О ДВИЖЕНІИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ,

заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями.

Н. Е. Жуковскаго.

---

§ 1. Въ нашей замѣткѣ «О гидродинамической теоріи тренія хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ»[1] мы указали, что движеніе жидкости съ треніемъ между двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями не можетъ объяснить гидродинамическій напоръ, который необходимъ для уравновѣшиванія силы давленія шипа на подшипникъ, и замѣтили, что подобный напоръ можно бы ожидать при движеніи вязкой жидкости между двумя эксцентрическими поверхностями круглыхъ цилиндровъ.

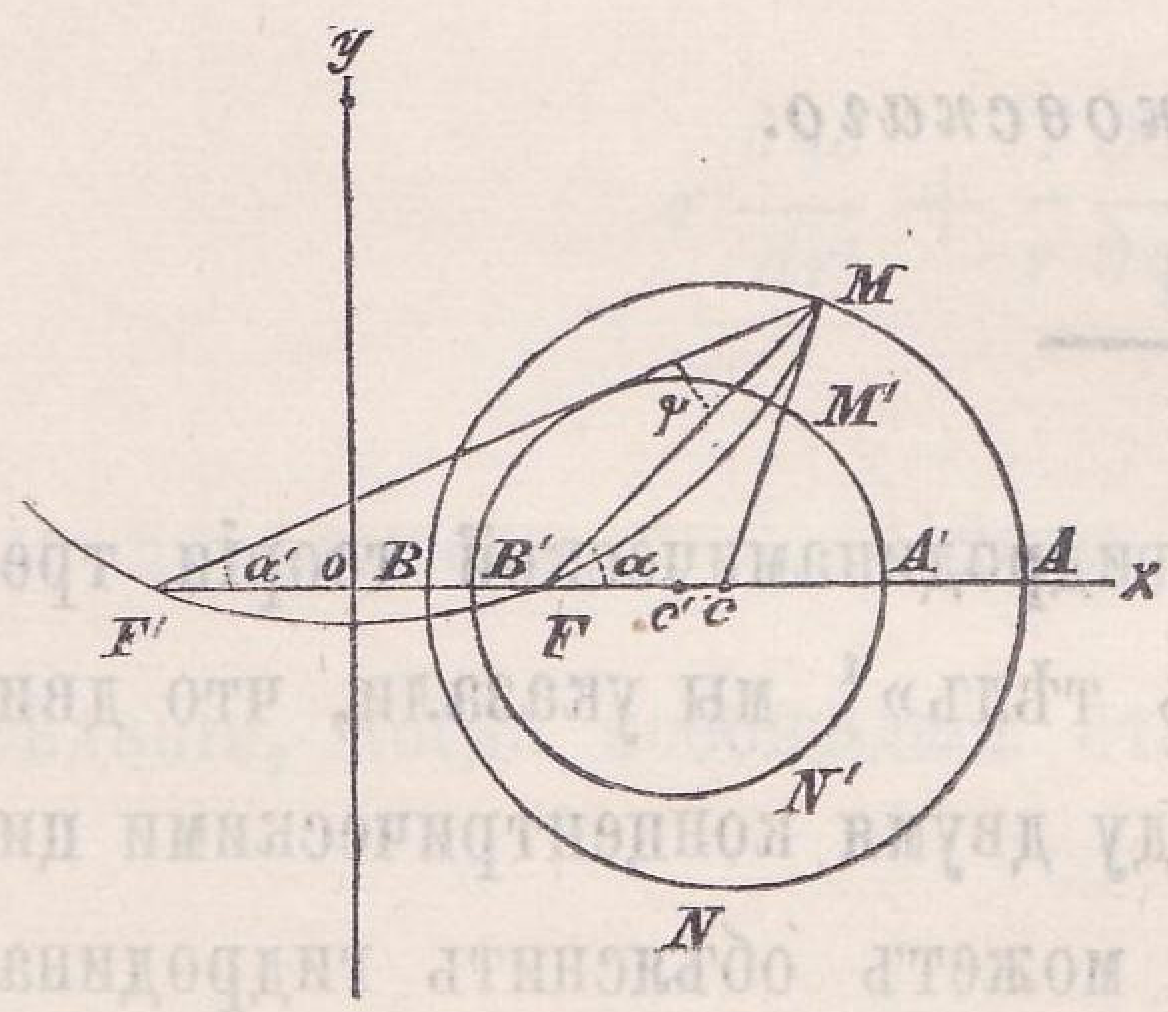
Намъ удалось теперь найти рѣшеніе задачи о движеніи весьма вязкой жидкости, заключенной между поверхностями двухъ эксцентрическихъ круглыхъ цилиндровъ, вращающихся около своихъ осей, не стѣсняя ее малою разностью радіусовъ цилиндровъ, причемъ оказалось, что при такомъ движеніи дѣйствительно является сила дѣйствія жидкости на внутренній цилиндръ, направленная перпендикулярно плоскости, проходящей чрезъ оси цилиндровъ.

---

[1] Журналъ Русскаго физико-химическаго общества, Т. XVIII, стр. 209.

Но, къ сожалѣнію, найденный нами интегралъ еще не представляетъ полнаго рѣшенія вопроса, такъ какъ въ немъ устанавливается нѣкоторая связь между скоростями вращенія цилиндровъ. Вслѣдствіе этого мы рѣшаемъ задачу профессора Петрова только въ предположеніи, что шипъ и подшипникъ вращаются съ равными скоростями въ противоположныя стороны. Кромѣ того мы прилагаемъ наше рѣшеніе еще къ одному частному случаю, интересному съ теоретической стороны.

Начинаемъ изложеніе съ напоминанія теоріи Неймановыхъ координатъ, которая легла въ основаніе нашей работы.



§ 2. Отложивъ на оси OX прямоугольныхъ Декартовыхъ координатъ точки F и F' (фиг. 1) на разстояніяхъ $+a$ и $-a$ отъ начала координатъ, выразимъ параметры ϑ и φ разсматриваемой изотермической системы криволинейныхъ координатъ съ помощію положенія:

$$-\vartheta+\varphi i=\lg\frac{x-a+yi}{x+a+yi}. \qquad (2)$$

Если r и r' суть разстоянія точки плоскости M отъ F и F', а α и α'—углы, образуемые этими радіусами съ осью OX, то

$$x-a=r\,\mathrm{cs}\,\alpha,\ y=r\,\mathrm{sn}\,\alpha,\ x+a=r'\,\mathrm{cs}\,\alpha',\ y=r'\,\mathrm{sn}\,\alpha',$$

такъ что

$$-\vartheta+\varphi i=\lg\frac{r}{r'}+(\alpha-\alpha')i$$

и

$$\vartheta=\lg\frac{r'}{r},\ \varphi=\alpha-\alpha'. \qquad (3)$$

Вторая изъ форм. (3) показываетъ, что, φ есть уголъ, заключенный между радіусами r и r', такъ что семейство координатныхъ линій $\varphi = \mathrm{const}$. представляетъ окружности, опирающіяся на хорду FF'. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что, идя по какому-нибудь замкнутому контуру $AMBN$, пересѣкающему хорду FF', въ направленіи обратномъ часовой стрѣлкѣ, мы получаемъ такое измѣненіе угла φ: отъ A до B φ измѣняется отъ 0 до π, а отъ B до A — отъ π до 2π.

Первое изъ равенствъ (3) показываетъ, что второе семейство криволинейныхъ координатъ, ортогональное первому и имѣющее уравненіе $\vartheta = \mathrm{const}$, представляетъ тоже окружности, центры которыхъ расположены по оси OX внѣ хорды FF'. Дѣйствительно, проведя чрезъ точку M прямую MC такъ, чтобы

$$\angle FMC = \angle CF'M,$$

найдемъ изъ $\Delta FMC \backsim \Delta F'MC$, что

$$\frac{F'C}{MC} = \frac{r'}{r}, \quad \frac{FC}{MC} = \frac{r}{r'},$$

откуда

$$MC = \frac{2a}{\frac{r'}{r} - \frac{r}{r'}}, \quad OC = a\,\frac{\frac{r'}{r} + \frac{r}{r'}}{\frac{r'}{r} - \frac{r}{r'}}.$$

Положивъ здѣсь $MC = \varrho$, $OC = \delta$ и пользуясь обозначеніями гиперболическихъ функцій, найдемъ по формулѣ (3), что

$$\varrho = \frac{a}{\mathrm{sn}h\,\vartheta}, \quad \delta = a\,\mathrm{ctg}h\,\vartheta. \tag{4}$$

Такимъ образомъ при постоянномъ ϑ величины ϱ и δ постоянны, что доказываетъ желаемое.

Составимъ первый дифференціальный параметръ найденной системы координатъ. Для этого опредѣлимъ x и y черезъ ϑ и φ. Изъ формулы (2) имѣемъ:

$$x-a+yi=e^{-\vartheta}(\mathrm{cs}\varphi+i\,\mathrm{sn}\varphi)(x+a+yi).$$

Сравнивая здѣсь дѣйствительную и мнимую часть и рѣшая полученныя уравненія относительно x и y, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} x&=a\frac{\mathrm{sn}h\vartheta}{\mathrm{cs}h\vartheta-\mathrm{cs}\varphi}, \\ y&=a\frac{\mathrm{sn}\varphi}{\mathrm{cs}h\vartheta-\mathrm{cs}\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Теперь мы можемъ составить первый дифференціальный параметръ Н пользуясь функціею x или y. Воспользуемся послѣднею функціей:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{d\varphi}&=a\frac{\mathrm{cs}\varphi\,\mathrm{cs}h\vartheta-1}{(\mathrm{cs}h\vartheta-\mathrm{cs}\varphi)^2}, \\ \frac{dy}{d\vartheta}&=-a\frac{\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{sn}h\vartheta}{(\mathrm{cs}h\vartheta-\mathrm{cs}\varphi)^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\mathrm{H}^2}=\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2=a^2\frac{\mathrm{cs}^2\varphi\,\mathrm{cs}h^2\vartheta+(1-\mathrm{cs}^2\varphi)(\mathrm{cs}h^2\vartheta-1)-2\mathrm{cs}\varphi\,\mathrm{cs}h\vartheta+1}{(\mathrm{cs}h\vartheta-\mathrm{cs}\varphi)^4}$$

откуда

$$\mathrm{H}=\frac{1}{a}(\mathrm{cs}h\vartheta-\mathrm{cs}\varphi). \qquad (7)$$

§ 3. Переходимъ къ нашей задачѣ. Воображаемъ (фиг. 1), что круги AMB и $A'M'B'$ представляютъ перпендикулярныя сѣченія двухъ цилиндровъ, вращающихся около своихъ осей C и C', и изслѣдуемъ движеніе вязкой жидкости, заключенной между ними. Предположивъ, что жидкость имѣетъ небольшую плотность и весьма значительную вязкость, мы будемъ (какъ это дѣлается въ большинствѣ изъ рѣшенныхъ задачъ по движенію вязкой жидкости) пренебрегать силами инерціи передъ силами тренія и писать уравненія гидродинамики въ видѣ[1]:

$$\frac{dp}{dx} = \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

$$\frac{dp}{dy} = \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2}\right),$$

гдѣ p гидродинамическое давленіе, μ коэффиціентъ внутренняго тренія, а u и v проекціи скорости жидкости на оси OX и OY. Называя чрезъ ω вращеніе частицы жидкости, напишемъ:

$$2\omega = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \tag{8}$$

и замѣтимъ, что на основаніи условія несжимаемости

$$\frac{d2\omega}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2},$$

$$\frac{d2\omega}{dy} = -\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right).$$

Подставляя это въ вышенаписанныя уравненія движенія жидкости найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d2\omega}{dx} &= \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dy}, \\ \frac{d2\omega}{dy} &= -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[1] Если бы на жидкость дѣйствовали внѣшнія силы, имѣющія силовую функцію, то онѣ бы не повліяли на движеніе, а только измѣнили бы давленіе p, прибавляя къ нему соотвѣтственное гидростатическое давленіе.

Эти уравненія будутъ удовлетворены всякій разъ, какъ 2ω и $\frac{p}{\mu}$ явятся дѣйствительною и мнимою частью нѣкоторой произвольной функціи отъ $x+yi$. Такъ какъ по формулѣ (2) $x+yi$ есть функція отъ

$$-i(-\vartheta+\varphi i)=\varphi+\vartheta i,$$

то попробуемъ удовлетворить задачѣ положеніемъ:

$$2\omega+\frac{p}{\mu}i=m+ni+l\cos(\varphi+\vartheta i),$$

гдѣ m, n, l нѣкоторыя постоянныя величины.

Сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, найдемъ:

$$\begin{aligned} 2\omega &= m+l\cos\varphi\cosh\vartheta, \\ \frac{p}{\mu} &= n-l\sin\varphi\sinh\vartheta. \end{aligned} \qquad (10)$$

Извѣстно, что функція ω опредѣляетъ до произвольнаго постояннаго теченіе жидкости въ двухъ измѣреніяхъ внутри даннаго контура, найдемъ это теченіе.

Называя чрезъ ψ нѣкоторую функцію x и y, удовлетворимъ условію несжимаемости положеніемъ:

$$u=-\frac{d\psi}{dy},\quad v=\frac{d\psi}{dx} \qquad (11)$$

и найдемъ, что

$$\psi=\text{const.}$$

представитъ семейство линій тока искомаго теченія.

Подставивъ формулы (11) въ формулу (8), найдемъ, что

$$2\omega=\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2},$$

а, переходя къ Неймановымъ координатамъ и пользуясь формулою (7), получимъ:

$$2\omega = \frac{(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)^2}{a^2}\left(\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right). \tag{12}$$

Такимъ образомъ отысканіе функціи ψ приводится на основаніи формулъ (10) и (12) къ интеграціи уравненія съ частными производными:

$$\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = a^2\frac{m + l\operatorname{cs}\varphi\operatorname{cs}h\vartheta}{(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)^2}. \tag{13}$$

Чтобы найти интегралъ уравненій (13), удовлетворяющій граничнымъ условіямъ нашей задачи, сдѣлаемъ подстановку:

$$\psi = \frac{\Theta}{\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi}, \tag{14}$$

гдѣ Θ есть функція одного ϑ. Найдемъ:

$$\frac{1}{(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)^2}\left\{\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2}(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi) - 2\operatorname{sn}h\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta} + (\operatorname{cs}h\vartheta + \operatorname{cs}\varphi)\Theta\right\} =$$
$$= a^2\frac{m + l\operatorname{cs}\varphi\operatorname{cs}h\vartheta}{(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)^2}.$$

Сокращая знаменателя и сравнивая между собою члены, содержащіе и несодержащіе $\operatorname{cs}\varphi$, придемъ къ заключенію, что Θ должна удовлетворить двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{cs}h\vartheta\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} - 2\operatorname{sn}h\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta} + \operatorname{cs}h\vartheta\,\Theta &= a^2 m, \\ -\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \Theta &= a^2 l\operatorname{cs}h\vartheta. \end{aligned} \tag{15}$$

Общій интегралъ перваго изъ этихъ уравненій будетъ:

$$\theta = a^2 \left\{ \left(k - \frac{l'\vartheta}{2}\right) \operatorname{sn} h\vartheta + \frac{m+l'}{2} \operatorname{cs} h\vartheta \right\},$$

гдѣ k и l' произвольныя постоянныя; подставляя его во второе уравненіе, найдемъ, что

$$a^2 l' \operatorname{cs} h\vartheta = a^2 l \operatorname{cs} h\vartheta,$$

такъ что при $l' = l$ удовлетворяемъ обоимъ уравненіямъ (15). Такимъ образомъ мы удовлетворимъ уравненіе (13), представляя уравненіе (14) въ видѣ:

$$\psi = \frac{a^2(m+l)\left(\frac{2k - l\vartheta}{m+l} \operatorname{sn} h\vartheta + \operatorname{cs} h\vartheta\right)}{2(\operatorname{cs} h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)}. \quad (16)$$

Для того, чтобы наши граничные круги $AMBN$ и $A'M'B'N'$, параметры которыхъ назовемъ чрезъ ϑ_1 и ϑ_2, были линіями токовъ, необходимо, чтобы при $\vartheta = \vartheta_1$ и $\vartheta = \vartheta_2$ функція ψ не зависѣла отъ φ, т. е., чтобы числитель ея при этихъ значеніяхъ обращался въ нуль. Для удовлетворенія этому условію мы должны выбрать постоянныя m, l, k такъ, чтобы

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{m+l} &= \frac{\operatorname{ctg} h\vartheta_2 - \operatorname{ctg} h\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}, \\ \frac{2k}{m+l} &= \frac{\vartheta_1 \operatorname{ctg} h\vartheta_2 - \vartheta_2 \operatorname{ctg} h\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Найдя функцію ψ, мы можемъ теперь легко опредѣлить проекціи w и q скорости точекъ жидкости на касательныя къ координатнымъ линіямъ $\vartheta = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$. Считая эти касательныя направленными въ тѣ стороны, въ которыя параметры возрастаютъ, найдемъ, что онѣ образуютъ съ осями углы, выражаемые косинусами:

$$\mathrm{H}\frac{dy}{d\vartheta},\quad -\mathrm{H}\frac{dx}{d\vartheta},$$

$$-\mathrm{H}\frac{dy}{d\varphi},\quad \mathrm{H}\frac{dx}{d\varphi};$$

вслѣдствіе этого по формулѣ (11) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} w &= -\mathrm{H}\frac{d\psi}{d\vartheta}, \\ q &= \mathrm{H}\frac{d\psi}{d\varphi}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Подставляя сюда ψ изъ формулы (16), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} w &= -\frac{a(m+l)}{2}\left\{\frac{2k-l\vartheta}{m+l}\operatorname{cs}h\vartheta+\operatorname{sn}h\vartheta-\frac{l}{m+l}\operatorname{sn}h\vartheta\right\} \\ &\quad+\frac{a(m+l)\left\{\frac{2k-l\vartheta}{m+l}\operatorname{sn}h\vartheta+\operatorname{cs}h\vartheta\right\}\operatorname{sn}h\vartheta}{2(\operatorname{cs}h\vartheta-\operatorname{cs}\varphi)}, \\ q &= \frac{-a(m+l)\left\{\frac{2k-l\vartheta}{m+l}\operatorname{sn}h\vartheta+\operatorname{cs}h\vartheta\right\}\operatorname{sn}\varphi}{2(\operatorname{cs}h\vartheta-\operatorname{cs}\varphi)}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Очевидно, что величина q обращается въ нуль при $\vartheta=\vartheta_1$ и $\vartheta=\vartheta_2$; что же касается w, то при этихъ значеніяхъ она не зависитъ отъ φ, такъ какъ второй членъ первой изъ формулы (19) обращается при нихъ въ нуль. Если теперь назовемъ чрезъ w_1 и w_2 скорости на окружностяхъ нашихъ вращающихся цилиндровъ $AMBN$ и $A'M'B'N'$ и примемъ коэффиціентъ внѣшняго тренія неизмѣримо большимъ коэффиціента внутренняго, то для удовлетворенія всѣмъ граничнымъ условіямъ остается только положить:

$$w_1 = \frac{a(m+l)}{2} \operatorname{sn} h\,\vartheta_1 \left\{ \frac{1}{\operatorname{sn} h^2 \vartheta_1} + \frac{\operatorname{ctg} h\,\vartheta_2 - \operatorname{ctg} h\,\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \right\},$$

$$w_2 = \frac{a(m+l)}{2} \operatorname{sn} h\,\vartheta_2 \left\{ \frac{1}{\operatorname{sn} h^2 \vartheta_2} + \frac{\operatorname{ctg} h\,\vartheta_2 - \operatorname{ctg} h\,\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \right\}. \qquad (20)$$

Такъ какъ изъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ m и l вслѣдствіе формулы (17) произвольнымъ остается только одно, то изъ двухъ скоростей w_1 и w_2 мы можемъ принять одну произвольною, но ее нельзя положить равною нулю.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію силъ дѣйствія жидкости на внутренній цилиндръ и замѣнимъ ихъ нѣкоторою силою P, проходящею чрезъ точку C', и парою съ моментомъ L, причемъ ту и другую относимъ къ единицѣ длины цилиндра. Понятно, что на внѣшній цилиндръ жидкость будетъ дѣйствовать съ противоположною силою и парою. Назовемъ чрезъ N и T нормальную и тангенціальную составляющую силы дѣйствія жидкости на элементъ поверхности внутренняго цилиндра, отнесенныя къ единицѣ площади. Силу N будемъ считать положительной по направленію къ центру цилиндра, а T — по направленію движенія часовой стрѣлки. По извѣстнымъ формуламъ найдемъ:

$$N = p - 2\mu e, \quad T = 2\mu\sigma, \qquad (21)$$

гдѣ e есть коэффиціентъ удлиненія по направленію радіуса внутренняго цилиндра, а σ есть коэффиціентъ скошенія прямаго угла между этимъ радіусомъ и касательною къ кругу $A'M'B'N'$, направленною по движенію часовой стрѣлки.

Такъ какъ скорость w на поверхности внутренняго цилиндра постоянна, то линія тока, безконечно близкая кругу $A'M'B'N'$, будетъ представлять концентрическій съ нимъ кругъ, и потому

$e = 0$. Что же касается σ, то простое геометрическое соображеніе показываетъ[1], что

$$2\sigma = \frac{w_2}{\rho_2} + \left(\mathrm{H}\frac{dw}{d\vartheta}\right)_2,$$

гдѣ ϱ_2 радіусъ внутренняго цилиндра, а значекъ (2) во второмъ членѣ показываетъ, что надо положить $\vartheta = \vartheta_2$. Пользуясь формулой (4) и (19) найдемъ:

$$2\sigma = \frac{w_2 \operatorname{sn}h\vartheta_2}{a} + l\operatorname{cs}h\vartheta_2(\operatorname{cs}h\vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi) - \frac{w_2 \operatorname{sn}h\vartheta_2}{a}.$$

Подставляемъ въ формулы (21) найденныя значенія e и σ, а также величину p изъ формулы (10):

$$\begin{aligned} N &= n\mu - l\mu \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}h\vartheta_2, \\ T &= \mu l \operatorname{cs}h\vartheta_2(\operatorname{cs}h\vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi). \end{aligned} \tag{22}$$

Теперь уже легко опредѣлить P и L. Такъ какъ для точекъ цилиндра, имѣющихъ координаты φ и $2\pi - \varphi$, перемѣнныя части силы N равны по величинѣ, но противоположны по знаку, а перемѣнныя части силы T равны и по величинѣ и по знаку, то сила P будетъ параллельна оси OY. Если условимся эту силу считать положительной вверхъ на фиг. 1, то

$$P = -l\mu a \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sn}h\vartheta_2 \operatorname{sn}\varphi \frac{dy}{d\vartheta} - \operatorname{cs}h\vartheta_2 \operatorname{cs}\varphi \frac{dy}{d\varphi}\right) d\varphi$$

или по формуламъ (6)

[1] Смотр. сочиненіе автора «О движеніи твердаго тѣла, имѣющаго полости, наполненныя однородною капельною жидкостью». Журналъ Русскаго физико-химическаго общества, Т. XVII, стр. 254.

$$P = l\mu a \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sn}h^2 \vartheta_2 \operatorname{sn}^2\varphi + \operatorname{cs}h^2 \vartheta_2 \operatorname{cs}^2\varphi - \operatorname{cs}h\vartheta_2 \operatorname{cs}\varphi}{(\operatorname{cs}h\vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi)^2} d\varphi$$

$$= 2l\mu a \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\operatorname{cs}h\vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi} + 2l\mu \int_0^{\pi} \frac{a(\operatorname{cs}\varphi \operatorname{cs}h\vartheta_2 - 1)}{(\operatorname{cs}h\vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi)^2} d\varphi .$$

Подъинтегральная функція послѣдняго интеграла, какъ видно изъ формулы (6), есть dy и потому этотъ интегралъ между данными предѣлами обращается въ нуль; первый же интегралъ легко берется, и мы получаемъ:

$$P = \frac{4l\mu a}{\operatorname{sn}h\vartheta_2} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\operatorname{cs}h\vartheta_2 + 1}{\operatorname{cs}h\vartheta_2 - 1}} . \qquad (23)$$

Моментъ L равнодѣйствующей пары по второй формулѣ (22) найдется весьма легко:

$$\frac{L}{\rho_2} = 2\pi\mu l a \operatorname{cs}h\vartheta_2 . \qquad (24)$$

Мы видимъ, что P и L будутъ положительны, если l положителенъ, а это на основаніи формулъ (17) и (20) имѣетъ мѣсто, когда w_2 положителенъ, т. е. внутренній цилиндръ вращается противъ часовой стрѣлки.

§ 4. Приложимъ найденное рѣшеніе къ изслѣдованію вращенія шипа $A'M'B'N'$ въ подшипникѣ $AMBN$, предполагая, что первый вращается противъ часовой стрѣлки, а второй съ такою же скоростью вращается въ обратную сторону. Принимая разность $\vartheta_2 - \vartheta_1$ весьма малою, поставимъ въ первую формулу (17) и вторую формулу (20)

$$\operatorname{ctg}h\vartheta_1 = \operatorname{ctg}h(\vartheta_2 - (\vartheta_2 - \vartheta_1)) = \operatorname{ctg}h\vartheta_2 +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{sn}h^2\vartheta_2}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \frac{\operatorname{cs}h\vartheta_2}{\operatorname{sn}h^3\vartheta_2}(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + \ldots .$$

найдемъ:

$$\frac{l}{m+l} = -\frac{1}{\operatorname{sn}h^2\vartheta_2},\quad w_2 = -\frac{a(m+l)}{2}\frac{\operatorname{cs}h\vartheta_2}{\operatorname{sn}h^2\vartheta_2}(\vartheta_2-\vartheta_1),$$

откуда

$$w_2 = \frac{al}{2}\operatorname{cs}h\vartheta_2(\vartheta_2-\vartheta_1).$$

Исключимъ отсюда $\vartheta_2-\vartheta_1$ съ помощію формулы (4), изъ которой слѣдуетъ, что

$$\Delta\varrho = \varrho_1-\varrho_2 = a\frac{\operatorname{cs}h\vartheta_2}{\operatorname{sn}h^2\vartheta_2}(\vartheta_2-\vartheta_1)$$

или

$$a\Delta\varrho = \varrho^2{}_2\operatorname{cs}h\vartheta_2(\vartheta_2-\vartheta_1);$$

получимъ:

$$w_2 = \frac{a^2\Delta\rho l}{2\rho_2{}^2},$$

такъ что

$$l = \frac{2\rho_2{}^2 w_2}{a^2\Delta\rho}.$$

Подставляемъ эту величину l въ формулу (23) и формулу (24), причемъ первую преобразуемъ по формулѣ (4):

$$P = \frac{8\mu w_2}{\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\operatorname{cs}h\vartheta_2+1}{\operatorname{cs}h\vartheta_2-1}},$$

$$\frac{L}{\rho_2} = \frac{4\pi\mu w_2}{\left(\frac{a}{\rho_2}\right)\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)}\operatorname{cs}h\vartheta_2. \qquad (25)$$

Сила P, направленная по вертикальной линіи снизу вверхъ, уравновѣситъ силу давленія шипа на подшипникъ, которой мы припишемъ противоположное направленіе. Принимая эту силу весьма большою сравнительно съ силою тренія, должны будемъ считать дробь $\frac{a}{\rho_2}$ за очень малую величину, а это по формулѣ (4) показываетъ, что параметръ ϑ_2 весьма малъ.

На основаніи этого замѣчанія найденныя формулы могутъ быть представлены въ слѣдующемъ простомъ видѣ:

$$P = \frac{4\pi\mu w_2}{\left(\frac{a}{\rho_2}\right)^2\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)}, \quad \frac{L}{\rho_2} = \frac{4\pi\mu w_2}{\left(\frac{a}{\rho_2}\right)\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)}. \qquad (26)$$

Если исключимъ изъ второй формулы $\frac{a}{\rho_2}$ съ помощью первой, то найдемъ

$$\frac{L}{\rho_2} = 2\sqrt{\frac{\pi\mu w_2 P}{\frac{\Delta\rho}{\rho_2}}}. \qquad (27)$$

Легко указать значеніе дроби

$$\frac{\operatorname{cs}h\,\vartheta_2+1}{\operatorname{cs}h\,\vartheta_2-1},$$

фигурирующей въ формулѣ (25). Если по формулѣ (5) составить $\frac{dx}{d\vartheta}$ и взять отрицательное отношеніе этихъ производныхъ для $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, то найдемъ для нашего смазывающаго слоя отношеніе

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\operatorname{cs}h\,\vartheta_2+1}{\operatorname{cs}h\,\vartheta_2-1}.$$

Это отношеніе при очень маломъ ϑ_2 весьма велико, что показываетъ намъ, что шипъ почти прикасается къ подшипнику въ точкѣ B.

§ 5. Какъ второй примѣръ разсмотримъ случай $\vartheta_1 = 0$. Для этого сначала подставимъ величину $(m+l)$ изъ первой формулы (17) въ формулы (20):

$$w_1 = -\frac{al}{2}\left\{\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{\operatorname{sn}h\vartheta_1(\operatorname{ctg}h\vartheta_1-\operatorname{ctg}h\vartheta_2)} - \operatorname{sn}h\vartheta_1\right\},$$

$$w_1 = \frac{al}{2}\left\{\operatorname{sn}h\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{\operatorname{sn}h\vartheta_2(\operatorname{ctg}h\vartheta_1-\operatorname{ctg}h\vartheta_2)}\right\};$$

потомъ слѣлаемъ положеніе $\vartheta_1 = 0$:

$$w_1 = -\frac{al\vartheta_2}{2},$$

$$w_2 = \frac{al\operatorname{sn}h\vartheta_2}{2},$$

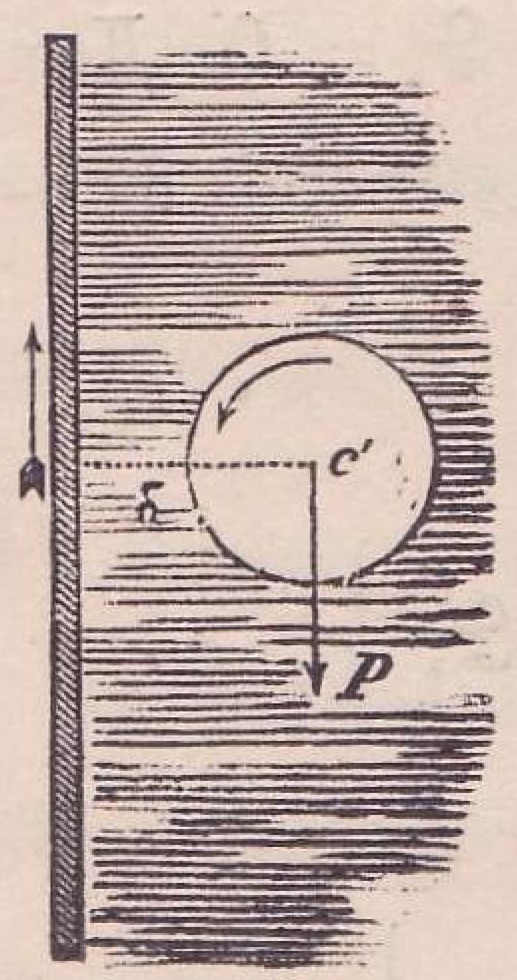
Опредѣляемъ изъ второй формулы l и подставляемъ его величину въ первую формулу, а также въ формулы (23) и (24):

$$w_1 = -\frac{\vartheta_2}{\operatorname{sn}h\vartheta_2}w_2 \tag{28}$$

$$P = \frac{8\mu w_2}{\operatorname{sn}h^2\vartheta_2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\operatorname{cs}h\vartheta_2+1}{\operatorname{cs}h\vartheta_2-1}} \tag{29}$$

$$\frac{L}{\varrho_2} = 4\pi\mu w_2\operatorname{ctg}h\vartheta_2. \tag{30}$$

Замѣтивъ, что при $\vartheta_1 = 0$, кругъ $AMBN$ на фиг. 1-й обращается въ ось OY, находимъ, что полученныя формулы даютъ намъ слѣдующій интересный случай движенія вязкой жид-



кости. Имѣемъ (фиг. 2) тяжелый горизонтальный цилиндръ, который, вращаясь въ вязкой жидкости со скоростью w_2 противъ часовой стрѣлки, помѣщенъ передъ вертикальною пластинкой, бѣгущею снизу вверхъ со скоростью w_1. Если вѣсъ P цилиндра въ жидкости и скорость w_1 опредѣляются по формуламъ (29) и (28), гдѣ ϑ_2 по радіусу цилиндра ϱ_2 и разстоянію δ_2 его оси отъ пластинки (на основаніи формулы (4)) выражается чрезъ

$$\operatorname{cs}h\vartheta_2 = \frac{\delta_2}{\varrho_2},$$

то ось цилиндра будетъ неподвижна; моментъ же $-L$ пары, вращающій цилиндръ, выразится по формулѣ (30). Сообщивъ всей системѣ внизъ поступательное движеніе со скоростью w_1, будемъ имѣть тяжелый цилиндръ, который, вращаясь передъ неподвижною стѣной, опускается равномѣрно внизъ.