ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛАХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ (II)

Г. И. Дринфельд

(Харьков)

В предыдущей статье [1] выражения для кинематической плотности на плоскости, плотности множества линейных элементов в пространстве, а также для некоторых других мер, инвариантных относительно группы евклидовых движений, были получены как инварианты продолженной группы. В настоящей статье те же выражения и ряд других найдены как интегральные инварианты некоторой группы, порождаемой группой евклидовых движений, но не являющейся ее продолжением.

В параграфе 1, предлагаемым нами общим методом, будет установлена известная формула Картана. Эта формула обобщается в параграфе 2 на случай множества плоскостей и множества прямых в пространстве. В параграфе 3 тем же методом найдена кинематическая плотность в пространстве, а в параграфе 4 — плотность множества линейных элементов. Далее, в параграфе 5 рассмотрены множества „пар" (прямых, плоскостей). Наконец, в последнем параграфе показана возможность получения тем же методом основных формул интегральной геометрии в неевклидовом пространстве.

Нам представляется, что настоящая работа и статья [1] с достаточной полнотой исчерпывают вопрос о применении теории интегральных инвариантов непрерывных групп к выводу основных (исходных) формул интегральной геометрии как в евклидовом, так и в неевклидовом пространстве.

Обобщения на n-мерное пространство не вызывают существенных затруднений.

Непосредственное отношение к предмету настоящей статьи имеют работы Мюллера [2] и Сантало [3].

§ 1. Найдем меру множества прямых

$$ux + vy = 1\,, \tag{1}$$

инвариантную относительно группы G преобразований

$$\begin{aligned} x' &= a + x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= b + x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Преобразования (2) переводят прямую (1) в прямую

$$Ux + Vy = 1\,,$$

где

$$U = \frac{u\cos\alpha + v\sin\alpha}{1 - au - bv}, \quad V = \frac{v\cos\alpha - u\sin\alpha}{1 - au - bv}\,. \tag{3}$$

Таким образом, группа G преобразований (2) в плоскости (x, y) порождает группу $\widetilde{G}$ преобразований (3) в плюккеровой плоскости (u, v).

Очевидно, что мера множества прямых (1), инвариантная относительно группы G совпадает с мерой множества точек (u, v), инвариантной относительно группы $\widetilde{G}$.

Так как, при малых α, a, b

$$f(U, V) = f(u, v) + \alpha X_1(f) + aX_2(f) + bX_3(f) + \ldots,$$

где

$$X_1(f) = v\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v}, \quad X_2(f) = u^2\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v}, \quad X_3(f) = uv\frac{\partial f}{\partial u} + v^2\frac{\partial f}{\partial v}, \tag{4}$$

то выражения (4) являются инфинитезимальными операторами группы $\widetilde{G}$.

Необходимые и достаточные условия инвариантности интеграла

$$\int M du dv$$

относительно группы $\widetilde{G}$ (см. напр. [1]) приводят к системе уравнений

$$X_1(M) = 0, \; X_2(M) + 3uM = 0, \; X_3(M) + 3vM = 0,$$

единственным, с точностью до постоянного множителя, решением которой является

$$M = (u^2 + v^2)^{-3/2}$$

Мы получили таким образом формулу Картана

$$\iint \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}} \tag{5}$$

для меры множества прямых (1), инвариантной относительно евклидовой группы движений.

Если положить

$$-\frac{u}{v} = \operatorname{tg}\varphi, \; \frac{1}{v} = n,$$

то интеграл (5) заменится интегралом

$$\iint |\cos\varphi| \, dn d\varphi, \tag{6}$$

Если же положить

$$\frac{u}{v} = \operatorname{tg}\psi, \; \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = p,$$

то интеграл (5) заменится интегралом

$$\iint dp d\psi,$$

приведенным у Бляшке [4] в качестве меры множества прямых.

Из выражения (6) для меры множества прямых, в частности, сразу следует известная теорема о мере множества прямых, пересекающих отрезок данной длины.

§ 2. Так как мы снова будем пользоваться лишь условиями инвариантности, выраженными с помощью инфинитезимальных операторов группы, то мы можем ограничиться рассмотрением преобразований близких к тождественному. Поэтому, евклидово движение в пространстве (x, y, z) определяется формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= a + x + \alpha y + \beta z, \\ y_1 &= b - \alpha x + y + \gamma z, \\ z_1 &= c - \beta x - \gamma y + z. \end{aligned} \tag{7}$$

Преобразования (7) переводят плоскость

$$ux + vy + wz = 1 \tag{8}$$

в плоскость

$$Ux + Uy + Wz = 1$$

Здесь

$$U = \frac{u - v\alpha - w\beta}{1 - au - bv - cw}, \quad V = \frac{u\alpha + v - w\gamma}{1 - au - bv - cw}, \quad W = \frac{u\beta + v\gamma + w}{1 - au - bv - cw}. \tag{9}$$

Таким образом группа G_3 преобразований (7) в пространстве (x, y, z) порождает в плюккеровом пространстве (u, v, w) группу $\widetilde{G}_3$ преобразований (9).

Инфинитезимальными операторами группы $\widetilde{G}_3$ являются операторы

$$X_1(f) = -v\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v}, \quad X_2(f) = -w\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial w}, \quad X_3(f) = \\ = -w\frac{\partial f}{\partial v} + v\frac{\partial f}{\partial w}, \tag{10}$$

$$X_4(f) = u\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v} + w\frac{\partial f}{\partial w}\right), \quad X_5(f) = \frac{v}{u}X_4(f), \quad X_6(f) = \frac{w}{u}X_4(f)$$

Действительно, как легко проверить, с точностью до малых порядка выше первого

$$f(U, V, W) = f(u, v, w) + \alpha X_1(f) + \beta X_2(f) + \gamma X_3(f) + \\ + aX_4(f) + bX_5(f) + cX_6(f).$$

Необходимыми и достаточными условиями инвариантности, относительно группы $\widetilde{G}_3$, интеграла

$$\int M du dv dw$$

являются равенства

$$X_1(M) = 0, \quad X_2(M) = 0, \quad X_3(M) = 0, \\ X_4(M) + 4uM = 0, \quad X_5(M) + 4vM = 0, \quad X_6(M) + 4wM = 0,$$

из которых, с точностью до постоянного множителя, следует

$$M = (u^2 + v^2 + w^2)^{-2},$$

Следовательно, инвариантная относительно группы G_3, мера множества плоскостей выражается интегралом

$$\int \frac{du dv dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}, \tag{11}$$

который, положив

$$p=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\ \cos\varphi=pu,\ \cos\psi=pv,\ \cos\chi=pw,$$

можно заменить интегралом

$$\int\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\cos\chi}\,d\varphi d\psi dp, \tag{12}$$

наглядно-геометрический смысл которого очевиден.

Заметим, что переход от интеграла (11) к интегралу (12) проще всего осуществить внешним (альтернирующим) умножением выражений для $\sin\varphi\, d\varphi$, $\sin\psi\, d\psi$, dp.

Рассмотрим теперь множество прямых

$$x=uz+\xi,$$
$$y=vz+\eta.$$

Легко проверить, что группа G_3 порождает в пространстве (u, v, ξ, η) группу $\widetilde{G}_4$ с инфинитезимальными операторами

$$\frac{\partial f}{\partial\xi},\ \frac{\partial f}{\partial\eta},\ u\frac{\partial f}{\partial\xi}+v\frac{\partial f}{\partial\eta},\ u\frac{\partial f}{\partial v}-v\frac{\partial f}{\partial u}+\xi\frac{\partial f}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial f}{\partial\xi}, \tag{13}$$

$$(1+u^2)\frac{\partial f}{\partial u}+u\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}+uv\frac{\partial f}{\partial v}+v\xi\frac{\partial f}{\partial\eta},\ uv\frac{\partial f}{\partial u}+u\eta\frac{\partial f}{\partial v}+$$

$$+(1+v^2)\frac{\partial f}{\partial v}+v\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}.$$

Легко также проверить, что группа с инфинитезимальными операторами (13) имеет, с точностью до постоянного множителя, единственный интегральный инвариант четвертого порядка:

$$\int\frac{du\,dv\,d\eta\,d\xi}{(1+u^2+v^2)^2}. \tag{14}$$

Этот интеграл и является, инвариантной относительно евклидовой группы движений, мерой множества прямых в пространстве.

Если положить

$$\cos\varphi=\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}},\quad \cos\psi=\frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

то интеграл (14) заменится интегралом

$$\int\sin\varphi\sin\psi\,d\varphi d\psi d\xi d\eta.$$

§ 3. Кинематическую плотность в пространстве можно рассматривать как плотность множества точек N и пар (u, v) проходящих через них взаимно-перпендикулярных прямых.

Обозначим координаты точки N через ξ, η, ζ и косинусы углов прямых u, v с осями, соответственно, через l, m, p; l_1, m_1, p_1.

Уравнениями прямых u, v являются

$$\frac{x-\xi}{l}=\frac{y-\eta}{m}=\frac{z-\zeta}{p};\quad \frac{x-\xi}{l_1}=\frac{y-\eta}{m_1}=\frac{z-\zeta}{p_1}, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} l^2+m^2+p^2=l_1^2+m_1^2+p_1^2=1,\\ ll_1+mm_1+pp_1=0. \end{gathered} \tag{16}$$

Выполнив в уравнениях (15) замену (7), найдем, что величины ξ, η, ζ; l, m, l_1 преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}
\overline{\xi} &= \xi - a - \beta\zeta - \alpha\eta,\\
\overline{\eta} &= \eta - b - \gamma\zeta + \alpha\eta,\\
\overline{\zeta} &= \zeta - c + \beta\xi + \gamma\eta,\\
\overline{l} &= l - \beta p - \alpha m,\\
\overline{m} &= m - \gamma p + \alpha l,\\
\overline{l_1} &= l_1 - \beta p_1 - \alpha m_1,
\end{aligned} \tag{17}$$

а величины p, m_1 p_1 — по формулам

$$\begin{aligned}
\overline{p} &= p + \gamma m + \beta l,\\
\overline{m_1} &= m_1 - \gamma p_1 + \alpha l_1,\\
\overline{p_1} &= p_1 + \gamma m_1 + \beta l_1;
\end{aligned} \tag{18}$$

причем

$$\overline{l}^2 + \overline{m}^2 + \overline{p}^2 = 1,\ \overline{l}_1^2 + \overline{m}_1^2 + \overline{p}_1^2 = 1,\ \overline{l}\,\overline{l_1} + \overline{m}\,\overline{m_1} + \overline{p}\,\overline{p_1} = 0.$$

Легко проверить, что преобразования (17), ввиду (18), образуют группу. Инфинитезимальными операторами этой группы являются

$$\frac{\partial f}{\partial \xi},\ \frac{\partial f}{\partial \eta},\ \frac{\partial f}{\partial \zeta};\ -\eta\frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi\frac{\partial f}{\partial \eta} - m\frac{\partial f}{\partial l} + b\frac{\partial f}{\partial m} - m\frac{\partial f}{\partial l_1};$$

$$-\zeta\frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi\frac{\partial f}{\partial \zeta} - p\frac{\partial f}{\partial l} - p_1\frac{\partial f}{\partial l_1};\ -\zeta\frac{\partial f}{\partial \eta} + \eta\frac{\partial f}{\partial \zeta} - p\frac{\partial f}{\partial m}, \tag{19}$$

Так как эти операторы линейно не связаны, то группа транзитивна и имеет единственный интегральный инвариант шестого порядка

$$\int M d\xi\, d\eta\, d\zeta dl dm dp. \tag{20}$$

Для того, чтобы интеграл (20) был интегральным инвариантом группы с инфинитезимальными операторами (19) необходимо и достаточно чтобы удовлетворялись условия

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = \frac{\partial M}{\partial \eta} = \frac{\partial M}{\partial \zeta} = 0, \tag{21}$$

$$-m\frac{\partial M}{\partial l} + l\frac{\partial M}{\partial m} - m_1\frac{\partial M}{\partial l_1} - M\frac{\partial m_1}{\partial l_1} = 0, \tag{22}$$

$$p\frac{\partial M}{\partial l} + p_1\frac{\partial M}{\partial l_1} + M\left\{\frac{\partial p}{\partial l} + \frac{\partial p_1}{\partial l_1}\right\} = 0, \tag{23}$$

$$p\frac{\partial M}{\partial m} + M\frac{\partial p}{\partial m} = 0. \tag{24}$$

Из уравнений (21) и (24) следует

$$M = \frac{\omega(l,\ l_1)}{p} = \frac{\omega(l,\ l_1)}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}}.$$

Подставив это выражение в уравнения (22) — (23), получим

$$m\frac{\partial \omega}{\partial l}+\frac{\partial (m_1\omega)}{\partial l_1}=0$$

$$p\frac{\partial \omega}{\partial l}+\frac{\partial (p_1\omega)}{\partial l_1}=0$$

— систему уравнений, из которой, на основании соотношений (16) следует

$$-ll_1\frac{\partial \omega}{\partial l}+(1-l_1^2)\frac{\partial \omega}{\partial l_1}=l_1\omega,$$

$$(1-l^2)\frac{\partial \omega}{\partial l}-ll_1\frac{\partial \omega}{\partial l_1}=l\omega.$$

Без труда находим теперь

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{|1-l^2-l_1^2|}}.$$

Интегральный инвариант (20), таким образом, существует, единствен и выражается интегралом

$$\int\frac{dldmdl_1}{\sqrt{1-l^2-m^2}}\cdot\frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{|1-l^2-l_1^2|}}.$$

Это выражение для кинематической плотности в пространстве можно заменить другими — эквивалентными.

§ 4. Мы найдем теперь те же выражения для плотности множества линейных элементов в пространстве, которые были найдены в предыдущей статье другим методом.

Прямая

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}\ ;\qquad l^2+m^2+p^2=1$$

при преобразованиях (7) переходит в прямую

$$\frac{x-\overline{x_0}}{\overline{l}}=\frac{y-\overline{y_0}}{\overline{m}}=\frac{z-\overline{z_0}}{\overline{p}}\qquad \overline{l}+\overline{m}^2+\overline{p}^2=1,$$

где, с точностью до малых порядка выше первого,

$$\left.\begin{aligned}
\overline{x_0}&=x_0-a-\beta z_0-\alpha y_0,\\
\overline{y_0}&=y_0-b-\gamma z_0+\alpha x_0,\\
\overline{z_0}&=z_0-c+\beta x_0+\gamma y_0;\\
\overline{l}&=l-\beta p-\alpha m,\\
\overline{m}&=m-\gamma p+\alpha l,\\
\overline{p}&=p+\gamma m+\beta l.
\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

Преобразования (25) образуют в пространстве (x_0, y_0, z_0, l, m) группу с инфинитезимальными операторами

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_0},\ \frac{\partial f}{\partial y_0},\ \frac{\partial f}{\partial z_0},\ -y_0\frac{\partial f}{\partial x_0}+x_0\frac{\partial f}{\partial y_0}-m\frac{\partial f}{\partial l}+l\frac{\partial f}{\partial m},\\
&-z_0\frac{\partial f}{\partial x_0}+x_0\frac{\partial f}{\partial z_0}-p\frac{\partial f}{\partial l},\ -z_0\frac{\partial f}{\partial y_0}+y_0\frac{\partial f}{\partial z_0}-p\frac{\partial f}{\partial m}
\end{aligned}\right\},\qquad(26)$$

и поэтому условия инвариантности интеграла

$$\int M dx_0 dy_0 dz_0 dl dm$$

таковы

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M}{\partial x_0} = \frac{\partial M}{\partial y_0} = \frac{\partial M}{\partial z_0} = 0,\\
&-m\frac{\partial M}{\partial l} + l\frac{\partial M}{\partial m} = 0,\\
&-p\frac{\partial M}{\partial l} + \frac{l}{p}M = 0,\\
&-p\frac{\partial M}{\partial m} + \frac{m}{p}M = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Единственным, с точностью до постоянного множителя, решением системы (27) является функция

$$M = \frac{1}{\sqrt{1-l^2-m^2}} = \frac{1}{p}.$$

Объемом группы (25) — (26) является, таким образом, интеграл

$$\int \frac{dx_0 dy_0 dz_0 dl dm}{p},$$

который, если положить

$$l = \cos\alpha, \quad m = \cos\beta, \quad p = \sqrt{1-l^2-m^2} = \cos\gamma,$$

можно заменить интегралом

$$\int \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\gamma} d\alpha d\beta dx_0 dy_0 dz_0.$$

Этим интегралом и выражается мера множества линейных элементов.

§ 5. Как известно [5], если операторы

$$X_k(f) = \xi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad k = 1, 2, \dots r$$

являются инфинитезимальными операторами группы G, то дважды расширенная группа имеет инфинитезимальные операторы

$$X_i(f) + X_i'(f), \quad i = 1, 2, \dots r,$$

где $X_i'(f)$ — оператор, полученный из $X_i(f)$ заменой $x^1, \dots x^n$, соответственно, на $x_1^1, \dots x_1^n$, причем переменные $x_1^1, \dots x_1^n$ не зависят от $x^1, \dots x^n$.

Если группа G транзитивна, то, будучи дважды расширенной, она или останется транзитивной (тогда G называется дважды транзитивной) или станет интранзитивной и будет допускать абсолютные инварианты, называемые двойными инвариантами группы G.

Очевидно, что если интеграл

$$\int M(x^1, \dots x^n)\, dx^1, \dots dx^n$$

является объемом группы G, то интеграл

$$\int M(x_1^1, \dots x_1^n)\, dx_1^1 \dots dx_1^n$$

является объемом группы с операторами $X'_k(f)$, а интеграл

$$\int M(x^1, \ldots x^n) M(x_1^1, \ldots x_1^n) dx_1^1 \ldots dx_1^n dx^1 \ldots dx^n$$

является интегральным инвариантом дважды расширенной группы — единственным (следовательно — объемом), если группа G дважды транзитивна. Если группа G не дважды транзитивна и функции

$$\varphi_i(x^1, \ldots, x^n;\; x_1^1, \ldots x_1^n), \quad i = 1, \ldots s$$

являются полной совокупностью ее независимых двойных инвариантов, то самым общим интегральным инвариантом $2n$-го порядка является интеграл

$$\int \Pi(\varphi_1, \ldots, \varphi_s) M(x^1, \ldots, x^n) M(x_1^1, \ldots, x_1^n)\, dx_1^1, \ldots, dx_1^n dx^1 \ldots dx^n,$$

в котором Π — произвольная функция аргументов.

Преобразования (7), будучи применены к паре плоскостей

$$ux + vy + wz = 1,$$
$$u_1x + v_1y + w_1z = 1,$$

определяют в пространстве $(u, v, w;\; u_1, v_1\; w_1)$ группу $\widetilde{G}_6$ являющуюся расширением группы $\widetilde{G}_3$ с инфинитезимальными операторами (10). Операторы группы $\widetilde{G}_6$

$$X_i(f) + X_i^1(f), \qquad i = 1, 2, \ldots 6,$$

где $X_i(f)$ — операторы (10), как легко проверить, связаны одной линейной зависимостью. Следовательно, группа $\widetilde{G}_6$ имеет один абсолютный инвариант. Но таким инвариантом является

$$\cos^2\omega = \frac{(uu_1 + vv_1 + ww_1)^2}{(u^2 + v^2 + w^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)}$$

и поэтому самым общим интегральным инвариантом шестого порядка группы $\widetilde{G}_6$ является интеграл

$$\int \varphi\,(\cos^2\omega)\, \frac{du\,dv\,dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2} \cdot \frac{du_1 dv_1 dw_1}{(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)^2}.$$

Подобным образом легко рассмотреть случай множества пар прямых, пар: прямая и плоскость и т. п.

§ 6. Гиперболическое движение выражается преобразованиями, которые в окрестности тождественного преобразования имеют вид

$$x' = \frac{x - \alpha y + \beta}{1 + \beta x + \gamma y}, \quad y' = \frac{\alpha x + y + \gamma}{1 + \beta x + \gamma y} \tag{28}$$

в двумерном пространстве и вид

$$x' = \frac{x - \alpha y - \beta z + \gamma}{1 + \gamma x + \varepsilon y + \eta z}, \quad y' = \frac{\alpha x + y - \delta z + \varepsilon}{1 + \gamma x + \varepsilon y + \eta z}, \quad z' = \frac{\beta x + \delta y + z + \eta}{1 + \gamma x + \varepsilon y + \eta z} \tag{29}$$

в трехмерном пространстве.

Преобразования (28) образуют группу с инфинитезимальными операторами

$$-y\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y},\quad (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}-xy\frac{\partial f}{\partial y},\quad -xy\frac{\partial f}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y},\tag{30}$$

а преобразования (29) — с инфинитезимальными операторами

$$\begin{aligned}
&-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y},\ z\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial z},\ -z\frac{\partial f}{\partial y}+y\frac{\partial f}{\partial z}\\
&(1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}-xy\frac{\partial f}{\partial y}-xz\frac{\partial f}{\partial z},\\
&-xy\frac{\partial f}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}-yz\frac{\partial f}{\partial z},\\
&-xz\frac{\partial f}{\partial x}-zy\frac{\partial f}{\partial y}+(1-z^2)\frac{\partial f}{\partial z}.
\end{aligned}\tag{31}$$

Условия инвариантности интеграла

$$\int M dx dy$$

относительно группы (28) — (30) и интеграла

$$\int N dx dy dz$$

относительно группы (29) — (31), соответственно, таковы:

$$\left.\begin{aligned}
&y\frac{\partial M}{\partial x}-x\frac{\partial M}{\partial y}=0,\\
&1-x^2\frac{\partial M}{\partial x}-xy\frac{\partial M}{\partial y}-3xM=0,\\
&-xy\frac{\partial M}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial M}{\partial y}-3yM=0;
\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}
&-y\frac{\partial M}{\partial x}+x\frac{\partial M}{\partial y}=0,\\
&z\frac{\partial M}{\partial x}-x\frac{\partial M}{\partial z}=0,\\
&-z\frac{\partial M}{\partial y}+y\frac{\partial M}{\partial z}=0,\\
&(1-x^2)\frac{\partial M}{\partial x}-xy\frac{\partial M}{\partial y}-xz\frac{\partial M}{\partial z}-4xM=0,\\
&-xy\frac{\partial M}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial M}{\partial y}-yz\frac{\partial M}{\partial z}-4yM=0,\\
&-xz\frac{\partial M}{\partial x}-zy\frac{\partial M}{\partial y}+(1-z^2)\frac{\partial M}{\partial z}-4zM=0.
\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

Единственным (с точностью до постоянного множителя) интегралом системы уравнений (32) является функция

$$(1-x^2-y^2)^{-3/2},$$

а системы уравнений (33) функция

$$(1-x^2-y^2-z^2)^{-2}.$$

Таким образом, интегралы

$$\int\frac{dxdy}{\mu_2^{3/2}}=\int\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}},\quad \int\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}=\int\frac{dxdydz}{\mu_3^2}$$

суть, соответственно, инвариантные, относительно гиперболического движения, меры множества точек в двумерном и трехмерном пространствах. Величину μ_2 можно выразить через расстояние ρ_2 точки (x, y) от начала координат, так как имеет место зависимость

$$\rho_2 = \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu_2}}{1-\sqrt{1-\mu_2}}.$$

Такой же зависимостью связаны величины μ_3 и ρ_3.

Нет необходимости, очевидно, рассматривать в гиперболической геометрии все задачи, аналогичные рассмотренным в предыдущих параграфах и мы ограничимся рассмотрением 2-х задач.

1. Мера множества прямых на плоскости. В бельтрамиевых координатах уравнением прямой на гиперболической плоскости является уравнение

$$ux + vy = 1.$$

Преобразованиям (28) в плоскости (u, v) соответствуют преобразования

$$U = \frac{-u - v\alpha + \beta}{u\beta + v\gamma - 1}, \quad V = \frac{\alpha u - v + \gamma}{u\beta + v\gamma - 1}, \tag{34}$$

образующие группу с инфинитезимальными операторами

$$v\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v}, \quad (u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v}, \quad (v^2-1)\frac{\partial f}{\partial v} + uv\frac{\partial f}{\partial u}, \tag{35}$$

фактически не отличающимися от операторов (30). Ничего неожиданного в этом, конечно, нет.

Учитывая, что обязательно

$$u^2 + v^2 > 1,$$

мы запишем объем группы (34) — (35) в виде интеграла

$$\int \frac{du\,dv}{(u^2+v^2-1)^{3/2}}.$$

Этим интегралом и определяется мера множества прямых на гиперболической плоскости.

2. Мера множества линейных элементов (кинематическая плотность) на гиперболической плоскости. Линейный элемент

$$y - y_0 = m(x - x_0), \tag{36}$$

проходящий через точку (x_0, y_0), преобразования (28) переводят в линейный элемент

$$y - \bar{y}_0 = \bar{m}(x - \bar{x}_0),$$

где

$$\bar{x}_0 = \frac{x_0 + \alpha y_0 - \beta}{1 - \beta x_0 - \gamma y_0}, \quad \bar{y}_0 = \frac{-\alpha x_0 + y_0 - \gamma}{1 - \beta x_0 - \gamma y_0}, \quad \bar{m} = \frac{m - m\beta x_0 - \alpha - \beta y_0}{1 - \gamma y_0 + m\alpha + m\gamma x_0}. \tag{37}$$

Преобразования (37) образуют группу с инфинитезимальными операторами

$$\begin{aligned} X_1(f) &= y_0\frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial f}{\partial y_0} - (1+m^2)\frac{\partial f}{\partial m}, \\ X_2(f) &= (x_0^2-1)\frac{\partial f}{\partial x_0} + x_0 y_0\frac{\partial f}{\partial y_0} + (y - mx_0)\frac{\partial f}{\partial m}, \\ X_3(f) &= x_0 y_0\frac{\partial f}{\partial x_0} + (y_0^2-1)\frac{\partial f}{\partial y_0} + m(y_0 - mx_0)\frac{\partial f}{\partial m} \end{aligned} \tag{38}$$

Условия инвариантности интеграла

$$\int M dx_0 dy_0 dm$$

относительно группы (37) — (38) приводят к системе уравнений

$$y_0 \frac{\partial M}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial M}{\partial y_0} - (1 + m^2) \frac{\partial M}{\partial m} - 2mM = 0,$$

$$(-1 + x_0^2) \frac{\partial M}{\partial x_0} + x_0 y_0 \frac{\partial M}{\partial y_0} + (y_0 - mx_0) \frac{\partial M}{\partial m} + 2x_0 M = 0, \tag{39}$$

$$x_0 y_0 \frac{\partial M}{d x_0} + (-1 + y_0^2) \frac{\partial M}{\partial y_0} + m (y_0 - mx_0) \frac{\partial M}{\partial m} + (4y_0 - 2mx_0) M = 0.$$

Умножив уравнения системы (39) соответственно на -1, $-y_0$, x_0 и сложив, получим

$$[(1 + m^2) - (y_0 - mx_0)^2] \frac{\partial M}{dm} + M [2m + 2x_0 (y_0 - mx_0)] = 0,$$

$$M = \frac{\varphi(x_0, y_0)}{1 + m^2 - (y_0 - mx_0)^2}. \tag{40}$$

Подставив выражение (40) в уравнения (39), легко найдем единственное, с точностью до постоянного множителя, значение φ

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{1 - x_0^2 - y_0^2}.$$

Таким образом, мера множества линейных элементов равна интегралу

$$\int \frac{dx_0 dy_0 dm}{(1 - x_0^2 - y_0^2) [(1 + m^2) - (y_0 - mx_0)^2]}. \tag{41}$$

Если записать уравнение (36) в обычном виде

$$ux + vy = 1,$$

то в формуле (41) надо положить

$$y_0 - mx_0 = \frac{1}{v}, \quad m = -\frac{u}{v}, \quad dm = \frac{-vdu + udv}{v^2},$$

что приводит к следующему выражению для меры

$$\int \frac{dx_0 dy_0}{1 - x_0^2 - y_0^2} \cdot \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2 - 1}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Дринфельд. О некоторых основных формулах интегральной геометрии (I). Записки ХМО, т. 22, 1950.
2. A. Müller. Dichten linearen Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen Rn. Mat. Zeitschrift, 42, 1936.
3. L. Santaló. Integral geometry in projective and affine spaces. Ann. of Math, 51, 1950.
4. В. Бляшке. Лекции по интегральной геометрии. УМН, V, 1938.
5. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. Москва, 1940.