant 2$ оценка из [1] может быть несколько улучшена, и приводится точная в смысле порядка оценка.

Пусть $X_1 = (X_1^k)_{k=1}^n$ и $X_2 = (X_2^k)_{k=1}^n$ — независимые случайные векторы, $X = X_1 + X_2$, а Y — стандартный нормальный случайный вектор. Предположим, что вектор X близок к Y в том смысле, что

$$\rho(X, Y) = \sup_{\{I\}} |P_X(I) - P_Y(I)| = \varepsilon < 1, \tag{1}$$

где $P_X(I)$ и $P_Y(I)$ — распределения векторов X и Y, $\{I\}$ — множество всех параллелепипедов, возможно бесконечных, рёбра которых параллельны координатным осям. Введём усечения $X_j^* = (X_j^{k*})_{k=1}^n$ векторов X_j по правилу

$$X_j^{k*} = \begin{cases} X_j^k, & |X_j^k| \leqslant M; \ M = 1 + \left[2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{1/2}, \\ 0, & |X_j^k| > M; \ 1 \leqslant k \leqslant n, \ j = 1, 2. \end{cases}$$

Пусть теперь $Y_j = (Y_j^k)_{k=1}^n$ — нормальные случайные векторы с теми же первыми и вторыми моментами, что и у векторов X_j^*:

$$E(Y_j^k) = E(X_j^{k*}), \ E(Y_j^p Y_j^q) = E(X_j^{p*} X_j^{q*}), \ 1 \leqslant k, \ p, \ q \leqslant n. \tag{2}$$

Полученный в [1] результат гласит, что если выполнено (1) и медианы

$$mX_1^k = 0, \ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3}$$

то справедливы оценки

$$\rho(X_1, Y_1) \leqslant \frac{C(1)}{\sigma_1^3 \left[\ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{1/2}} \ (n = 1);$$

$$\rho(X_1, Y_1) \leqslant \frac{C(n)}{\sigma_1^3 \left[\ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{1/2}} [\ln \ln (2 + \varepsilon^{-1})]^{\frac{3}{2} n - 1} \ (n \geqslant 2),$$

где

$$\sigma_1^2 = \min_{\|t\|=1} \sigma_1^2(t),\ \sigma_1^2(t) = \sum_{k,\, j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_1^{k*},\ X_1^{j*})\, t_k t_j,\ \ t \in R^n,$$

$\| t \|^2 = \sum_{j=1}^{n} t_j^2$; $C(n)$ зависит лишь от n.

Основной результат настоящей работы:

Теорема. *При условиях (1) и (3) справедлива оценка*

$$\rho(X_1,\ Y_1) \leqslant A 5^n \sigma_1^{-3} \left[\ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{-1/2},\ \ n \geqslant 2 \tag{4}$$

A — абсолютная постоянная.

Приведенный в [2] пример показывает, что эта оценка неулучшаема в смысле порядка по ε. Будем считать в дальнейшем, что $\sigma_1 > 0$.

1. *Представление для характеристической функции* $\varphi(z,\ X_1^*)$

Пусть $X^* = X_1^* + X_2^* = (X^{k*})_{k=1}^n$. Как показано в [1],

$$\rho(X^*,\ Y) = \varepsilon_1 \leqslant 16 n\varepsilon,\ \ \rho(X_j^*,\ X_j) \leqslant 8n\varepsilon \tag{1.1}$$

Получим оценку (4) сначала для $\rho(X_1^*,\ Y_1)$.

Следующее утверждение при $n = 1$ доказано Н. А. Сапоговым (см. [4, с. 345]).

Лемма 1. *При* $\varepsilon \leqslant \exp(-8n)$ *характеристические функции* $\varphi(z,\ X^*)$ *и* $\varphi(z,\ Y)$ *векторов* X^* *и* Y *удовлетворяют неравенствам*

$$1/2 \,|\varphi(z,\ Y)| \leqslant |\varphi(z,\ X^*)| \leqslant 3/2 \,|\varphi(z,\ Y)| \tag{1.2}$$

в поликруге $D(T_1) = \{|z_j| \leqslant T_1 = (8n)^{-1} T,\ \ 1 \leqslant j \leqslant n\}$, $T = \left[\ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{1/2}$.

Доказательство. Векторы X_1^* и X^* финитны, так что их х. ф. — целые функции n переменных. Введем сглаживающую плотность $Q_r(x) = \prod_{j=1}^{n} r q(r x_j)$, $r \geqslant 1$, где $q(u)$ — стандартная «треугольная» плотность: $q(u) = 0$ при $|u| \geqslant 1$. Пусть $F^{(1)}(x)$ и $F^{(2)}(x)$ — функции распределения (ф. р.) векторов X^* и Y, $F_r^{(1)}(x)$ и $F_r^{(2)}(x)$ — «сглаженные» ф. р.

$$F_r^{(1)}(x) = \int_{R^n} F^{(1)}(x-y)\, Q_r(y)\, dy,\ \ F_r^{(2)}(x) = \int_{R^n} F^{(2)}(x-y)\, Q_r(y)\, dy$$

с плотностями $p_r^{(1)}(x)$ и $p_r^{(2)}(x)$ соответственно. Условие (1.1) влечет $|F^{(1)}(x) - F^{(2)}(x)| \leqslant \varepsilon_1$, а значит и

$$|H(x)| \leqslant \varepsilon_1,\ \ H(x) = F_r^{(1)}(x) - F_r^{(2)}(x). \tag{1.3}$$

Легко видеть, что $p_r^{(1)}(x)=0$ при $x \notin N_1 = \{|x_j| \leqslant M_1 = 2M+1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Пусть $z \in D(T_1)$. Имеем

$$\varphi(z, F_r^{(1)}) - \varphi(z, F_r^{(2)}) = \int\limits_{R^n} \exp\{i\langle z, x\rangle\}[p_r^{(1)}(x) - p_r^{(2)}(x)]\,dx =$$
$$= \int\limits_{N_1} \exp\{i\langle z, x\rangle\} \frac{\partial^n H}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(x)\,dx - \int\limits_{CN_1} \exp\{i\langle z, x\rangle\} \times$$
$$\times\, p_r^{(2)}(x)\,dx = I^{(1)} - I^{(2)};\ \langle z, x\rangle = \sum_{j=1}^n z_j x_j,\ CN_1 = R^n \setminus N_1.$$

Пусть

$$I_{p,q} = \int\limits_{\{|y_j| \leqslant M_1,\ 1 \leqslant j \leqslant p\}} \exp\left\{i \sum_{j=1}^p z_j y_j\right\} \frac{\partial^q H}{\partial y_1 \ldots \partial y_q}(y)\,dy, \quad \begin{matrix} 1 \leqslant p \leqslant n, \\ 1 \leqslant q \leqslant p. \end{matrix}$$

Интегрируя по частям и применяя индукцию, нетрудно показать, что

$$|I_{p,q}| \leqslant 2^{p+q}\varepsilon_1 \left\{\prod_{j=q+1}^p |z_j|\right\}^{-1} \exp\left\{M_1 \sum_{j=1}^p |z_j|\right\}$$

(если $p = q$, то произведение в правой части отсутствует). Поэтому

$$|I^{(1)}| = |I_{n,n}| \leqslant 4^{n+2} n\varepsilon \exp\left\{M_1 \sum_{j=1}^n |z_j|\right\}.$$

Так как $p_r^{(2)}(x) = \prod\limits_{j=1}^n l(x_j)$, $\sqrt{2\pi}\, l(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u-v)^2\right\} rq(rv)\,dv$,

то для $I^{(2)}$ справедлива оценка

$$|I^{(2)}| \leqslant \int\limits_{CN_1} \exp\left\{T_1 \sum_{j=1}^n |x_j|\right\} p_r^{(2)}(x)\,dx \leqslant n \int\limits_{|u| \geqslant M_1} \exp\{T_1|u|\} \times$$
$$\times\, l(u)\,du \cdot \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(T_1|u|)\, l(u)\,du\right\}^{n-1}.$$

Для первого сомножителя имеем

$$\sqrt{2\pi}\, n \int\limits_{|u| \geqslant M_1} \exp(T_1|u|)\, l(u)\,du = 2n \int\limits_{M_1}^{\infty} \exp(T_1 u)\,du \int\limits_{-r^{-1}}^{r^{-1}} \exp \times$$
$$\times \left\{-\frac{(u-v)^2}{2}\right\} rq(rv)\,dv = 2n \int\limits_{-r^{-1}}^{r^{-1}} rq(rv)\, e^{T_1 v}\,dv \int\limits_{M_1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + T_1 t\right\} \times$$
$$\times\, dt \leqslant 2ne^{T_1} \int\limits_{M_1-1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + T_1 t\right\} dt \leqslant$$
$$\leqslant n \exp\{-2M^2 + 2MT_1 + T_1\}.$$

Аналогично $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(T_1|v|)\, l(v)\, dv \leqslant 2\exp\left\{T_1 + \frac{1}{2} T_1^2\right\}$. Следовательно, $|I^{(2)}| \leqslant (2\pi)^{-1/2} n 2^{n-1} \exp\left\{-2M^2 + 2MT_1 + nT_1 + \frac{n-1}{2} T_1^2\right\}$. Так как при $z \in D(T_1)$ выполняется $|\varphi(z, Y)| \geqslant \exp\left\{-\frac{1}{2} nT_1^2\right\}$, а при $T_1 = \frac{T}{8n}$ и $\varepsilon \leqslant e^{-8n}$ имеем $|I^{(j)}| < \frac{1}{4} \exp\left\{-\frac{1}{2} nT_1^2\right\}$, $j = 1, 2$. то $|\varphi(z, F_r^{(1)}) - \varphi(z, F_r^{(2)})| < \frac{1}{2} |\varphi(z, Y)|$, $z \in D(T_1)$. Учитывая, что

$$\varphi(z, F_r^{(1)}) - \varphi(z, F_r^{(2)}) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\sin z_j/(2r)}{z_j/(2r)}\right)^2 \cdot \{\varphi(z, X^*) - \varphi(r, Y)\}$$

и устремляя r к бесконечности, получаем $|\varphi(z, X^*) - \varphi(z, Y)| \leqslant \leqslant \frac{1}{2} |\varphi(z, Y)|$ откуда следует (1.2). Лемма доказана.

Нам понадобится утверждение, хорошо известное в случае $n = 1$.

Лемма 2. *Пусть функция* $g(z)$ *голоморфна в поликруге* $D(R) = \{|z_j| \leqslant R_j\}$. *Если* $g(0) = 0$, *и* $\operatorname{Re} g(z) \leqslant A$, *то для тейлоровских коэффициентов* b_k

$$g(z) = \sum_{|k|=1}^{\infty} b_k z^k,\ k = (k_1 \ldots k_n),\ |k| = k_1 + \cdots + k_n,$$

$$z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$$

верна оценка $|b_k| \leqslant 2AR_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать $R_1 = \cdots = R_n = 1$. К функции $g_1(z) - A - g(z)$ применим формулу Шварца (см., например [5]):

$$g_1(z) = \int_{S^n} \operatorname{Re} g_1(w)\, H(z, w)\, dm_n(w),$$

где $S^n = \{|w_j| = 1\}$ — n-мерный тор; $m_n(w)$ — нормированная мера Лебега на S^n,

$$H(z, w) = 2 \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j \bar{w}_j)^{-1} = 1 + 2 \sum_{|k|=1}^{\infty} \bar{w}^k z^k$$

— ядро Шварца для поликруга $D(1)$. Учитывая, что $\operatorname{Re} g_1(w) \geqslant 0$ имеем

$$|b_k| = 2 \left| \int_{S^n} \operatorname{Re} g_1(w)\, \bar{w}^k\, dm_n(w) \right| \leqslant 2 \int_{S^n} \operatorname{Re} g_1(w)\, dm_n(w) = 2A,$$

что и требовалось.

Лемма 3. *В поликруге* $D(T_2)=\{|z_j|\leqslant T_2=(2n)^{-1}T_1,\ 1\leqslant\leqslant j\leqslant n\}$ *х. ф.* $\varphi(z, X_1^*)$ *допускает представление*

$$\varphi(z, X_1^*)=\exp\left\{im_1(z)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(z)+\theta(z)\right\}, \tag{1.4}$$

где $m_1(z)=\langle\mu, z\rangle$, $\mu=(\mu_1\ldots\mu_n)$, $\mu_j=E(X_j^{1*})$, *функция* $\theta(z)$ *голоморфна в* $D(T_2)$ *и*

$$|\theta(z)|\leqslant 64n^3\left[\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]^{-1/2}|z|^3,\ |z|=\sum_{j=1}^{n}|z_j|. \tag{1.5}$$

Доказательство. Из (1.2) следует, что $\varphi(z, X^*)\neq 0$, а значит и $\varphi(z, X_1^*)\neq 0$ в поликруге $D(T_1)$. Поэтому х. ф. $\varphi(z, X_1^*)$ допускает представление (1.4). Для доказательства (1.5) воспользуемся таким фактом, полученным в [1]: существует $a=a(n)$, не зависящее от ε и такое, что

$$P\{|X_j^{k*}|\leqslant a\}\geqslant 1/2,\ j=1, 2,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ \varepsilon<(16n)^{-2}. \tag{1.6}$$

Число a определяется из условия $1-\Phi(a-1)=(16n)^{-1}$, $\Phi(x)$ — стандартная одномерная нормальная ф. р.

В силу свойства «хребта» имеем

$$|\varphi(z_1, \ldots, z_n, X_1^*)|\leqslant\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X_1^*)=\frac{\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X^*)}{\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X_2^*)}$$

$$z_j=u_j+iv_j.$$

Условие (1.6) дает такую оценку снизу:

$$\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X_2^*)\geqslant\int\limits_{\{|X_j|\leqslant a,\ 1\leqslant j\leqslant n\}}\exp\{-\langle v, x\rangle\}P_{X_2^*}(dx)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\exp\left\{-a\sum_{j=1}^{n}|v_j|\right\}\geqslant\frac{\exp\{-naT_1\}}{2},$$

а из (.2) вытекает $\varphi(iv_1, \ldots, iv_n, X^*)\leqslant 3/2\exp\{1/2\sum_{j=1}^{n}v_j^2\}\leqslant\leqslant 3/2\exp\{1/2nT_1^2\}$. Поэтому $|\varphi(z, X_1^*)|\leqslant 3\exp\{1/2nT_1^2+naT_1\}$.

Применим лемму 2 к голоморфной в поликруге $D(T_1)$ функции

$$g(z)=\ln\varphi(z, X_1^*)=im_1(z)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(z)+\theta(z),\ \theta(z)=\sum_{|k|=3}^{\infty}b_kz^k.$$

Считая $\varepsilon\leqslant\exp(-10^3n^2)$, получим $\operatorname{Re}g(z)\leqslant\ln 3+naT_1+\frac{1}{2}nT_1^2<<2n^2T_1^2$ и значит $|b_m|\leqslant 4n^2T_1^{2-|m|}$, $|m|\geqslant 3$. Отсюда уже следует оценка (1.5) для функции $\theta(z)$ в меньшем поликруге $D(T_2)$:

$$|\theta(z)| = \left|\sum_{|k|=3}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_n=|k|} b_k z^k\right| \leqslant \sum_{|k|=3}^{\infty} \frac{4n^2}{T_1^{|k|-2}} |z|^{|k|} \leqslant \frac{64n^3 |z|^3}{T}.$$

2. Оценка величины $\rho(X_1, Y_1)$.

Применим вновь метод сглаживания. Пусть Z — случайный вектор, независимый от X_1^* и Y_1, распределение которого имеет плотность

$$Q(x) = Q^{(n)}(x) = \prod_{j=1}^{n} q(x_j), \quad q(t) = \frac{3T_3}{8\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{4} T_3 t\right)}{\frac{1}{4} T_3 t}\right)^4 \tag{2.1}$$

(параметр $T_3 < T_2$ выберем позднее). Заметим, что $\varphi(t, Z) = \prod_{j=1}^{n} \Psi(t_j) = 0$ при $t \notin N = \{|t_j| \leqslant T_3, \ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Пусть $X_{11}^* = X_1^* + Z$, $Y_{11} = Y_1 + Z$ — «сглаженные» векторы. Обозначим через I параллелепипед $\{a_j \leqslant x_j < a_j + h_j, \ h_j > 0, \ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ и $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Согласно формуле обращения имеем $P\{X_{11}^* \in I\} - P\{Y_{11} \in I\} = (2\pi)^{-n} \int\limits_N \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \exp(-ih_j t_j)}{it_j} \cdot \exp\{-i\langle a, t\rangle\} \varphi(t, Z) [\varphi(t, X_1^*) - \varphi(t, Y_1)]\, dt$. Учитывая равенства (2) и представление (1.4), получим

$$P\{X_{11}^* \in I\} - P\{Y_{11} \in I\} = \int\limits_N K(t) [\exp\{\theta(t)\} - 1]\, dt =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int\limits_N K(t)\, \theta^p(t)\, dt, \tag{2.2}$$

где $K(t) = (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \exp(-ih_j t_j)}{it_j} \exp\{-i\langle a, t\rangle\} \varphi(t, Z) \cdot \varphi(t, Y_1)$.

Нашей ближайшей целью является получение оценки (4) для $\rho(X_{11}^*, Y_{11})$. Для этого разложим функцию $\theta^p(t)$ в степенной ряд, подставим в (2.2) и проинтегрируем почленно. Нам понадобятся оценки таких интегралов:

$$\int\limits_N K(t)\, t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n}\, dt. \tag{2.3}$$

Пусть сначала все $k_j \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$. В этом случае нужная нам оценка получается просто:

$$\left|\int\limits_N K(t)\, t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n}\, dt\right| \leqslant \pi^{-n} \int\limits_N \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \sum_{j=1}^n t_j^2\right\} |t_1^{k_1-1} \ldots t_n^{k_n-1}|\, dt.$$

Более сложным является тот случай, когда среди показателей k_j имеются нулевые. Не нарушая общности, рассмотрим интеграл

$$J_q = \int\limits_N K(t)\, t_{q+1}^{k_{q+1}} \ldots t_n^{k_n}\, dt = (2\pi)^{-n} \int\limits_N \prod_{k=1}^n \frac{1-\exp(-ih_k t_k)}{it_k} \times$$

$$\times \Psi(t_k) \exp\left\{-i\langle a-\mu,\ t\rangle - \frac{1}{2}\sigma_1^2(t)\right\} t_{q+1}^{k_{q+1}} \ldots t_n^{k_n}\, dt,$$

$$1 \leqslant q \leqslant n-1,\ k_j \geqslant 1,\ q+1 \leqslant j \leqslant n. \qquad (2.4)$$

Квадратичную форму $\sigma_1^2(t)$ можно привести к сумме квадратов по формуле Якоби (см. [6], с. 273)

$$\sigma_1^2(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 y_j^2,\ y_j = t_j + \sum_{k=j+1}^n l_{jk} t_k,\ y_n = t_n. \qquad (2.5)$$

Поскольку квадратичная форма $\sigma_1^2(t)$ положительно определена, то $\gamma_j^2 > 0$. Проинтегрируем в (2.4) сначала по «отсутствующим» переменным:

$$J_q = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\{|t_j|<T_3\}} \prod_{j=q+1}^n \frac{1-\exp(-ih_j t_j)}{it_j} \Psi(t_j) \exp\left\{-i \sum_{j=q+1}^n \times\right.$$

$$\left.\times (a_j-\mu_j)\, t_j - \frac{1}{2} \sum_{j=q+1}^n \gamma_j^2 y_j^2\right\} t_{q+1}^{k_{q+1}} \ldots t_n^{k_n}\, dt_{q+1} \ldots$$

$$\ldots dt_n \int\limits_{\{|t_j|<T_3\}} \prod_{j=1}^q \frac{1-\exp(-ih_j t_j)}{it_j} \Psi(t_j) \times$$

$$\times \exp\left\{-i \sum_{j=1}^q (a_j-\mu_j)\, t_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \gamma_j^2 y_j^2\right\} dt_1 \ldots dt_q. \qquad (2.6)$$

Введем верхнетреугольную матрицу B и вектор $b^{(q)} \in R^q$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & l_{12} & \ldots & l_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & l_{2n} \\ \cdot & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},\ b^{(q)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_q \end{pmatrix},\quad b_p = \sum_{j=q+1}^n l_{pj} t_j,\ 1 \leqslant p \leqslant q.$$

Обозначим $t^{(q)}=(t_1, \ldots, t_q)'$, $R(t^{(q)})=\exp\{-1/2\sum_{j=1}^{q}\gamma_j^2t_j^2\}$, $H(t^{(q)})=$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}\gamma_j^2y_j^2\right\} = R(Bt^{(q)}+b^{(q)}).$$ Если

$$R(t^{(q)}) = \int_{R^q} \exp\{i\langle t^{(q)}, u\rangle\} r(u)\,du, \quad r(u) > 0,$$

то, как легко видеть,

$$H(t^{(q)}) = \int_{R^q} \exp\{i\langle t^{(q)}, u\rangle\} h(u)\,du,$$

$$h(u) = |B'|^{-1}\exp\{i\langle B^{-1}b^{(q)}, u\rangle\} r(B'^{-1}u),$$

(B'^{-1} — матрица, обратная к транспонированной), и значит

$$\int_{R^q} |h(u)|\,du \leqslant \int_{R^q} r(u)\,du = 1.$$

Внутренний интеграл J'_q в (2.6) вычисляется по формуле обращения:

$$J'_q = (2\pi)^{-q} \int_{\{|t_j|\leqslant T_3,\ 1\leqslant j\leqslant q\}} \prod_{j=1}^{q} \frac{1-\exp(-ih_jt_j)}{it_j}\exp\{-i(a_j-\mu_j)t_j\} \times$$

$$\times \left[H(t^{(q)})\prod_{j=1}^{q}\psi(t_j)\right]dt^{(q)} = \int_{I'} dx \int_{R^q} Q^{(q)}(x-v)\,h(v)\,dv,$$

$$I' = \{a_j-\mu_j \leqslant x_j < a_j-\mu_j+h_j\}, \quad Q^{(q)}(x) = \prod_{j=1}^{q} q(x_j),$$

откуда следует, что

$$|J'_q| \leqslant \int_{R^q} |h(v)|\,dv \int_{I'} Q^{(q)}(x-v)\,dx \leqslant \int_{R^q} |h(v)|\,dv \leqslant 1.$$

Для оценки внешнего интеграла в (2.6) заметим, что из (2.5) вытекает при $t = t' = (0, \ldots, 0, t_{q+1}, \ldots, t_n)$, что $\sigma_1^2(t') = \sum_{j=q+1}^{n}\gamma_j^2y_j^2 \geqslant$ $\geqslant \sigma_1^2 \sum_{j=q+1}^{n} t_j^2$. Поэтому

$$|J_q| \leqslant \pi^{q-n} \int_{\{|t_j|\leqslant T_3,\ q+1\leqslant j\leqslant n\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2\sum_{j=q+1}^{n} t_j^2\right\} \left|t_{q+1}^{k_{q+1}-1}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots t_n^{k_n-1}\right| dt_{q+1}\ldots dt_n.$$

Общая оценка интеграла вида (2.3) такова: если $1 \leqslant r_1 < \cdots < r_q \leqslant n$ и $l_j \geqslant 1$, то

$$\left| \int\limits_N K(t)\, t_{r_1}^{l_1} \ldots t_{r_q}^{l_q} dt \right| \leqslant \pi^{-q} \int\limits_{N_q} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{q} \tau_j^2\right\} \times \\ \times |\tau_1^{l_1-1} \ldots \tau_q^{l_q-1}|\, d\tau, \qquad (2.7)$$

$N_q = \{|\tau_j| \leqslant T_3,\ 1 \leqslant j \leqslant q\}$. Как видно, оценка зависит лишь от числа q множителей t_{r_j}, а не от их выбора.

Разложение $\theta^p(z) = \sum\limits_{|k|=3p}^{\infty} b_k^{(p)} z^k$ запишем в виде

$$\theta^p(t) = \sum_{\substack{1 \leqslant r_1 < \cdots < r_q \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant n}} \ \sum_{|j|=\max(3p,\, q)} \ \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_q=|j| \\ j_m \geqslant 1}} b_j^{(p)} z^j. \qquad (2.8)$$

Обозначим для краткости внутреннюю сумму в (2.8) через $\sum'$, среднюю — $\sum''$. Подставим это выражение в (2.2). Поскольку число слагаемых во внешней сумме в (2.8) конечно (и равно $2^n - 1$), то достаточно произвести оценку части получающегося ряда, отвечающего фиксированному набору $\{r_1, \ldots, r_q\}$. В силу абсолютной и равномерной сходимости ряда (2.8) порядки суммирования и интегрирования можно менять.

Иными словами, достаточно оценить выражение

$$U(r_1, \ldots, r_q) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum{}' \sum{}'' b_j^{(p)} \int\limits_N K(t)\, t_{r_1}^{j_1} \ldots t_{r_q}^{j_q} dt.$$

Согласно (2.7)

$$\left| \sum{}' b_j^{(p)} \int\limits_N K(t)\, t_{r_1}^{j_1} \ldots t_{r_q}^{j_q} dt \right| \leqslant \pi^{-q} \sum{}' |b_j^{(p)}| \int\limits_{N_q} \exp \times \\ \times \left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2\right\} |\tau_1^{j_1-1} \ldots \tau_q^{j_q-1}|\, d\tau.$$

Соотношение (1.5) и неравенство Коши дают такую оценку для коэффициентов $b_j^{(p)} : |b_j^{(p)}| \leqslant n^{2p} (2n)^{|j|} T_1^{2p-|j|}$. Поэтому

$$\left| \sum{}' b_j^{(p)} \int\limits_N K(t)\, t_{r_1}^{j_1} \ldots t_{r_q}^{j_q} dt \right| \leqslant \pi^{-q} \frac{n^{2p} (2n)^{|j|}}{T_1^{|j|-2p}} \int\limits_{N_q} \exp \times \\ \times \left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2\right\} |\tau|^{|j|-q}\, d\tau$$

и

$$|U(r_1 \ldots r_q)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{n^{2p} (2n)^{3p}}{T_1^p} \int\limits_{N_q} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2\right\} \sum{}'' \times \\ \times \left(\frac{2n}{T_1}\right)^{|j|-3p} |\tau|^{|j|-q}\, d\tau = V_q. \qquad (2.9)$$

Пусть сначала $q > 3$ и натуральное p_1 таково, что $3p_1 < q \leqslant 3 \times \times (p_1+1)$. Очевидно $p_1 < \frac{1}{3} n$. В этом случае внешняя сумма в (2.9) разбивается на две:

$$V_q = \{\sum_{p=1}^{p_1} + \sum_{p=p_1+1}^{\infty}\} = V_q' + V_q''.$$

Если $1 \leqslant p \leqslant p_1$, то $q > 3p$, и так как $T_1 > 1$ при условии $\varepsilon \leqslant \leqslant \exp(-10^3 n^2)$, то

$$\sum_{p=1}^{p_1} \frac{1}{p!} \frac{n^{2p}(2n)^{3p}}{T_1^p} \sum_{|j|=q}^{\infty} \left(\frac{2n}{T_1}\right)^{|j|-3p} |\tau|^{|j|-q} \leqslant \frac{n}{3} \cdot \frac{(2n)^{q+2p_1}}{T_1^{q-2p_1}} \sum_{m=q}^{\infty} \left(\frac{2n\,|\tau|}{T_1}\right)^{m-q}.$$

Выберем параметр T_3 так, чтобы $4n^2 T_3 < T_1$. Тогда получим

$$V_q' \leqslant \frac{(2n)^{2q}}{T_1^{q-2p_1}} \int_{R^q} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2\right\} d\tau. \tag{2.10}$$

Если же $p > p_1$, то $3p \geqslant q$, и значит

$$\sum_{p=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{n^{2p}(2n)^{3p}}{T_1^p} \sum_{|j|=3p}^{\infty} \left(\frac{2n}{T_1}\right)^{|j|-3p} |\tau|^{|j|-q} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{8n^5}{T_1}\right)^{p_1+1} |\tau|^{3(p_1+1)-q} \exp\left(\frac{8n^5\,|\tau|^3}{T_1}\right),$$

так что

$$V_q'' \leqslant 2\left(\frac{8n^5}{T_1}\right)^{p_1+1} \int_{N_q} |\tau|^{3(p_1+1)-q} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2 + \frac{8n^5\,|\tau|^3}{T_1}\right\} \tau\,. \tag{2.11}$$

Легко видеть, что эта же оценка ($cp_1 = 0$) имеет место при $q \leqslant 3$. Выберем теперь T_3, полагая

$$T_3 = (16n^8)^{-1} T_1 \sigma_1^2. \tag{2.12}$$

Непосредственно проверяется, что при таком выборе T_3 и $\tau \in N_q$

$$-\frac{1}{2}\sigma_1^2 \|\tau\|^2 + \frac{8n^5}{T_1} |\tau|^3 \leqslant -\frac{1}{4}\sigma_1^2 \|\tau\|^2. \tag{2.13}$$

В [1] доказано, что $\sigma_1^2 \leqslant 16M^2\varepsilon_1 + 1 \leqslant (16M)^2 n\varepsilon + 1$, так что во всяком случае $\sigma_1^2 < 2$ при $\varepsilon \leqslant \exp(-10^3 n^2)$. Условие $4n^2 T_3 < T_1$ поэтому выполняется. Из (2.10) и (2.11) теперь следует, что при $q > 3$

$$V_q \leqslant \frac{(4\sqrt{2\pi}n^2)^q}{(T_1\sigma_1^3)^{q/3}} \left(\frac{1}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}q-2p_1} + 2\left(\frac{8n^5}{T_1}\right)^{p_1+1} \int_{R^q} \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\|\tau\|\right)^{3(p_1+1)-q} \exp \times$$

$$\times \left\{-\frac{1}{4}\sigma_1^2 \|\tau\|^2\right\} d\tau.$$

В силу выбора $p_1 2q/3 - 2p_1 > 0$, и, значит,

$$V_q \leqslant \left(\frac{C_1 n^6}{T_1 \sigma_1^3}\right)^{q/3} + \left(\frac{C_2 n^6}{T_1 \sigma_1^3}\right)^{p_1+1}. \tag{2.14}$$

Далее через C_j, $j = 1, 2, \ldots$ обозначаются абсолютные постоянные. Если $q \leqslant 3$, то оценка еще проще: $V_q \leqslant C_3 n^6 (T_1 \sigma_1^3)^{-1}$.

Предположим, что $T_1 \sigma_1^3 > C_4 n^6$, $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$ (это предположение не нарушает общности, ибо в противном случае справедливость неравенства (4) достигается подходящим выбором постоянной A). Тогда поскольку в (2.14) $q/3 > 1$ и $p_1 + 1 > 1$, то при всех $q \geqslant 1$ имеем $V_q \leqslant C_4 n^6 (T_1 \sigma_1^3)^{-1}$. Таким образом, получена такая оценка:

$$\rho(X_{11}^*, Y_{11}) \leqslant C_4 n^6 2^n (T_1 \sigma_1^3)^{-1}. \tag{2.15}$$

Воспользуемся неравенством «сглаживания», доказанным в [7, 8]: пусть $F(x)$ и $G(x)$ — ф. р. в R^n, $H(x)$ — ф. р. с плотностью $Q(x)$ (2.1) и $F_1(x) = (F * H)(x)$, $G_1(x) = (G * H)(x)$. Тогда

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant 2 \sup_x |F_1(x) - G_1(x)| + C_5 n^{1/3} \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{T_3};$$

$$A_i = \sup_{\substack{x \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}. \tag{2.16}$$

Применим это неравенство при $F(x) = F_{X_1^*}(x)$, $G(x) = F_{Y_1}(x)$. В наших обозначениях $F_1(x) = F_{X_{11}^*}(x)$, $G_1(x) = F_{Y_{11}}(x)$ и первое слагаемое в правой части (2.16) оценено в (2.15). Для оценки второго слагаемого используем следующее простое утверждение.

Лемма 4. *Пусть Φ — невырожденное нормальное распределение в R^n с ф. р. $G(x)$ и ковариационной матрицей S. Тогда*

$$\sup_x \frac{\partial G(x)}{\partial x_j} \leqslant (\sqrt{2\pi}\varkappa)^{-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2.17}$$

где $\varkappa^2$ — наименьшее собственное значение матрицы S.

Доказательство. Распределение Φ имеет плотность $p(x)$, причем

$$p(x + \mu) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |S|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle S^{-1}x, x\rangle\right\};$$

$$\mu = (\mu_1 \ldots \mu_n), \quad \mu_j = \int_{R^n} x_j \Phi(dx).$$

Применим снова формулу Якоби, согласно которой

$$\langle S^{-1}x,\ x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 y_k^2;\ y_m = x_m + \sum_{j=m+1}^{n} d_{mj}x_j,\ y_n = x_n,$$

$$\delta_m^2 = \frac{|S_m^{(-1)}|}{|S_{m-1}^{(-1)}|},\ |S_0^{(-1)}| = 1,\ 1 \leqslant m \leqslant n, \qquad (2.18)$$

где $|S_m^{(-1)}|$ — главный минор m-го порядка матрицы S^{-1}. Поэтому

$$A_n = \sup_x \frac{\partial G(x)}{\partial x_n} \leqslant \sup_{u_n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} p(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)\, du_1 \ldots du_{n-1} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |S|^{-1/2} \sup_{u_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_n^2 u_n^2\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_{n-1}^2 (u_{n-1} +\right.$$

$$\left. + d_{n-1,\,n}u_n)^2\right\} du_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_{n-2}^2 (u_{n-2} + d_{n-2,\,n-1}u_{n-1} +\right.$$

$$\left. + d_{n-2,\,n}u_n)^2\right\} du_{n-2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_1^2 \left(u_1 + \sum_{j=2}^{n} d_{1j}u_j\right)^2\right\} du_1 \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-1/2} |S|^{-1/2} (\delta_1 \ldots \delta_{n-1})^{-1}.$$

В силу (2.18) $(\delta_1 \ldots \delta_n)^2 = |S^{-1}| = |S|^{-1}$ так, что $A_n \leqslant (2\pi)^{-1/2}\delta_n$. Поскольку $\delta_n^2 x_n^2 \leqslant \langle S^{-1}x,\ x\rangle \leqslant \varkappa^{-2}\|x\|^2$, то, полагая $x = (0, \ldots, 0, x_n)$ получим $\delta_n \leqslant \varkappa^{-1}$, откуда и следует (2.17) с $j = n$. Для остальных j рассуждение аналогично.

Учитывая (2.17), получаем из (2.16) $\sup_x |F_{X_1^*}(x) - F_{Y_1}(x)| \leqslant \leqslant (C_4 n^6 2^{n+1} + C_6 n^{10})(T_1\sigma_1^3)^{-1}$ и окончательно $\rho(X_1^*,\ Y_1) \leqslant \leqslant 2^n \sup_x |F_{X_1^*}(x) - F_{Y_1}(x)| \leqslant C_7 5^n (T\sigma_1^3)^{-1}$, откуда $\rho(X_1,\ Y_1) \leqslant \leqslant \rho(X_1^*,\ Y_1) + \rho(X_1,\ X_1^*) < A \cdot 5^n (T\sigma_1^3)^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Предположение $\varepsilon \leqslant \exp(-10^3 n^2)$, используемое выше, не нарушает общности. Действительно, если $\varepsilon > \exp(-10^3 n^2)$, то $T_1 < C_8$, $\sigma_1^2 \leqslant (16M)^2 n\varepsilon + 1 < C_9 n$, и неравенство (4) выполнено при подходящем выборе постоянной A.

Замечание 2. Вместо стандартного нормального случайного вектора Y можно рассматривать невырожденный нормальный случайный вектор $Y_0 = (Y_0^k)_{k=1}^n$ нормированный и центрированный:

$$E(Y_0^k) = 0,\ D^2(Y_0^k) = 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

В этом случае константа A в (4) зависит от

$$\sigma^2 = \min_{\|t\|=1} \sigma^2(t),\ \sigma^2(t) = \sum_{k,\ j=1}^{n} \operatorname{cov}(Y_0^k,\ Y_0^j)\, t_k t_j.$$

Список литературы: 1. *Сапогов Н. А.* О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределенных приближенно нормально. — Вестн. ЛГУ, 1959,

№ 19, с. 78—105. 2. *Малошевский С. Г.* Неулучшаемость результата Н. А. Сапогова в проблеме устойчивости теоремы Г. Крамера. — Теория вероятностей и ее применение, 1968, **13**, № 3, с. 522—525. 3. *Чистяков Г. П.* О точных оценках устойчивости разложения нормального закона и закона Пуассона.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1975, вып. 26, с. 119—128. 4. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложение случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.—480 с. 5. *Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.* Голоморфные функции многих комплексных переменных с неотрицательной действительной частью.— Мат. сб., 1976, **99**(141), № 3 (11), с. 342—355. 6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.—57 с. 7. *Садикова С. М.* Двумерные аналоги неравенства Эссеена с применением к центральной предельной теореме.— Теория вероятностей и ее применение, 1966, **11**, № 3, с. 369—380. 8. *Гамкрелидзе Н. Г.* Неравенство Эссеена для многомерной функции распределения. — Теория вероятностей и ее применение, 1977, **22**, № 4, с. 897—900.

Поступила в редколлегию 30.01.85.