

К-14038

П 231426

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 14

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ЗАПИСКИ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТА
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

ТОМ 32

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Цена 79 коп.

V.N. Karazin Kharkiv National University



00270809

2

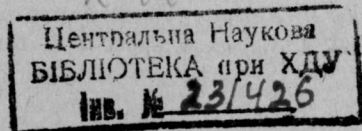
МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 14

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЗАПИСКИ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТА
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

ТОМ 32



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1966

СОДЕРЖАНИЕ

Е. Я. Хруслов. Первая краевая задача в областях со сложной границей	3
В. Л. Герман, А. А. Лазебный. Оптический метод исследования потоков вязкой несжимаемой жидкости	17
А. А. Лазебный. Распространение электромагнитных волн в турбулентных потоках вязкой несжимаемой жидкости	35
Я. Л. Геронимус. О некоторых предельных свойствах ортогональных многочленов	40
И. В. Островский. О разложениях многомерных безгранично делимых законов без гауссовой компоненты	51
И. М. Сливняк. Стационарные потоки однородных случайных событий	73
Н. С. Ландкоф. О потенциалах М. Рисса. I.	117
А. Д. Мышкис. Об обратном условии Гельдера	143
Я. Л. Геронимус. Об условиях инерциальности системы отсчета	148
А. Г. Руткас. Несамосопряженные операторы в теории многополюсников	154

Редакционная коллегия:

проф. Н. И. Ахиезер (ответственный редактор),
проф. В. А. Марченко, проф. А. В. Погорелов.

Редактор А. Г. Песчанская
Техредактор Л. Т. Момот
Корректор А. П. Гужва

Сдано в набор 6/IX 1965 г. Подписано к печати 10/IX 1966 г. БЦ 34936. Формат 70×108¹/₁₆. Объем: 11,25 физ. печ. л., 15,8 усл. печ. л., 11,8 уч.-изд. л. Зак. 4405. Тираж 500. Цена 79 коп.

Харьковская типография № 16 Областного управления по печати.
Харьков, Университетская ул., 16.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТЯХ СО СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е. Я. Хруслов

В работе В. А. Марченко и автора [1] была рассмотрена последовательность первых краевых задач для уравнения Гельмгольца в многосвязных бесконечных областях $D^{(n)}$, граница которых состоит из нескольких связных компонент $S_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, N^{(n)}$). Мы исследовали поведение последовательности функций Грина $G^{(n)}(x, y; k)$ этих задач при $n \rightarrow \infty$, когда диаметры отдельных компонент границы $d_i^{(n)}$ и расстояния $r_i^{(n)}$ от этих компонент до некоторой фиксированной поверхности Ляпунова Γ стремятся к нулю и при этом выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(\sigma)} C_i^{(n)} &= \int_{\sigma} f(x) dS_x, \\ 2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_i \sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{C_i^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}} &= \delta(\rho) \text{ и } \lim_{\rho \rightarrow 0} \delta(\rho) = 0, \end{aligned}$$

где $C_i^{(n)}$ — емкость связных компонент границы; $r_{ij}^{(n)}$ — расстояние между i -й и j -й компонентами границы; $f(x)$ — непрерывная положительная функция, заданная на поверхности Γ ; $\sum_{(\sigma)} C_i^{(n)}$ — сумма емкостей тех компонент границы, которые проектируются на кусок σ поверхности Γ .

Было показано, что при этих условиях существует предел последовательности функций Грина $\{G^{(n)}(x, y; k)\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^{(n)}(x, y; k) = G(x, y, k),$$

и предельная функция $G(x, y; k)$ удовлетворяет во всех точках, не лежащих на поверхности Γ , уравнению Гельмгольца

$$\Delta G(x, y; k) + k^2 G(x, y; k) = -\delta(x, y),$$

а на самой поверхности Γ следующим граничным условиям:

$$G^+(x, y; k) = G^-(x, y; k), \quad (1a)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^- = 4\pi f(x) G(x, y; k) \quad x \in \Gamma, \quad (1b)$$

где знаками $+$ и $-$ отмечены предельные значения функций с разных сторон поверхности Γ ; n — нормаль к Γ , направленная из стороны, которой отвечает знак $-$, в сторону, которой отвечает знак $+$.

Отметим, что в формулировку условий, налагаемых на границы областей $D^{(n)}$ явно входит требование, чтобы эти границы состояли из отдельных связных компонент. В настоящей работе это ограничение устраняется. При этом получаются более общие условия, при которых существует предел последовательности функций Грина первых краевых задач.

Мы приведем доказательство для уравнения Лапласа. Переход к уравнению Гельмгольца можно сделать так же, как в работе [1].

§ 1. Рассмотрим в трехмерном пространстве последовательность замкнутых множеств $K^{(n)}$ с границами $\partial K^{(n)}$. Будем предполагать, что все точки границ $\partial K^{(n)}$ — регулярны относительно внешней задачи Дирихле. Обозначим через $G^{(n)}(x, y)$ функции Грина для уравнения Лапласа

$$\Delta G^{(n)}(x, y) = -\delta(x, y) \quad (2)$$

в областях $D^{(n)}$, дополняющих множества $K^{(n)}$ до всего пространства, при нулевом граничном условии на $\partial K^{(n)}$

$$G^{(n)}(x, y) = 0 \text{ при } x \in \partial K^{(n)} \quad (3)$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Пусть при $n \rightarrow \infty$ выполняются следующие условия:

(*) множества $K^{(n)}$ неограниченно приближаются к некоторой фиксированной ограниченной поверхности Ляпунова Γ (т. е. при достаточной большой n все точки $K^{(n)}$ лежат в сколь угодно малой окрестности Γ);

(**) существуют и равны пределы

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\pi \rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\pi \rho^2} = f(x),$$

где $C^{(n)}(K(x, \rho))$ — емкость компакта*, являющегося пересечением множества $K^{(n)}$ с замкнутым шаром $K(x, \rho)$ радиуса ρ с центром в точке $x \in \Gamma$; $f(x)$ — непрерывная положительная функция, заданная на поверхности Γ . Тогда равномерно по точкам x, y , пробегающим любые множества, находящиеся на положительном расстоянии от поверхности Γ , существует предел последовательности $\{G^{(n)}(x, y)\}$ функций Грина задач (2) — (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^{(n)}(x, y) = G(x, y),$$

и этот предел удовлетворяет уравнению Лапласа (2) во всех точках, не принадлежащих поверхности Γ , а на самой Γ — граничным условиям (1a) — (1б)

* Емкость $C(K)$ компакта K можно определить следующим образом

$$C(K) = \max \mu(K),$$

где максимум берется по множеству мер μ , сосредоточенных на компакте K и таких, чтобы потенциал этих мер

$$U^\mu(x) = \int_K \frac{1}{|x - \xi|} d\mu(\xi)$$

удовлетворял условию $U^\mu(x) \leq 1$.

Доказательство. Как известно [2], функцию Грина $G^{(n)}(x, y)$ можно представить в виде

$$G^{(n)}(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|} - \int_{\partial K^{(n)}} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|y - \xi|}, \quad (4)$$

где $\mu^{(n)}(\xi, y)$ — мера, распределенная на $\partial K^{(n)}$, получаемая в результате выметания точечной массы, равной при данной нормировке $\frac{1}{4\pi}$ и сосредоточенной в точке y на $\partial K^{(n)}$.

Так как при этом имеет место неравенство

$$\mu^{(n)}(K^{(n)}) = \int_{\partial K^{(n)}} d\mu^{(n)}(\xi, y) \leq \frac{1}{4\pi},$$

то последовательность мер $\{\mu^{(n)}\}$ — слабо компактна, т. е. можно выделить такую подпоследовательность $\{n_k\}$, что соответствующая ей последовательность мер $\{\mu^{n_k}\}$ слабо сходится к некоторой мере μ , сосредоточенной в силу условия (*) на поверхности Γ . Совершая в формуле (4) предельный переход по этой последовательности, для любого $x \in \Gamma$ получим

$$G(x, y) = \lim_{n=n_k \rightarrow \infty} G^{(n)}(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|} - \int_{\Gamma} \frac{d\mu(\xi, y)}{|x - \xi|}, \quad (5)$$

причем легко видеть, что сходимость здесь равномерна по точке x , пробегающей любое множество, находящееся на положительном расстоянии от Γ . Поэтому предельная функция $G(x, y)$ во всех точках x , не принадлежащих поверхности Γ , удовлетворяет уравнению (2).

Исследуем теперь поведение $G(x, y)$ вблизи поверхности Γ . Предварительно установим одно неравенство для емкостей компактов $\Delta K^{(n)}$ (части $K^{(n)}$), которое нам понадобится в дальнейшем. Будем обозначать через $C^{(n)}(F)$ — емкость компакта, являющегося пересечением $K^{(n)}$ с произвольным замкнутым множеством F трехмерного пространства, т. е. $C^{(n)}(F) = C(F \cap K^{(n)})$.

Лемма 1. Пусть F — произвольное замкнутое множество трехмерного пространства, и $\text{mes}_{\Gamma}(F \cap \Gamma) > 0$ *. Тогда найдется такое число $N(F)$, что при всех $n \geq N(F)$ имеет место неравенство

$$C^{(n)}(F) \leq M \text{mes}_{\Gamma}(F \cap \Gamma),$$

где M — постоянная, не зависящая от F и $n \geq N(F)$.

Доказательство. Погрузим замкнутое множество $F \cap \Gamma$ в лежащее на поверхности Γ и открытое относительно Γ множество G , так чтобы выполнялось неравенство

$$\text{mes}_{\Gamma} G \leq 2 \text{mes}_{\Gamma}(F \cap \Gamma), \quad (6)$$

и обозначим через ρ_1 расстояние от множества $F \cap \Gamma$ до границы ∂G множества G .

Пусть $K(x, \rho)$ — замкнутый шар радиуса ρ с центром в произвольной точке $x \in \Gamma$. В силу условия (**) теоремы имеет место неравенство

$$\frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\pi \rho^2} \leq f(x) + \varepsilon^+(x, \rho) + \varepsilon(x, \rho, n),$$

* Всюду здесь через mes_{Γ} мы будем обозначать лебегову меру на поверхности Γ .

причем $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon^+(x, \rho) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(x, \rho, n) = 0$.

Отсюда, так как $\text{mes}_\Gamma(\Gamma \cap K(x, \rho)) \sim \pi \rho^2$, следует, что для каждой точки $x \in \Gamma$ существуют такие числа $\rho_1(x)$ и $N(x, \rho)$, что при $\rho < \rho_1(x)$ и $n \geq N(x, \rho)$ будет выполняться неравенство

$$C^{(n)}(K(x, \rho)) \leq M_1 \text{mes}_\Gamma(\Gamma \cap K(x, \rho)) \quad (M_1 = 2 \max f(x)). \quad (7)$$

Опишем вокруг каждой точки x поверхности Γ открытый шар радиуса $\rho(x) = \min\left(\frac{\rho_1}{2}, \rho_1(x)\right)$. Эти шары покрывают всю поверхность

Согласно лемме о покрытии шарами [2] из этой системы шаров можно выделить конечную систему, покрывающую всю поверхность так, что каждая ее точка будет покрыта не более чем N шарами, где N — абсолютная константа. Из последней системы выбросим все те шары, которые не покрывают ни одной точки множества $F \cap \Gamma$. Оставшиеся шары $K_i = K(x_i, \rho_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), очевидно, покрывают $F \cap \Gamma$ с кратностью не выше N . Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^m \text{mes}_\Gamma(K_i \cap \Gamma) \leq N \text{mes}_\Gamma \bigcup_{i=1}^m (K_i \cap \Gamma). \quad (8)$$

Кроме того, так как $\rho_i = \rho(x_i) \leq \frac{\rho_1}{2}$, то $\bigcup_{i=1}^m (K_i \cap \Gamma) \subset G$, и значит,

$$\text{mes}_\Gamma \bigcup_{i=1}^m (K_i \cap \Gamma) \leq \text{mes}_\Gamma G.$$

Отсюда, учитывая (6) и (8), получаем

$$\sum_{i=1}^m \text{mes}_\Gamma(K_i \cap \Gamma) \leq 2N \text{mes}_\Gamma(F \cap \Gamma). \quad (9)$$

Так как множество $\bigcup_{i=1}^m K_i$ открытое и $F \cap \Gamma \subset \bigcup_{i=1}^m K_i$ то из условия (*)

теоремы следует, что при достаточно больших n ($n \geq N_1$) $F \cap K^{(n)} \subset \bigcup_{i=1}^m K_i$.

Поэтому для всех $n \geq \max(N_1, N(x_1, \rho_1), N(x_2, \rho_2), \dots, N(x_m, \rho_m))$ в силу (7) и (9) и полуаддитивности емкости имеем

$$C^{(n)}(F) \leq \sum_{i=1}^m C^{(n)}(\bar{K}_i) \leq M_1 \sum_{i=1}^m \text{mes}_\Gamma(\Gamma \cap K_i) \leq 2M_1 N \text{mes}_\Gamma(F \cap \Gamma),$$

что и требовалось доказать.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые понятия теории потенциала. Прежде всего определим внутреннюю емкость $\underline{C}(E)$ и внешнюю емкость $\bar{C}(E)$ произвольного множества E :

$$\underline{C}(E) = \sup_{K \subset E} C(K),$$

где K — компакт;

$$\bar{C}(E) = \inf_{G \supset E} C(G)$$

где G — открытое множество. Как показал Шоке, для борелевских множеств E емкости $\underline{C}(E)$ и $\bar{C}(E)$ совпадают между собой.

Мера γ называется равновесной мерой компакта K , а ее потенциал $U^\gamma(x)$ — равновесным потенциалом, если $\gamma(K) = C(K)$, $U^\gamma(x) \leq 1$ всюду, а на самом компакте K с точностью до множества нулевой внутренней емкости выполняется равенство $U^\gamma(x) = 1$.

Мы будем пользоваться также следующей простой леммой.

Лемма 2. Пусть мера μ распределена на компакте K и ее потенциал $U^\mu(x)$ удовлетворяет неравенствам: $U^\mu(x) \leq M$ всюду, а на самом компакте с точностью до множества нулевой внутренней емкости $U^\mu(x) \geq m$.

Тогда имеют место неравенства

$$m \leq \frac{\mu(K)}{C(K)} \leq M.$$

Доказательство. Пусть E_1 — множество точек компакта K , где $U^\mu(x) < m$, а E_2 — множество точек компакта K , где потенциал равновесной меры $U^\gamma(x)$ компакта K меньше 1. Множества E_1 и E_2 имеют нулевую внутреннюю емкость.

Так как всюду $U^\mu(x) < M$ и $U^\gamma(x) < 1$, то из определения емкости компакта вытекает, что для любого компакта K_0 нулевой емкости $\mu(K_0) = 0$ и $\gamma(K_0) = 0$.

Следовательно, $\gamma(E_1) = 0$ и $\mu(E_2) = 0$, т. е. $U^\mu(x) \geq m$ — почти всюду и $U^\gamma(x) = 1$ — почти всюду.

Учитывая это, получаем:

$$\begin{aligned} mC(K) = m\gamma(K) &\leq \int_K U^\mu(x) d\gamma(x) = \iint_{KK} \frac{1}{|x-\xi|} d\mu(\xi) d\gamma(x) = \\ &= \int_K U^\gamma(x) d\mu(x) = \mu(K), \end{aligned}$$

откуда $\frac{\mu(K)}{C(K)} \geq m$.

Аналогично

$$MC(K) = M\gamma(K) \geq \int_K U^\mu(x) d\gamma(x) = \int_K U^\gamma(x) d\mu(x) = \mu(K)$$

и $\frac{\mu(K)}{C(K)} \leq M$. Лемма доказана.

Вернемся к интересующей нас последовательности функций Грина $G^{(n)}(x, y)$. Так как в формуле (4) меры $\mu^{(n)}$ получены в результате выметания точечной массы, равной $\frac{1}{4\pi}$ из точки $y \in K^{(n)}$ на границу компактов $K^{(n)}$, то

$$\int_{\partial K^{(n)}} \frac{1}{|x-\xi|} d\mu^{(n)}(\xi, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} \text{ при } x \in K^{(n)},$$

Отсюда, учитывая положительность $\mu^{(n)}$, получаем, что для любого компакта $\Delta K^{(n)} \subseteq K^{(n)}$ при достаточно больших n

$$\int_{\Delta K^{(n)}} \frac{1}{|x-\xi|} d\mu^{(n)}(\xi, y) < \frac{1}{2\pi d} \quad x \in \Delta K^{(n)},$$

где d — расстояние от полюса y функции Грина $G^{(n)}(x, y)$ до поверхности Γ .

Из этого неравенства в силу леммы 2 следует, что

$$\mu^{(n)}(\Delta K^{(n)}) < \frac{1}{2\pi d} C(\Delta K^{(n)}). \quad (10)$$

Теперь мы можем доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Предельная мера μ (слабый предел мер $\mu^{(n)}$ по подпоследовательности $\{n_k\}$) — абсолютно непрерывна на поверхности Γ и имеет на Γ ограниченную плотность $\varphi(\xi, y)$.*

Доказательство. Пусть E — произвольное множество на поверхности Γ и $\text{mes}_\Gamma E > 0$. Погрузим его в открытое относительно Γ множество G так, чтобы

$$\text{mes}_\Gamma G < 2 \text{mes}_\Gamma E. \quad (11)$$

Множество G представим в виде суммы неубывающей последовательности замкнутых множеств: $G = \bigcup_m F_m$

Тогда будем иметь

$$\mu(E) \leq \mu(G) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(F_m). \quad (12)$$

Замкнутое множество F_m покроем конечным числом открытых шаров K с центрами на поверхности Γ столь малого радиуса, чтобы

$$\text{mes}_\Gamma (\overline{UK_i} \cap \Gamma) < 2 \text{mes}_\Gamma F_m. \quad (13)$$

Так как множество $E_m = \bigcup_i UK_i$ открытое, то для него выполняется неравенство [2]

$$\mu(E_m) \leq \lim_{n=n_k \rightarrow \infty} \mu^{(n)}(E_m).$$

Поэтому в силу леммы 1 и неравенств (10) и (13) будем иметь

$$\mu(F_m) \leq \mu(E_m \cap \Gamma) = \mu(E_m) < \frac{M}{\pi} \text{mes}_\Gamma F_m < \frac{M}{\pi} \text{mes}_\Gamma G.$$

Отсюда, учитывая (11) и (12), получаем

$$\mu(E) < M_1 \text{mes}_\Gamma E,$$

где постоянная M_1 не зависит от E . Следовательно, мера μ абсолютно непрерывна на Γ и имеет там ограниченную плотность $\varphi(\xi, y)$ ($\xi \in \Gamma$). Лемма доказана.

Следствие. Для любого множества E трехмерного пространства, удовлетворяющего условию

$$\text{mes}_\Gamma (\partial E \cap \Gamma) = 0 \quad (\partial E \text{ — граница } E),$$

имеет место равенство

$$\lim_{n=n_k \rightarrow \infty} \mu^{(n)}(E) = \mu(E \cap \Gamma).$$

Действительно, так как мера μ сосредоточена на поверхности Γ , то в силу леммы 3 имеем

$$\mu(\partial E) = \mu(\partial E \cap \Gamma) = 0.$$

Отсюда, как известно [2], следует, что множество E нормально относительно μ , и значит,

$$\lim_{n=n_k \rightarrow \infty} \mu^{(n)}(E) = \mu(E) = \mu(E \cap \Gamma).$$

Рассмотрим теперь формулу (5). В силу леммы 3 ее можно переписать в виде

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi, y)}{|x-\xi|} dS_{\xi}. \quad (5')$$

Из этой формулы и классических свойств потенциала простого слоя следует, что $G(x, y)$ непрерывна в окрестности Γ и справедливость граничного условия (1a) доказана.

Для доказательства граничного условия (1б) возьмем на поверхности Γ произвольную точку x_0 и опишем вокруг нее шары $K(x_0, \rho)$ и $K(x_0, \rho_1)$ ($\rho < \rho_1$). Из условия (**) теоремы ($f(x) > 0$) следует, что при любых ρ в шаре $K(x_0, \rho)$ при достаточно больших n найдутся точки множества $K^{(n)}$.

Вводя обозначения: $K^{(n)}(x_0, \rho) = K^{(n)} \cap K(x_0, \rho)$;

$$CK^{(n)}(x_0, \rho) = K^{(n)} \setminus K^{(n)}(x_0, \rho); \quad \Delta K^{(n)} = K^{(n)}(x_0, \rho_1) \setminus K^{(n)}(x_0, \rho);$$

$\Gamma(x_0, \rho) = \Gamma \cap K(x_0, \rho)$; $C\Gamma(x_0, \rho) = \Gamma \setminus \Gamma(x_0, \rho)$; $\Delta\Gamma = \Gamma(x_0, \rho_1) \setminus \Gamma(x_0, \rho)$, рассмотрим при $x \in K(x_0, \rho)$ равенство *:

$$\frac{1}{4\pi|x-y|} - \int_{CK^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x-\xi|} = G(x_0, y) + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x, \rho_1) + \varepsilon(x, \rho_1, n), \quad (14)$$

где

$$\varepsilon_1(x) = G(x, y) - G(x_0, y);$$

$$\varepsilon_2(x, \rho_1) = \int_{\Gamma(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu(\xi, y)}{|x-\xi|} - \int_{\Gamma(x_0, \rho_1)} \frac{\varphi(\xi, y)}{|x-\xi|} dS_{\xi};$$

$$\varepsilon(x, \rho_1, n) = \int_{CK^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x-\xi|} - \int_{C\Gamma(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu(\xi, y)}{|x-\xi|}.$$

Очевидно, из непрерывности предельной функции Грина $G(x, y)$ и ограниченности $\varphi(\xi, y)$ следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

и равномерно по $x \in K(x_0, \rho)$

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \varepsilon_2(x, \rho_1) = 0.$$

Рассмотрим выражение для $\varepsilon(x, \rho_1, n)$. При фиксированных ρ и ρ_1 ($\rho < \rho_1$) функции $\left\{ \frac{1}{|x-\xi|}, x \in K(x_0, \rho) \right\}$ равностепенно непрерывны по $\xi \in K(x_0, \rho_1)$ и равномерно ограничены. Кроме того, так как поверхность Γ удовлетворяет условиям Ляпунова, то при достаточно

* Следует иметь в виду, что меры $\mu^{(n)}$ сосредоточены на границах $\partial K^{(n)}$ компактов $K^{(n)}$.

малых ρ_1 $\text{mes}_\Gamma(\partial K(x_0, \rho_1) \cap \Gamma) = 0$. Поэтому из леммы 3 и слабой сходимости мер $\mu^{(n)}$ по подпоследовательности $\{n_k\}$ следует, что при достаточно малых фиксированных ρ и ρ_1 ($\rho < \rho_1$) равномерно по $x \in K(x_0, \rho)$

$$\lim_{n=n_k \rightarrow \infty} \varepsilon(x, \rho_1, n) = 0.$$

Пусть теперь $x \in K^{(n)}(x_0, \rho)$. Тогда, так как $G^{(n)}(x, y) = 0$ при $x \in K^{(n)}$, из формулы (4) получаем

$$\int_{K^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|} = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \int_{CK^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|} x \in K^{(n)}(x_0, \rho). \quad (15)$$

С другой стороны, выметая на компакт $K^{(n)}(x_0, \rho)$ меру $\mu^{(n)}$ сосредоточенную на $\Delta K^{(n)}$ будем иметь всюду

$$\int_{K^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|} \geq \int_{K^{(n)}(x_0, \rho)} \frac{d\omega^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|},$$

а на самом компакте $K^{(n)}(x_0, \rho)$ с точностью до множества внешней емкости нуль

$$\int_{K^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|} = \int_{K^{(n)}(x_0, \rho)} \frac{d\omega^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|}, \quad (16)$$

где $\omega^{(n)} = \mu^{(n)} + \mu_1^{(n)}$ [2]. Здесь мера $\mu_1^{(n)}$ получена в результате выметания на $K^{(n)}(x_0, \rho)$ меры $\mu^{(n)}$, сосредоточенной на $\Delta K^{(n)}$, и поэтому

$$\mu_1^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho)) \leq \mu^{(n)}(\Delta K^{(n)}),$$

а в силу формулы (10) и леммы 1

$$\mu_1^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho)) < \frac{M}{2\pi d} \text{mes}_\Gamma \Delta \Gamma. \quad (17)$$

Из формул (14), (15) и (16) следует, что с точностью до множества нулевой внешней емкости на компакте $K^{(n)}(x_0, \rho)$ имеет место равенство

$$\int_{K^{(n)}(x_0, \rho)} \frac{d\omega^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|} = G(x_0, y) + \varepsilon(x, \rho_1) + \varepsilon(x, \rho_1, n),$$

причем равномерно по $x \in K^{(n)}(x_0, \rho_1)$

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \varepsilon(x, \rho_1) = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x, \rho_1)) = 0 \quad (18)$$

и при достаточно малых фиксированных ρ и ρ_1 ($\rho < \rho_1$) равномерно по $x \in K^{(n)}(x_0, \rho)$

$$\lim_{n=n_k \rightarrow \infty} \varepsilon(x, \rho_1, n) = 0. \quad (19)$$

Отсюда, учитывая, что колебание функции

$$\psi(x) = G(x_0, y) + \varepsilon(x, \rho) + \varepsilon(x, \rho_1, n)$$

на компакте $K^{(n)}(x_0, \rho)$ ($\rho < \rho_1$) выбором ρ_1 и $n = n_k$ может быть сделано сколь угодно малым, в силу леммы 2 получаем

$$\frac{\mu^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho)) + \mu_1^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho))}{C^{(n)}(K(x_0, \rho))} = G(x_0, y) + \varepsilon(x, \rho_1) + \varepsilon(x, \rho_1, n) + \delta(x, \rho_1, n),$$

где равномерно по $x \in K^{(n)}(x_0, \rho)$

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \lim_{n=n_k \rightarrow \infty} |\delta(x, \rho_1, n)| = 0. \quad (20)$$

Полагая для определенности в этом равенстве $x = x_n$, где x_n — ближайшая к x_0 точка множества $K^{(n)}$ ($x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$) перепишем его в виде

$$\frac{\mu^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho)) + \mu_1^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho))}{\text{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)} = (G(x_0, y) + \varepsilon(x_1, \rho_1) + \varepsilon(x_n, \rho_1, n) + \delta(x_n, \rho_1, n) \frac{C^{(n)}(K(x_0, \rho))}{\text{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)}).$$

Выберем из последовательности $\{n_k\}$, такую последовательность $\{n'_k\}$, чтобы одновременно существовали пределы $\lim_{n=n'_k \rightarrow \infty} C^{(n)}(K(x_0, \rho))$

и $\lim_{n=n'_k \rightarrow \infty} \delta(x_n, \rho_1, n)$ и перейдем к пределу сначала по $n = n'_k \rightarrow \infty$, а затем по $\rho_1 \rightarrow \rho$. Тогда в силу (18), (19), неравенства (17) и следствия из леммы 3 получим

$$\frac{\mu(\Gamma(x_0, \rho))}{\text{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)} = [G(x_0, y) + \varepsilon(x_0, \rho) + \lim_{\rho_1 \rightarrow \rho} \lim_{n=n'_k \rightarrow \infty} \delta(x_n, \rho_1, n) \lim_{n=n'_k \rightarrow \infty} \frac{C^{(n)}(K(x_0, \rho))}{\text{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)}]. \quad (21)$$

Так как при $\rho \rightarrow \infty$ $\text{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho) \sim \pi \rho^2$, то из условия (**) теоремы следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n=n'_k \rightarrow \infty} \frac{C^{(n)}(K(x_0, \rho))}{\text{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)} = f(x_0).$$

Отсюда, учитывая (18) и (20), заключаем, что в правой части равенства (21) для любого $x_0 \in \Gamma$ существует предел при $\rho \rightarrow 0$ и этот предел равен $G(x_0, y) f(x_0)$. Следовательно, в левой части также существует предел для любого $x_0 \in \Gamma$, который равен $\varphi(x_0, y)$.

Таким образом,

$$\varphi(x, y) = f(x) G(x, y) \text{ при } x \in \Gamma,$$

откуда видно, что функция $\varphi(x, y)$ непрерывна на Γ . Применяя ко второму слагаемому формулы (5') теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя, получаем

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n} \right)^+ - \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right)^- = 4\pi \varphi(x, y) = 4\pi f(x) G(x, y).$$

Итак, мы показали, что из последовательности функций Грина $G^{(n)}(x, y)$ (и, очевидно, любой ее подпоследовательности) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к функции $G(x, y)$, удовлетворяющей всюду вне поверхности Γ уравнению (2), а на поверхности Γ — граничным условиям (1a) — (1б).

Обычным способом нетрудно доказать, что такая функция $G(x, y)$ единственна. Следовательно, существует предел всей последовательности $G^{(n)}(x, y)$ и он равен $G(x, y)$, что и требовалось доказать.

§ 2. Введенное в теореме 1 условие (**) не удобно для проверки, поскольку емкости компактов $K^{(n)} \cap K(x, \rho)$ очень трудно вычислить и даже оценить. Предположим, однако, что множества $K^{(n)}$ можно определенным образом разбить на такие подмножества $K_i^{(n)}$, что емкость каждого $K_i^{(n)}$ известна или ее можно оценить. Тогда можно ввести более удобные для проверки условия, обеспечивающие выполнимость условия (**).

Сформулируем точный результат. Пусть при каждом n множества $K^{(n)}$, удовлетворяющие условию (*) теоремы 1, можно представить в виде

$$K^{(n)} = (\cup_i K_{1i}^{(n)}) \cup (\cup_i K_{2i}^{(n)}),$$

где $K_{1i}^{(n)}$ и $K_{2i}^{(n)}$ — замкнутые множества, причем в любой ограниченной части пространства таких множеств конечное число.

Введем обозначения:

$d_{1i}^{(n)}, d_{2i}^{(n)}$ — диаметры множеств $K_{1i}^{(n)}, K_{2i}^{(n)}$;

$C_{1i}^{(n)}, C_{2i}^{(n)}$ — емкости множеств $K_{1i}^{(n)}, K_{2i}^{(n)}$;

$\sum_{(x, \rho)} C_i^{(n)}$ — сумма емкостей тех множеств $K_{1i}^{(n)}$ или $K_{2i}^{(n)}$, которые полностью содержатся в замкнутом шаре $K(x, \rho)$;

$r_{ij}^{(n)}$ — расстояние между множествами $K_{1i}^{(n)}$ и $K_{1j}^{(n)}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть при $n \rightarrow \infty$ выполняются такие условия:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_i d_{1i}^{(n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_i d_{2i}^{(n)} \right\} = 0;$$

$$2) \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum C_{1i}^{(n)}(x, \rho)}{\pi \rho^2} = f(x),$$

где $f(x)$ непрерывная положительная функция на поверхности Γ ;

$$3) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_j \sum_{\substack{i+j \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{C_{1i}^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}} = \delta(\rho) \text{ и } \lim_{\rho \rightarrow 0} \delta(\rho) = 0;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(x, \rho)} C_{2i}^{(n)} = 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\pi \rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\pi \rho^2} = f(x). \quad (**)$$

Доказательство. Пусть $K_1^{(n)}(x, \rho)$ — множество, состоящее из тех множеств $K_{1i}^{(n)}$, которые полностью содержатся в шаре $K(x, \rho)$, т. е.

$$K_1^{(n)}(x, \rho) = \cup_i K_{1i}^{(n)},$$

$$K_{1i}^{(n)} \subset K(x, \rho)$$

а сумма Σ' — означает суммирование по тем множествам $K_{1i}^{(n)}$ или $K_{2i}^{(n)}$, которые не содержатся в шаре $K(x, \rho)$, но имеют с ним непустое

пересечение. Тогда в силу полуаддитивности емкости имеем

$$C^{(n)}(K_1^{(n)}(x, \rho)) \leq C^{(n)}(K(x, \rho)) \leq \sum_{(x, \rho)} C_{1i}^{(n)} + \sum_{(x, \rho)} C_{2i}^{(n)} + \varepsilon(n), \quad (22)$$

где

$$\varepsilon(n) = \sum_i' C_{1i}^{(n)} + \sum_i' C_{2i}^{(n)}.$$

Учитывая, что при достаточно малых ρ

$$\text{mes}_\Gamma(\partial K(x, \rho) \cap \Gamma) = 0,$$

и пользуясь условиями 1), 2) и 4) теоремы, таким же способом, как и при доказательстве леммы 1, нетрудно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь компакт $K_1^{(n)}(x, \rho)$. Пусть $\gamma^{(n)}$ — равновесная мера $K_1^{(n)}(x, \rho)$, а $\gamma_i^{(n)}$ часть ее, сосредоточенная на $K_{1i}^{(n)}$.

Легко видеть, что потенциал меры $\gamma_i^{(n)}$ удовлетворяет неравенствам

$$U^{\gamma_i^{(n)}}(x) \leq 1 \text{ всюду,}$$

а на компакте $K_{1i}^{(n)}$ с точностью до множества нулевой внутренней емкости

$$U^{\gamma_i^{(n)}}(x) \geq 1 - \sum_{i \neq j} \frac{\gamma_j^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}}.$$

$$K_{ij}^{(n)} \subset K(x, \rho)$$

Из первого неравенства в силу леммы 2 следует, что

$$\gamma_i^{(n)} \leq C_{1i}^{(n)},$$

и, значит, с точностью до множества нулевой внутренней емкости на $K_{1i}^{(n)}$

$$U^{\gamma_i^{(n)}}(x) \geq C_{1i}^{(n)} \left(1 - \sum_{i \neq j} \frac{C_{1j}^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}} \right).$$

$$K_{ij}^{(n)} \subset K(x, \rho)$$

Из определения равновесной меры вытекает, что

$$C^{(n)}(K_1^{(n)}(x, \rho)) = \gamma^{(n)} = \sum_i \gamma_i^{(n)},$$

и, следовательно,

$$C^{(n)}(K_1^{(n)}(x, \rho)) \geq (1 - \delta(\rho, n)) \sum_{(x, \rho)} C_{1i}^{(n)}, \quad (24)$$

где $\delta(\rho, n) = \max_{i \neq j} \sum_{K_{ij}^{(n)} \subset K(x, \rho)} \frac{C_{1j}^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}}$ и в силу условия 3) теоремы

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta(\rho, n) = 0. \quad (25)$$

Пользуясь неравенствами (22) и (24), получаем

$$(1 - \delta(p, n)) \frac{\sum_{(x, p)} C_{1i}^{(n)}}{\pi p^2} \leq \frac{C^{(n)}(K(x, p))}{\pi p^2} \leq \frac{\sum_{(x, p)} C_{1i}^{(n)}}{\pi p^2} + \frac{\sum_{(x, p)} C_{2i}^{(n)}}{\pi p^2} + \frac{\varepsilon(n)}{\pi p^2},$$

откуда в силу (23), (25) и условий 2) и 4) теоремы следует (**). Теорема доказана.

В заключение этого параграфа приведем простой пример, иллюстрирующий возможные применения теоремы 2.

Пусть множества $K^{(n)}$ есть квадратные решетки, образованные круглыми цилиндрами, оси которых лежат в некоторой плоскости Γ . Обозначим период решетки через l и будем предполагать, что диаметр цилиндров d связан с периодом решетки соотношением:

$$d = A e^{-\frac{q}{l}},$$

где A и q — некоторые положительные постоянные.

Разобьем решетку на множества K_{1i} и K_{2i} так, что K_{2i} есть „крестики“, вырезаемые из решетки кубиками с центрами в узлах решетки с длинной стороны $l^{3/2}$, а K_{1i} — оставшиеся цилиндры

высотой $l - l^{3/2}$ и рассмотрим последовательность таких решеток при $l \rightarrow 0$ (рис.). Покажем, что в этом случае все условия теоремы 2 выполнены.

Справедливость условия 1) очевидна. Чтобы проверить остальные условия, оценим емкость цилиндра диаметром d и высотой h , причем $d = o(h)$ при $h \rightarrow 0$. Вписывая в такой цилиндр и описывая вокруг него соответствующие эллипсоиды вращения и пользуясь следующей формулой для емкостей эллипсоидов вращения [2]:

$$C_s = \frac{2C}{\ln \frac{a+C}{a-C}} \quad (C = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad a, b \text{ — полуоси эллипсоида})$$

нетрудно найти асимптотическую формулу для емкостей такого цилиндра

$$C = \frac{h}{2 \ln \frac{1}{d}} (1 + o(1)), \quad h \rightarrow 0.$$

Отсюда, полагая $h = l - l^{3/2}$ и $d = A e^{-\frac{q}{l}}$, находим

$$C_{1i} = \frac{l^2}{2q} (1 + o(1)),$$

а, так как емкость C_{2i} , очевидно, оценивается сверху удвоенной емкостью цилиндра высоты $l^{3/2}$ и диаметра d , то

$$C_{2i} \leq \frac{l^{5/2}}{q} (1 + o(1)).$$

Этими формулами мы будем пользоваться при проверке условий 2), 3), 4) теоремы.

Учитывая, что при $l \rightarrow 0$ в шар $K(x, \rho)$ попадает $\frac{\pi \rho^2}{l^2} (1 + o(1))$ множеств K_{2i} и $\frac{2\pi \rho^2}{l^2} (1 + o(1))$ множеств K_{1i} , получаем:

$$\sum_{(x, \rho)} C_{2i} = \frac{C_{2i}}{l^2} \pi \rho^2 (1 + o(1)) \leq \frac{l^{1/2}}{q} \pi \rho^2 (1 + o(1));$$

$$\sum_{(x, \rho)} C_{1i} = \frac{2C_{1i}}{l^2} \pi \rho^2 (1 + o(1)) = \frac{\pi \rho^2}{q} (1 + o(1)),$$

откуда следует справедливость условий 2) и 4), причем $f(x) = \frac{1}{q}$.

Далее, имеем

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij} < \rho}} \frac{C_{1i}}{r_{ij}} = \sum_{i=1}^6 \frac{C_{1i}}{r_{ij}} + \sum'_{\substack{i \neq j \\ r_{ij} < \rho}} \frac{C_{1i}}{r_{ij}},$$

где первая сумма распространяется на 6 ближайших к K_{1j} цилиндров, а вторая — на все остальные. Отсюда при $l \rightarrow 0$ получаем

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij} < \rho}} \frac{C_{1i}}{r_{ij}} \leq \frac{24C_{1i}}{l^{3/2}} + 4 \sum_{0 < \sqrt{m^2 + n^2} < \frac{\rho}{l}} \frac{C_{1i}}{l \sqrt{m^2 + n^2}} \leq \left(12 \frac{l^{1/2}}{q} + \frac{4\pi \rho}{q} \right) (1 + o(1)).$$

Следовательно, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \delta(\rho) = 0$ и, значит, условие 3) также выполнено.

§ 3. Рассмотрим снова последовательность задач (2) — (3) в областях $D^{(n)}$, однако теперь мы не будем предполагать, что компакты $K^{(n)}$ неограниченно приближаются к поверхности Γ . Пусть $G^{(n)}(x, y)$ соответствующие функции Грина, причем будем считать, что они продолжены нулем вне $D^{(n)}$, т. е. полагаем $G^{(n)}(x, y) = 0$ при $x \in K^{(n)}$ или $y \in K^{(n)}$. Пусть B — произвольная ограниченная область пространства. В гильбертовом пространстве функций, интегрируемых с квадратом на B , введем оператор

$$G^{(n)}[\varphi] = \int G^{(n)}(x, y) \varphi(y) d\tau_y.$$

Теорема 3. Пусть при $n \rightarrow \infty$ выполняется условие

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\frac{4}{3} \pi \rho^3} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\frac{4}{3} \pi \rho^3} = f(x).$$

Тогда в любой ограниченной области B последовательность операторов $G^{(n)}$, ядрами которых являются функции Грина $G^{(n)}(x, y)$ задач (2) — (3), сильно сходится к интегральному оператору G с ядром $G(x, y)$, удовлетворяющим во всем пространстве уравнению

$$\Delta G(x, y) - 4\pi f(x) G(x, y) = -\delta(x, y),$$

т. е. в метрике $L^2(B)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int G^{(n)}(x, y) \varphi(y) d\tau_y = \int G(x, y) \varphi(y) d\tau_y$$

для любой функции $\varphi(x) \in L^2(B)$.

Доказательство этой теоремы в основном аналогично доказательству теоремы 1 и мы его приводить здесь не будем.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой и Н. С. Ландкофу за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко и Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. «Матем. сб.», т. 65 (107): 3, (1964), 458—472.
2. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала М., 1966 г.
3. Н. С. Ландкоф. Емкости и меры Хаусдорфа. Оценки потенциалов. «Усп. матем. наук», т. 20, вып. 2 (1965).

ОПТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПОТОКОВ
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Л. Герман, А. А. Лазебный

В работе рассматривается возможность применения оптического метода изучения напряжений к потокам вязкой жидкости. При движении вязкой жидкости возникают напряжения, пропорциональные компонентам тензора скоростей деформации $\dot{\mathbf{V}}$. При $\dot{\mathbf{V}} \neq \dot{\mathbf{O}}$ (т. е. исключая случай неподвижной или движущейся как целое жидкости) поток вязкой жидкости под действием напряжений становится оптически неоднородным и анизотропным, поэтому принципиально возможно исследование потока вязкой жидкости оптическим методом аналогично тому, как это осуществляется в фотоупругости и фотопластичности [1].

Так как при прохождении электромагнитной волны через поток гидродинамическая картина не искажается (при обычных экспериментальных измерениях гидродинамических характеристик в поток жидкости вносятся возмущения, которые нарушают гидродинамическую картину), то регистрация такой анизотропии является чувствительным методом наблюдения и может быть использована, например, для изучения гидродинамической устойчивости. Соответствующие экспериментальные измерения были произведены Вейландом [2] и показали, что зависимость оптических характеристик потока от гидродинамических параметров является характерной для того или иного режима движения жидкости. Так, для ламинарного режима движения оптические характеристики являются гладкими функциями гидродинамических параметров, тогда как для режима, который наступил после потери устойчивости, на соответствующих экспериментальных кривых появляются изломы, которые свидетельствуют о сравнительно быстром изменении оптических величин в окрестностях соответствующих значений гидродинамических параметров.

В данной работе изучается характер поляризации электромагнитных волн (видимый спектр), распространяющихся в потоке жидкости при ламинарном режиме движения и при режиме, который наступил после потери устойчивости, т. е. исследуются решения уравнений Максвелла при заданной зависимости $\varepsilon(V)$.

Рассмотрение оптических характеристик как функций гидродинамических параметров позволяет детально проследить за изменением гидродинамической картины и сравнить полученные результаты с экспериментом.

1) **Общий вид зависимости $\check{E}$ от $\check{V}$. Условия совместности для $\check{E}$**

Оптическая анизотропия в потоке жидкости характеризуется зависимостью тензора диэлектрической проницаемости $\check{E}$ от тензора вязких напряжений $\check{P}$, или, так как $\check{P}$ линейно выражается через тензор скоростей деформации $\check{V}$, то $\check{E}$ можно рассматривать как функцию $\check{V}$. Предположим, что $\check{E}$ — аналитическая функция $\check{V}$, не зависящая явно от пространственных координат и времени. Допустим также, что в потоке жидкости нет исключительных направлений (сама жидкость оптически изотропна). Разложим $\check{E}$ в ряд по $\check{V}$:

$$\check{E}(\check{V}) = (\varepsilon_1 + a_0)I + a_1\check{V} + a_2\check{V}^2 + \dots + a_n\check{V}^n + \dots \quad (1.1)$$

Коэффициенты a_k в разложении (1.1) являются скалярами в силу предположения об отсутствии исключительных направлений в потоке. Используя теорему Гамильтона-Кэли и теорему Гильберта об инвариантах тензоров конечных рангов, получим окончательное выражение для $\check{E}$ как функции $\check{V}$.

$$E(\check{V}) = [\varepsilon_1 + \alpha(I_1, I_2, I_3)] \cdot I + \beta(I_1, I_2, I_3)\check{V} + \gamma(I_1, I_2, I_3)\check{V}^2, \quad (1.2)$$

где $\alpha(I_1, I_2, I_3)$, $\beta(I_1, I_2, I_3)$, $\gamma(I_1, I_2, I_3)$ — аналитические функции главных инвариантов тензора $\check{V}$, а $\varepsilon_1 I$ (I — единичный тензор) характеризует диэлектрические свойства неподвижной жидкости, т. е.

$$\lim_{\check{V} \rightarrow \check{0}} \check{E}(\check{V}) = \varepsilon_1 \cdot I,$$

где $\check{0}$ — нулевой тензор.

Для ламинарных потоков вязкой жидкости, которые характеризуются небольшими градиентами скоростей, из (1, 2) имеем, ограничившись членами первого порядка по V_{lm} :

$$\check{E}(\check{V}) = \varepsilon_1 \cdot I + \lambda_1 \check{V}, \quad (1.3)$$

где λ_1 — так называемая динамооптическая постоянная, которая определяется экспериментально [3].

Отметим, что член $\varepsilon_1 I$ в (1, 2) и (1, 3) значительно превышает по величине остальные члены правых частей выражений (1, 2), (1, 3), так как изменение диэлектрической проницаемости под влиянием вязких напряжений обычно мало.

Вернемся к соотношению (1, 2), причем в качестве определяющих инвариантов возьмем базисные инварианты I_1, I_2, I_3 . Тогда

$$\check{E} = [\varepsilon_1 + \alpha(I_1, I_2, I_3)] \cdot I + \beta(I_1, I_2, I_3)\check{V} + \gamma(I_1, I_2, I_3)\check{V}^2. \quad (1.6)$$

Рассмотрим случай несжимаемой жидкости, тогда $I_1 = \text{div } \vec{V} = 0$ и (1.6) имеет вид

$$\check{E} = [\varepsilon_1 + \alpha(I_2, I_3)] \cdot I + \beta(I_2, I_3)\check{V} + \gamma(I_2, I_3)\check{V}^2. \quad (1.7)$$

Введем следующие новые базисные инварианты:

$$\mathcal{E}_1 = \varepsilon_{ik} \cdot \delta_{ik}, \quad \mathcal{E}_2 = \varepsilon_{ik} \cdot V_{ik}, \quad \mathcal{E}_3 = \varepsilon_I V_{lm} V_{mi}; \quad (1.8)$$

$\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$ являются смешанными инвариантами тензоров $\check{E}$ и $\check{V}$. Выразим α , β , γ через I_2 , I_3 , $\mathcal{E}_i$. Для этого свернем (1.7) последовательно с I , $\check{V}$, $\check{V}^2$. Тогда получим

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = 3(\varepsilon_1 + \alpha) + I_2 \gamma \\ \mathcal{E}_2 = I_2 \beta + I_3 \gamma \\ \mathcal{E}_3 = I_2(\varepsilon_1 + \alpha) + I_3 \beta + \frac{1}{2} I_2^2 \gamma. \end{cases} \quad (1.8)$$

Отсюда находим α , β , γ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon_1 + \alpha \\ \alpha_i &= \Phi_{ik} \mathcal{E}_k \quad \alpha_3 = \beta \\ \alpha_3 &= \gamma, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где тензор $\check{\Phi}$ определяется следующим образом:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{I_2^3 - 2I_3^3}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{2I_2 I_3}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{-2I_2^2}{I_2^3 - 6I_3^2} \\ \frac{2I_2 I_3}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{-I_2^2}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{-6I_3}{I_2^3 - 6I_3^2} \\ \frac{-2I_2^2}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{-6I_3}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{6I_2}{I_2^3 - 6I_3^2} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.9) в (1.7), получаем

$$\check{E}(V) = \Phi_{1i} \mathcal{E}_i \cdot \check{V} + \Phi_{2i} \mathcal{E}_i \cdot \check{V} + \Phi_{3i} \mathcal{E}_i \check{V}^2. \quad (1.11)$$

Следовательно, связь между $\check{\varepsilon}$ и $\check{V}$ в общем случае становится полностью определенной, если заданы функции

$$\mathcal{E}_1 = f_1(I_2, I_3), \quad \mathcal{E}_2 = f_2(I_2, I_3), \quad \mathcal{E}_3 = f_3(I_2, I_3). \quad (1.12)$$

Эти функциональные зависимости естественно назвать инвариантными уравнениями состояния [4].

При рассмотрении соответствующей электродинамической задачи должны быть известны ε_{ik} как функции V_{lm} . Функции ε_{ik} определяются из эксперимента, причем часто они определяются из независимых измерений. Таким образом, при полном исследовании ε_{ik} задаются в виде шести независимых функций. Эти функции однако не могут быть заданы произвольно, что видно из соотношения (1.2).

Так как $V_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_l}{\partial x_m} + \frac{\partial V_m}{\partial x_l} \right)$, т. е. величины V_{lm} выражаются через три независимые компоненты скорости жидкости, то шесть компонент V_{lm} а, значит, и ε_{ik} не могут быть независимыми функциями координат. Возникает вопрос об условиях совместности для ε_{ik} или для V_{lm} аналогичных условиям совместности для компонент тензора деформации в механике упругой среды. Условия совместности для $\check{V}$ можно получить из соответствующих условий совместности для тензора деформации $\check{U} = \frac{1}{2} (\check{G}_1 - I)$, которые связаны с условиями для фундаментального тензора $\check{G}_1 = (g_{ik})$, определяющего метрику в евкли-

довом пространстве. и имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} R_{ikl}^m &= 0, \\ (R_{iklm} &= 0), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где R_{ikl}^m — тензор Римана-Кристоффеля.

В терминах $\check{U}$ равенство (1,13) приводит к условиям совместности для U_{jk} . Из этих условий можно получить уравнения совместности для V_{ik} (см. [5]):

$$\frac{\partial^2 V_{km}}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial^2 V_{li}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 V_{ki}}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 V_{lm}}{\partial x_k \partial x_i} = 0. \quad (1.14)$$

Получим теперь условия совместности для E_{ik} . Предположим, что в соотношении (1,2) якобиан $\frac{D(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})}{D(V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{22}, V_{23}, V_{33})}$ отличен от нуля. Тогда $\check{V}$ можно, в свою очередь, рассматривать как функцию ε и представить в форме, аналогичной (1,2):

$$\check{V} = g_0(J_1, J_2, J_3) \cdot I + g_1(J_1, J_2, J_3) \check{E} + g_2(J_1, J_2, J_3) \check{E}^2, \quad (1.15)$$

где J_1, J_2, J_3 — главные инварианты $\check{E}$.

Подставляя (1,15) в (1,14), получаем нелинейные уравнения совместности для компонент ε_{ik} :

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_i} [g_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{km} + g_1(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{km} + g_2(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{ka} \varepsilon_{am}] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} [g_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{li} + g_1(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{li} + g_2(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{la} \varepsilon_{ai}] - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} (g_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{ki} + g_1(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{ki} + \\ & + g_2(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{ka} \varepsilon_{ai}) - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} [g_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{lm} + \\ & + g_1(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{lm} + g_2(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{la} \varepsilon_{am}] = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

При малых градиентах скорости можно использовать соотношение (1,3), тогда условия совместности имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{knl}}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{li}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ki}}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{lm}}{\partial x_k \partial x_i} = 0. \quad (1.17)$$

2) Решение электродинамической задачи для ламинарного потока вязкой несжимаемой жидкости между коаксиальными цилиндрами

Для ламинарных потоков жидкости можно ограничиться соотношением (1,3) и тогда система уравнений Максвелла запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \text{rot } \vec{E} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\vec{D} = \overset{\vee}{E} \cdot \vec{E}$$

$$\overset{\vee}{E} = \epsilon_1 \cdot I + \lambda_1 \cdot \overset{\vee}{V}$$

где $\overset{\vee}{E} \cdot \vec{E}$ означает диадное произведение: $(\overset{\vee}{E} \cdot \vec{E})_i = \epsilon_{ik} E_k$.

Система уравнений (2, 1) является исходной для дальнейшего рассмотрения задачи. Отметим, что компоненты тензора ϵ в общем случае являются функциями пространственных координат и времени, поэтому нельзя получить решение системы (2, 1) в общем виде при соответствующих начальных и граничных условиях, тем более, что нахождение $\overset{\vee}{V}$ связано с рассмотрением нелинейных уравнений гидродинамики, которые в общем случае не решены. Однако, физическая постановка задачи позволяет в некоторых случаях провести электродинамическое исследование до конца, используя упрощения, которые связаны с физической природой рассматриваемой задачи.

Экспериментальное исследование потоков жидкости производится при помощи очень узких пучков поляризованного света, а $\overset{\vee}{V}$ и, следовательно, $\overset{\vee}{E}$ являются медленно меняющимися функциями на расстояниях порядка длины волны. Это дает возможность предположить, что в окрестности данной точки плоского поля скоростей деформации имеется однородное распределение скоростей деформации, что позволяет рассматривать зависимость $\overset{\vee}{E}$ от соответствующих координат как параметрическую и свести электродинамическую задачу к задаче о распространении плоских волн в потоке жидкости, который можно рассматривать как среду, неограниченную в плоскости, перпендикулярной направлению распространения электромагнитной волны. Здесь учтено, что, время, от которого явно зависят компоненты $\overset{\vee}{E}$ через $\overset{\vee}{V}$, при распространении электромагнитной волны в потоке жидкости можно считать фиксированным, так как характерное время изменения гидродинамических величин значительно больше характерного времени изменения электромагнитного поля при прохождении через поток. Поэтому оптическую картину можно рассчитывать как статическую, т. е. не учитывать изменений $\overset{\vee}{V}$, происходящих за время прохождения электромагнитной волны через поток жидкости.

Рассмотрим теперь установившееся плоскопараллельное круговое движение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя concentрическими цилиндрами радиусов R_1 и R_2 . Пусть вращается только внутренний цилиндр, угловую скорость его вращения обозначим через Ω . Тогда единственной отличной от нуля физической * составляющей тензора $\overset{\vee}{V}$ будет $V_{r\theta}$:

$$V_{r\theta} = -\Omega \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2 (R_2^2 - R_1^2)}.$$

Если зазор между цилиндрами мал, т. е. $d = R_2 - R_1 \ll \frac{R_1 + R_2}{2}$, то приближенно компоненту $V_{r\theta}$ можно положить равной

$$V_{r\theta} = -\Omega \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = \text{const.} \quad (2.2)$$

* Физические составляющие вектора или тензора в ортогональной криволинейной системе координат — это соответствующие составляющие по осям декартовой системы координат, совпадающим с касательными к координатным кривым в рассматриваемой точке.

Тогда выражение (1,3) для $\vec{E}$ будет следующим:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\frac{\lambda \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} & 0 \\ -\frac{\lambda_1 \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Рассмотрим нормальное падение плоской электромагнитной волны на поток жидкости. Пусть направление распространения совпадает с осью цилиндров z . В этом случае E и H можно считать функциями только z , t и система уравнений Максвелла имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\lambda_1 \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\lambda_1 \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = 0, \\ E_z = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Отвлекаясь от рассматриваемой задачи, найдем скорость распространения электромагнитного возмущения, которое описывается уравнениями (2, 4). Для этого введем поверхность $\Phi(\vec{r}, t) = 0$, которая отделяет в момент времени t область, в которой поле отлично от нуля, от области, в которой поля нет (поверхность может разделять области с разными режимами). Такая поверхность называется фронтом электромагнитной волны. Существенное свойство этой поверхности состоит в том, что решение уравнений (2, 4) не может быть непрерывно продолжено за поверхность разрыва.

Рассмотрим сильный разрыв, т. е. разрыв самой функции

$$\vec{E} = \vec{E}^I U(\Phi) + \vec{E}^{II} U(-\Phi), \quad (2.5)$$

где $U(\xi)$ — единичная функция, а $\vec{E}^I, \vec{E}^{II}$ характеризуют поля справа и слева от поверхности разрыва, причем одно из $\vec{E}^I, \vec{E}^{II}$ может равняться нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 E_i^I}{\partial z^2} U(\Phi) + \frac{\partial^2 E_i^{II}}{\partial z^2} U(-\Phi) + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial z} \right\rangle \delta(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \langle E_i \rangle}{\partial z} \delta(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle E_i \rangle \delta'(\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \langle E_i \rangle \delta(\Phi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E_i^I}{\partial t^2} U(\Phi) + \frac{\partial^2 E_i^{II}}{\partial t^2} U(-\Phi) + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial t} \right\rangle \delta(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial \langle E_i \rangle}{\partial t} \delta(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_i \rangle \delta'(\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \langle E_i \rangle \delta(\Phi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ означают скачок.

Подставляя найденные производные в уравнение (2,4), имеем:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} \right] U(\Phi) + \left[\frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} \right] U(-\Phi) + \left[\left\langle \frac{\partial E_r}{\partial z} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \langle E_r \rangle}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle E_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\left\langle \frac{\partial E_r}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \langle E_r \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\left\langle \frac{\partial E_0}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \langle E_0 \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_0 \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \right] \delta(\Phi) + \\ & + \left[\langle E_r \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \langle E_r \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \Lambda \langle E_0 \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \delta'(\Phi) = 0; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} \right] U(\Phi) + \\ & + \left[\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} \right] U(-\Phi) + \\ & + \left[\left\langle \frac{\partial E_0}{\partial z} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \langle E_0 \rangle}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle E_0 \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\left\langle \frac{\partial E_0}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \langle E_0 \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_0 \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\left\langle \frac{\partial E_r}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \langle E_r \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \right] \delta(\Phi) + \\ & + \left[\langle E_0 \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \langle E_0 \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \Lambda \langle E_r \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \delta'(\Phi) = 0, \end{aligned}$$

где $\Lambda = \frac{\lambda_1 \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

Предполагая, что (2, 7) выполняется тождественно, получим, приравняв нулю коэффициенты при $U(\Phi)$, $U(-\Phi)$, $\delta(\Phi)$, $\delta'(\Phi)$, следующие соотношения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \overset{\Pi}{E}_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \overset{\Pi}{E}_r}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 \overset{\Pi}{E}_\theta}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \overset{\Pi}{E}_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \overset{\Pi}{E}_\theta}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 \overset{\Pi}{E}_r}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial \overset{\Pi}{E}_r}{\partial z} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \langle \overset{\Pi}{E}_r \rangle}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle \overset{\Pi}{E}_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\left\langle \frac{\partial \overset{\Pi}{E}_r}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \langle \overset{\Pi}{E}_r \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle \overset{\Pi}{E}_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\left\langle \frac{\partial \overset{\Pi}{E}_\theta}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \langle \overset{\Pi}{E}_\theta \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle \overset{\Pi}{E}_\theta \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (**)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial \overset{\Pi}{E}_\theta}{\partial z} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \langle \overset{\Pi}{E}_\theta \rangle}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle \overset{\Pi}{E}_\theta \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\left\langle \frac{\partial \overset{\Pi}{E}_\theta}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \langle \overset{\Pi}{E}_\theta \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle \overset{\Pi}{E}_\theta \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\left\langle \frac{\partial \overset{\Pi}{E}_r}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \langle \overset{\Pi}{E}_r \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle \overset{\Pi}{E}_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \cdot \langle \overset{\Pi}{E}_r \rangle + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \cdot \langle \overset{\Pi}{E}_\theta \rangle = 0 \\ \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \cdot \langle \overset{\Pi}{E}_\theta \rangle + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \cdot \langle \overset{\Pi}{E}_r \rangle = 0. \end{cases} \quad (***)$$

*) свидетельствует о том, что $\overset{\Pi}{E}$ и $\overset{\Pi}{E}$ удовлетворяют уравнению (2,1) слева и справа от поверхности разрыва; (**) дает уравнение для скачка $\langle \overset{\Pi}{E} \rangle = \overset{\Pi}{E} - \overset{\Pi}{E}$; а из (***). так как $\langle \overset{\Pi}{E}_r \rangle^2 + \langle \overset{\Pi}{E}_\theta \rangle^2 \neq 0$, имеем

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 V^2 & \frac{1}{c^2} \Lambda V^2 \\ \frac{1}{c^2} \Lambda V^2 & 1 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 V^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.9)$$

где $V^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 / \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2$ — скорость распространения фронта волны вдоль оси z . Из уравнения (2,9) находим:

$$V_1^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1 - \Lambda}; \quad V_2^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1 + \Lambda}. \quad (2.10)$$

Наличие двух разных скоростей распространения является характерным для анизотропной среды

Отметим, что при $\Lambda \rightarrow 0$ ($\Omega \rightarrow 0$) $\lim V_1^2 = \lim V_2^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1}$, что и следовало ожидать, так как при $\Lambda = 0$ поток становится оптически изотропным.

Вернемся к уравнениям (2, 4). Рассмотрим распространение в потоке плоской монохроматической волны. Тогда система уравнений Максвелла (2, 4) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_r}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E_r - \Lambda E_\theta] = 0, \\ \frac{d^2 E_\theta}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E_\theta - \Lambda E_r] = 0, \\ E_z = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Введем

$$E^\pm = E_\theta \pm E_r.$$

Тогда уравнения для E^+ и E^- разделяются [6]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E^+}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 - \Lambda] E^+ &= 0, \\ \frac{d^2 E^-}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 + \Lambda] E^- &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решение уравнений (2,12) имеет вид

$$\begin{aligned} E^+ &= C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z}, \\ E^- &= C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} + C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z}. \end{aligned}$$

По известным E^+ и E^- находим поле в потоке жидкости

$$\begin{aligned} E_\theta(z, t) &= \frac{1}{2} e^{i\omega t} \left[C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + \right. \\ &\quad \left. + C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} + C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} \right]; \\ E_r(z, t) &= \frac{1}{2} e^{i\omega t} \left[C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} - \right. \\ &\quad \left. - C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} - C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} \right]; \end{aligned} \quad (2.13)$$

В рассматриваемом случае компоненты поля E_θ и E_r представляют собой суперпозицию двух нормальных волн

$$\begin{cases} F_1 = e^{i\omega t} \left[C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} \right], \\ F_2 = 0; \\ F_1 = 0 \\ F_2 = e^{i\omega t} \left[C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} + C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} \right], \end{cases} \quad (2.14)$$

каждая из которых характеризуется определенной фазовой скоростью и поляризацией — в данном случае обе нормальные волны линейно поляризованы [6].

Для нахождения произвольных постоянных C_1^+ , C_2^+ , C_1^- , C_2^- необходимо воспользоваться граничными условиями, требующими непрерывности тангенциальных компонент $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на границе раздела сред. Отметим, что хотя для гидродинамической части задачи использовано выражение для скорости в случае бесконечных цилиндров, соответствующая электродинамическая задача решается для случая конечных цилиндров. Возможность такого рассмотрения связана с тем, что выражение для скорости, полученное для неограниченных цилиндров, является хорошим приближением и для конечных, но достаточно протяженных цилиндров, т. е. при условии $\frac{R}{l} \ll 1$, где l — длина цилиндра.

Электрическое поле над потоком можно представить в виде

$$\begin{cases} E_\theta = \left[e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z} + R_1^* e^{i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z} \right] e^{i\omega t}, \\ E_r = R_2^* e^{i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z + i\omega t}, \\ E_z = 0, \end{cases}$$

где первые члены представляют собой компоненты падающей линейно поляризованной по оси Θ волны, а вторые — компоненты отраженной волны; R_1^* и R_2^* — коэффициенты отражения. Поле прошедшей поток электромагнитной волны будет:

$$\begin{cases} E_r = D_1 e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z + i\omega t}, \\ E_\theta = D_2 e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z + i\omega t}, \\ E_z = 0, \end{cases}$$

где D_1 и D_2 — коэффициенты прохождения.

Условия для полей на границах раздела $z=0$ и $z=l$ приводят к линейной системе алгебраических уравнений, решая которую, находим постоянные C_1^+ , C_2^+ , C_1^- , C_2^- :

$$\begin{aligned} C_1^+ &= \frac{2V_{\varepsilon_0}}{V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1} - \Lambda} - \\ &= \frac{2V_{\varepsilon_0}(V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1} - \Lambda) e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l}}{(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1} - \Lambda) \left[(V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1} - \Lambda)^2 e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l} - (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1} - \Lambda)^2 e^{i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l} \right]}; \\ C_2^+ &= \frac{2V_{\varepsilon_0}(V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1} - \Lambda) e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l}}{(V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1} - \Lambda)^2 e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0} - \Lambda l} - (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1} - \Lambda)^2 e^{i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$C_1^- = \frac{2V_{\varepsilon_0}^-}{V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda} - \frac{2V_{\varepsilon_0}^- (V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda) e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda l}}{(V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda) \left[(V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda)^2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_0}^- + \Lambda l} - (V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda)^2 e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda l} \right]}$$

$$C_2^- = \frac{2V_{\varepsilon_0}^- (V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda) e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda l}}{(V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda)^2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda l} - (V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda)^2 e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda l}};$$

Поляризация поля в потоке жидкости равна

$$\xi(z) = \frac{E_r}{E_0} =$$

$$= \frac{C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda z} - C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda z} - C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda z}}{C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda z} + C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda z} + C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda z}}; \quad (2.16)$$

где C_1^+ , C_2^+ , C_1^- , C_2^- имеют вид (2,15). Как видно из (2,16), поле $\vec{E}$ эллиптически поляризовано в плоскости (r, θ) . Отметим, что поля отраженной и прошедшей волн также эллиптически поляризованы. Зная поляризацию, можно найти направление осей эллипса поляризации. Заметим, при $\Lambda \rightarrow 0$, $\xi(z) \rightarrow 0$, что соответствует поляризации изотропной среды, т. е. при распространении электромагнитной волны в неподвижном потоке ее поляризационные свойства не меняются [7, 9].

Так как окончательные точные формулы для оптических характеристик потока имеют громоздкий вид, ограничимся соответствующими выражениями при малых Λ , т. е. при малых градиентах скорости. В этом случае компоненты поля равны:

$$E_0(z, t) = \left[\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- z} + \gamma e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- z} + (\beta e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- z} + \delta e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- z}) \Lambda \right] e^{i \omega t}$$

$$E_r(z, t) = \left[i \frac{\omega}{c} z \frac{1}{2V_{\varepsilon_1}^-} \left(\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- z} - \gamma e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}^- z} \right) \Lambda \right] e^{i \omega t}, \quad (2.17)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^-} \left(2V_{\varepsilon_0}^- + \frac{a}{g} \right), \quad \gamma = \frac{a}{g}, \quad \delta = \frac{bc - ad}{cg};$$

$$\beta = \frac{1}{V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^-} \left(\frac{V_{\varepsilon_0}^-}{V_{\varepsilon_1}^- (V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^-)} + \delta + \frac{\gamma}{2V_{\varepsilon_1}^-} \right), \quad (2.17')$$

$$a = 2V_{\varepsilon_0}^- (V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^-), \quad b = 2V_{\varepsilon_0}^- \left[\frac{1}{2V_{\varepsilon_1}^-} + i \frac{\omega}{c} \frac{l}{2V_{\varepsilon_1}^-} (V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^-) \right],$$

$$g = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 - 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0} - (\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1})^2 e^{2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} l},$$

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} + i \frac{\omega}{c} \frac{l}{2\sqrt{\varepsilon_1}} (\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon_1})^2 + \left[i \frac{\omega}{c} \frac{l}{2\sqrt{\varepsilon_1}} (\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1})^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} \right] e^{2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} l}.$$

Поляризация поля в первом приближении равна

$$\xi(z) = \frac{i \frac{\omega}{c} z \left(\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} - \gamma e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} \right)}{2\sqrt{\varepsilon_1} (\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + \gamma e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z})} \Lambda. \quad (2.18)$$

Выражение для ориентации осей эллипса поляризации в этом случае следующее:

$$\operatorname{tg} 2\varphi(z) = - \frac{2\omega z \operatorname{Im}(\gamma \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z}) \cdot \Lambda}{c \sqrt{\varepsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re}(\gamma \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z}) \right]}. \quad (2.19)$$

Относительный угол поворота осей эллипса поляризации на пути электромагнитной волны от $z = 0$ до $z = l$ равен

$$\psi = \varphi(l) - \varphi(0) =$$

$$= \frac{2\omega l \operatorname{Im}(\gamma \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} l}) \cdot \Lambda}{c \sqrt{\varepsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re}(\gamma \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} l}) \right]}.$$

Тогда в первом приближении для угла гашения, который обычно измеряется при экспериментальном изучении потоков, получаем выражение:

$$\chi = \frac{\pi}{4} - \psi =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2\omega l \operatorname{Im}(\gamma \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} l}) \cdot \Lambda}{c \sqrt{\varepsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re}(\gamma \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} l}) \right]}. \quad (2.20)$$

Зависимость χ от угловой скорости вращения внутреннего цилиндра имеет вид

$$\chi = \frac{\pi}{4} - \frac{2\omega l \operatorname{Im}(\gamma \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} l}) \cdot \lambda_1 R_2^2}{c \sqrt{\varepsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re}(\gamma \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} l}) \right] (R_1^2 - R_2^2)} \Omega, \quad (2.21)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \chi(\Omega) = \frac{\pi}{4}.$$

Как видно из (2.21), зависимость χ от Ω не противоречит экспериментальным данным Вейланда [2] и согласуется с экспериментами Цветкова [3]. Нелинейная зависимость $\chi(\Omega)$ в случае экспериментов Вейланда связана с тем, что в качестве вязкой жидкости использовался коллоидный раствор бентонита, который дает сильное двойное лучепреломление даже при небольших градиентах скорости, поэтому в разложении $\vec{E}$ по степеням Λ необходимо сохранять члены более высоких порядков по Λ .

Отметим, что для идеально гибких макромолекул в потоке между цилиндрами с вращающимся внешним цилиндром Куном [8] на основании молекулярного рассмотрения механизма двойного лучепреломления получена зависимость угла гашения от угловой скорости вращения, аналогичная (2.21). Однако формула (2.21) для $\chi(\Omega)$ получена без каких-либо специальных предположений о свойствах вязкой жидкости, заполняющей зазор между цилиндрами.

3) Вторичные течения для потока жидкости между коаксиальными цилиндрами, изменение $\vec{E}$ и оптической картины при потере устойчивости

Вопрос об устойчивости решений уравнений гидродинамики возникает в связи с тем, что не всякое строгое решение уравнений, удовлетворяющее определенным граничным и начальным условиям, может реально осуществляться в эксперименте. Для того, чтобы в действительности реализовалось движение жидкости, описываемое, например, стационарным решением $\vec{U}(\vec{r})$, необходимо, чтобы малые возмущения, возникающие в каком-либо месте потока или на его границе, затухали с течением времени. Однако, не при любом соотношении между характерными для потока силами инерции и силами вязкости будет происходить такое затухание.

При определенном соотношении между этими силами, которое удобно выражать при помощи безразмерного параметра потока (числа Рейнольдса R или какого-либо другого подходяще выбранного параметра) возникающие возмущения в потоке приводят к беспорядочному, т. е. турбулентному движению жидкости. Так, при малых R ламинарное (упорядоченное) движение жидкости, которое описывается стационарным решением $\vec{U}(\vec{r})$, может действительно наблюдаться экспериментально, однако при возрастании R происходит смена режимов и при R , больших некоторого R^* , которое называется критическим для данного потока, движение жидкости становится турбулентным; такая картина смены режимов наблюдается экспериментально [10, 11].

При исследовании вопроса о возникновении турбулентности следует исходить из того, что поля скорости и давления при любом режиме являются решениями уравнений гидродинамики. Поэтому переход ламинарного режима движения в турбулентный естественно связать с проблемой устойчивости решения, соответствующего ламинарному режиму, отождествляя возникновение турбулентности с потерей устойчивости. Однако, движение, которое наступает после потери устойчивости, не обязательно будет турбулентным. Может так случиться, что при потере устойчивости данное ламинарное движение перейдет в новое стационарное течение, а переход к турбулентному движению наступает лишь при нарушении устойчивости этого вторичного течения [10, 11]. Примером такого вторичного течения является стационарное течение после потери устойчивости в потоке несжимаемой вязкой жидкости в зазоре между концентрическими цилиндрами. Поле скоростей вторичного

потока имеет вид (в первом приближении) [11]:

$$v_r(r, z) = \Omega^2 \left[\frac{\Omega^2 \varphi_1(r)}{\alpha_1 \Omega^2 + \gamma_1 \Omega + \delta_1} + \varphi_2(r) \right] \cos kz + \dots = u(r) \cdot \cos kz; \quad (3)$$

$$v_\theta(r, z) = v_\theta^{\text{ламин}}(r) + \Omega \left[\frac{\Omega^2 f_1(r)}{\alpha_1 \Omega^2 + \gamma_1 \Omega + \delta_1} + f_2(r) \right] \cos kz + \dots = v_\theta^{\text{ламин}} + v(r) \cos kz;$$

$$v_z(r, z) = -\frac{\Omega^2}{k} \left[\frac{\Omega^2 \varphi'_1(r)}{\alpha_1 \Omega^2 + \gamma_1 \Omega + \delta_1} + \varphi'_2(r) \right] \sin kz + \dots = w(r) \cdot \sin kz;$$

где явные выражения для α_1 , γ_1 , δ_1 , $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $f_1(r)$, $f_2(r)$ не выписаны ввиду их громоздкости.

Перейдем к электродинамической части задачи. Зависимость E от $\tilde{V}$ в случае вторичного течения (3,1) имеет вид (в приближении 1,3):

$$\tilde{E} = \tilde{E}^{\text{лам}} + \tilde{E}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\Lambda & 0 \\ -\Lambda & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \frac{du}{dr} \Big|_{r_0} \cos kz & \frac{\lambda_1}{2} \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right] \Big|_{r_0} \cos kz & \frac{\lambda_1}{2} \left[\frac{dw}{dr} - ku \right] \Big|_{r_0} \sin kz \\ \frac{\lambda_1}{2} \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right] \Big|_{r_0} \cos kz & \lambda_1 \frac{u}{r} \Big|_{r_0} \cos kz & -\frac{\lambda_1}{2} kv \Big|_{r_0} \sin kz \\ \frac{\lambda_1}{2} \left[\frac{dw}{dr} - ku \right] \Big|_{r_0} \sin kz & -\frac{\lambda_1}{2} kv \Big|_{r_0} \sin kz & \lambda_1 kw \Big|_{r_0} \cos kz \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

(в дальнейшем индекс у r_0 опускается)

где $u(r)$, $v(r)$, $w(r)$ определяются соотношениями (3,1). Из уравнений Максвелла, опуская члены, квадратичные по $\tilde{e}'_{ik}$, имеем в первом приближении

$$\begin{cases} \frac{d^2 E'_\theta}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E'_\theta - \Lambda E'_r] = -\frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \cos kz \cdot E^0_r(z) + \right. \\ \quad \left. + \frac{\lambda_1}{r} u(r) \cos kz \cdot E^0_\theta(z) \right] \\ \frac{d^2 E'_r}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E'_r - \Lambda E'_\theta] = -\frac{\omega^2}{c^2} \left[\lambda_1 \frac{du}{dr} \cos kz \cdot E^0_r(z) + \right. \\ \quad \left. + \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \cos kz \cdot E^0_\theta(z) \right], \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\vec{E}^0$ соответствует полю в ламинарном потоке до потери устойчивости, а $\vec{E}'$ — электродинамическое возмущение, соответствующее вторичному течению

Введем $\mathcal{E}^{\pm} = E_{\theta}^{\pm} \pm E_r^{\pm}$, тогда уравнения для $\mathcal{E}^{+}$ и $\mathcal{E}^{-}$ разделяются:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}^{+}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_1 - \Lambda) \mathcal{E}^{+} = -\frac{\omega^2}{c^2} \lambda_1 \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) + \frac{du}{dr} \right) \cos kz \cdot E_r^0(z) + \right. \\ \left. + \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right) \cos kz \cdot E_{\theta}^0(z) \right], \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{E}^{-}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_1 + \Lambda) \mathcal{E}^{-} = -\frac{\omega^2}{c^2} \lambda_1 \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) - \frac{du}{dr} \right) \cos kz \cdot E_r^0(z) + \right. \\ \left. + \left(\frac{u}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right) \cos kz \cdot E_{\theta}^0(z) \right].$$

Решения уравнений (3.4) можно представить в форме:

$$\mathcal{E}^{+}(z) = A_1^{-} e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + A_2^{+} e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + f(z), \\ \mathcal{E}^{-}(z) = A_1^{-} e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + A_2^{-} e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + g(z), \quad (3.5)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ равны

$$f(z) = \frac{\omega^2}{2c^2} \lambda_1 \left[\frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right] \cdot \left[\frac{ae^{i \left(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \right. \\ \left. + \gamma \frac{e^{i \left(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \alpha \frac{e^{-i \left(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \gamma \frac{e^{-i \left(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} \right]; \\ g(z) = \frac{\omega^2}{2c^2} \lambda_1 \left[\frac{u}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right] \cdot \left[\frac{ae^{i \left(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \right. \\ \left. + \gamma \frac{e^{i \left(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \alpha \frac{e^{-i \left(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \gamma \frac{e^{-i \left(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} \right]; \quad (3.6)$$

$f(z)$ и $g(z)$ выписаны с точностью до членов первого порядка по Λ (λ_1); α и γ находятся по формулам (2, 17').

Воспользовавшись граничными условиями на концах цилиндров, получим систему уравнений относительно возмущенных коэффициентов отражения, преломления и прохождения, решая которую, найдем значения соответствующих постоянных. Опуская громоздкие выкладки, получим следующие выражения для E_{θ} и E_r :

$$E_{\theta} = E_{\theta}^{\text{ламин}} + E_{\theta}' = \\ = e^{i\omega t} \left[\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + \gamma e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + \left(\beta e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + \delta e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} \right) \Lambda + \right. \\ \left. + \lambda_1 \frac{u(r_0)}{r_0} F(z) \right]; \quad (3.7)$$

$$E_r = E_r^{\text{лампы}} + E_r = e^{i\omega t} \left[i \frac{\omega}{c} z \frac{1}{2V_{\varepsilon_1}} \left(\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} \right) \Lambda + \lambda \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r_0} \Phi(z) \right],$$

где

$$F(z) = \left\langle i \frac{c}{\omega} \frac{\eta'(0) - V_{\varepsilon_0} \eta(0)}{V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}} - \right. \\ \left. - \left[\frac{\left[V_{\varepsilon_0} \eta(0) - i \frac{c}{\omega} \eta'(0) \right] e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - \left[V_{\varepsilon_0} \eta'(l) - i \frac{\omega}{c} \eta(l) \right] \times \right.}{(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}) \left[(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1})^2 e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1})^2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} \right]} \right. \\ \left. \times (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}) \right\} (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1}) \left[e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \right. \\ \left. + \frac{\left[\left[V_{\varepsilon_0} \eta(0) - i \frac{c}{\omega} \eta'(0) \right] e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - \left[V_{\varepsilon_0} \eta'(l) - \right. \right.}{(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1})^2 e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1})^2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l}} \right. \\ \left. \left. - i \frac{c}{\omega} \eta(l) \right] (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}) \right] e^{\frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \\ \left. + \frac{1}{2} \eta(z) \right]; \quad (3.8) \\ \Phi(z) = \left[\frac{i \frac{c}{\omega} \zeta'(0) - V_{\varepsilon_0} \zeta(0)}{V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}} - \right. \\ \left. - \left[\frac{\left[V_{\varepsilon_0} \zeta(0) - i \frac{c}{\omega} \zeta'(0) \right] e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - \left[V_{\varepsilon_0} \zeta'(l) - \right. \right.}{(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}) \left[(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1})^2 e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1})^2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} \right]} \right. \\ \left. \left. - i \frac{c}{\omega} \zeta(l) \right] (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}) \right\} (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1}) \left[e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \right. \\ \left. + \frac{\left[\left[V_{\varepsilon_0} \zeta(0) - i \frac{c}{\omega} \zeta'(0) \right] e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - \right.}{(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1})^2 e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1})^2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l}} \right. \\ \left. \left. - \left[V_{\varepsilon_0} \zeta'(l) - i \frac{c}{\omega} \zeta(l) \right] (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}) \right] e^{\frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \zeta(z) \right];$$

$$\eta(z) = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\alpha \frac{e^{i(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1})z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1}} + \gamma \frac{e^{i(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1})z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1}} + \right. \\ \left. + \alpha \frac{e^{-i(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1})z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1}} + \gamma \frac{e^{-i(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1})z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1}} \right];$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{2} \eta(z).$$

Поляризация суммарного поля равна

$$\xi(z) = \frac{E_r^0 + E_r'}{E_\theta^0 + E_\theta'} = \\ = \frac{i \frac{\omega}{c} z \frac{1}{2 \sqrt{\epsilon_1}} \left(\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} z} - \gamma e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} z} \right) \Lambda + \lambda_1 \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right] \Big|_{r=r_0} \cdot \Phi(z)}{\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} z} + \gamma e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} z}}; \quad (3.9)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \xi(z) = 0.$$

Как видно из (3.9), электромагнитная волна, распространяющаяся в потоке жидкости после потери устойчивости, эллиптически поляризована.

Выражение для угла ориентации осей эллипса поляризации следующее:

$$\operatorname{tg} 2\varphi(z) = \vartheta_1(z) \Lambda + \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=r_0} \cdot \vartheta_2(z),$$

где

$$\vartheta_1(z) = - \frac{2\omega z \operatorname{Im} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} z} \right)}{c \sqrt{\epsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} z} \right) \right]};$$

$$\vartheta_2(z) = \frac{2 \operatorname{Re} \left\{ \lambda_1 \left(\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} z} + \gamma e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} z} \right) \bar{\Phi}(z) \right\}}{|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} z} \right)},$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2\varphi(z) = 0.$$

Тогда общий вид зависимости угла гашения от Ω следующий:

$$\chi(\Omega) = \frac{\pi}{4} - \frac{A\Omega^3 + B\Omega^2 + C\Omega}{D\Omega^2 + F\Omega + G},$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \chi(\Omega) = \frac{\pi}{4}. \quad (3.10)$$

Явные выражения для постоянных A, B, C, D, F, G опущены.

Как видно из (3, 10), зависимость χ от Ω носит более сложный характер по сравнению с $\chi(\Omega)$ для исходного ламинарного режима даже при тех грубых приближениях, которые привели к (3, 10). Изломам на экспериментальной кривой соответствуют области быстрого изменения χ как функции от Ω в (3, 10).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Фрохт. Фотоупругость, тт. I и II, 1948.
2. H. Wayland, I. Appl. Phys., v. 26, № 10, 1955.
3. В. Н. Цветков. Вестник ЛГУ, № 1, 1947.
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, 1959.
5. И. И. Гольденблат. Некоторые вопросы механики деформируемых сред, 1955.
6. И. Седов. Введение в механику сплошной среды, 1962.
7. В. Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме, 1960.
8. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Теория поля, 1960.
9. Helv. chim. acta, Bd. 26, s. 1395, 1943.
10. M. Born, E. Wolf. Principles of optics, 1959.
11. А. С. Монин и А. М. Яглом. ПМТФ, № 5, 1960.
12. S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, 1961.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Лазебный

Оптическая анизотропия в потоке вязкой жидкости характеризуется следующей зависимостью тензора диэлектрической проницаемости $\check{\epsilon}$ от тензора скоростей деформации $\check{V}$ [1]:

$$\check{\epsilon} = [\epsilon_1 + f_1(I_1, I_2, I_3)] \cdot I + f_2(I_1, I_2, I_3) \cdot \check{V} + f_3(I_1, I_2, I_3) V^2, \quad (1)$$

где I_1, I_2, I_3 — главные инварианты тензора $\check{V}$, причем для несжимаемой жидкости $I_1 = v_{ii} = 0$.

При рассмотрении оптических явлений в ламинарных потоках можно ограничиться линейным приближением по $\check{V}$ и его компонентам в соотношении (1) [1].

$$\check{\epsilon} = \epsilon_1 I + \lambda \check{V}. \quad (2)$$

Однако, после потери устойчивости и наступления турбулентного режима в зависимости $\check{\epsilon}$ от $\check{V}$ необходимо учитывать члены более высоких порядков по $\check{V}$. Так, учитывая члены второго порядка по $\check{V}$, имеем из (1):

$$\check{\epsilon} = (\epsilon_1 + \mu_1 I_2) \cdot I + \mu_2 \check{V} + \mu_3 \check{V}^2 \quad (3)$$

или в компонентах

$$\epsilon_{ik} = (\epsilon_1 + \mu_1 I_2) \delta_{ik} + \mu_2 v_{ik} + \mu_3 v_{ie} v_{ek}, \quad (4)$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — динамооптические постоянные, а $I_2 = v_{ik} \cdot v_{ik}$.

При турбулентном режиме движения жидкости $\check{V}$, а, значит, и $\check{\epsilon}$ являются случайными тензорными полями и поэтому при электродинамическом исследовании турбулентных потоков можно построить или усредненную оптическую картину потока, или найти вероятностные характеристики электродинамических и оптических величин.

Построение усредненной оптической картины сводится к нахождению $\check{\epsilon}$ (черта сверху означает усреднение) и последующему решению уравнений Максвелла с диэлектрическим тензором $\check{\epsilon}$ при соответствующих граничных условиях.

Для того, чтобы найти $\check{E}$, усредним соотношение (4), тогда

$$\overline{\epsilon_{ik}} = (\epsilon_1 + \mu_1 \overline{v_{ik} \cdot v_{ik}}) \delta_{ik} + \mu_2 \overline{v_{ik}} + \mu_3 \overline{v_{ie} \cdot v_{ek}}.$$

Рассмотрим, как обычно, пульсации скорости

$$v_i = \overline{v_i} + v'_i (v_{en} = \overline{v_{en}} + \overline{v'_{en}}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon_{ik}} = & (\epsilon_1 + \mu_1 \overline{v_{ik} \cdot v_{ik}} + \mu_1 \overline{v'_{ik} \cdot v'_{ik}}) \delta_{ik} + \\ & + \mu_2 \overline{v_{ik}} + \mu_3 \overline{v_{ie} \cdot v_{ik}} + \mu_3 \overline{v'_{ie} \cdot v'_{ik}}. \end{aligned}$$

Пренебрегая корреляциями производных компонент пульсаций скорости, получим

$$\overline{\epsilon_{ik}} = (\epsilon_1 + \mu_1 \overline{v_{ik} \cdot v_{ik}}) \delta_{ik} + \mu_2 \overline{v_{ik}} + \mu_3 \overline{v_{ie} \cdot v_{ik}}. \quad (5)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении зависимость $\check{E}$ от $\check{V}$ получается такая же, как и при построении $\check{E}(\check{V})$ по формуле (3).

Для турбулентного куэттовского потока между коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 (с вращающимся внутренним цилиндром, угловая скорость его вращения Ω) выражение для $\check{V}$ имеет вид [2]

$$\frac{\check{V}}{V} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r - \beta R_1}} & 0 \\ -\frac{\Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r - \beta R_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где α и β — безразмерные эмпирические параметры.

По известному $\check{V}$ находим $\check{E}$:

$$\frac{\check{V}}{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)} & -\frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} & 0 \\ -\frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} & \epsilon_1 + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

где $\lambda_1 = \mu_2$, $\lambda_2 = \mu_1 + \mu_3$.

При нормальном падении электромагнитной волны на поток (с направлением распространения вдоль оси цилиндров z) система уравнений Максвелла имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_r}{dz^2} + \frac{\omega}{c^2} \left[\left(\epsilon_1 + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)} \right) E_r - \frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} E_0 \right] = 0 \\ \frac{d^2 E_0}{dz^2} + \frac{\omega}{c^2} \left[-\frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} E_r + \left(\epsilon_1 + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)} \right) E_0 \right] = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Как и в случае ламинарного куэттовского потока [1] введём

$$E^\pm = E_0 \pm E_r.$$

Тогда для $E^\pm$ уравнения разделяются

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E^+}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\varepsilon_1 - \frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)} \right] E^+ &= 0 \\ \frac{d^2 E^-}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\varepsilon_1 + \frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)} \right] E^- &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Так как уравнения (7), (8) совпадают по форме с уравнениями для $\vec{E}$ в случае ламинарного куэттовского потока и подробно рассмотрены в работе [1], то можно сразу выписать соответствующие выражения для компонент поля

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{1}{2} e^{i\omega t} \left[C_1^+ e^{-ik_1 z} + C_2^+ e^{ik_1 z} + C_1^- e^{-ik_2 z} + C_2^- e^{ik_2 z} \right] \\ E_r &= \frac{1}{2} e^{i\omega t} \left[C_1^+ e^{-ik_1 z} + C_2^+ e^{ik_1 z} - C_1^- e^{-ik_2 z} - C_2^- e^{ik_2 z} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\varepsilon_1 - \frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)} \right]; \\ k_2^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\varepsilon_1 + \frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)} \right]; \\ C_1^+ &= \frac{2 \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0} + n_1} - \frac{2 \sqrt{\varepsilon_0} (\sqrt{\varepsilon_0} - n_1) e^{-ik_1 l}}{[\sqrt{\varepsilon_0} + n_1] [(\sqrt{\varepsilon_0} - n_1)^2 e^{-ik_1 l} - (\sqrt{\varepsilon_0} + n_1)^2 e^{ik_1 l}]}; \\ C_2^+ &= \frac{2 \sqrt{\varepsilon_0} (\sqrt{\varepsilon_0} - n_1) e^{-ik_1 l}}{(\sqrt{\varepsilon_0} - n_1)^2 e^{-ik_1 l} - (\sqrt{\varepsilon_0} + n_1)^2 e^{ik_1 l}}; \\ C_1^- &= \frac{2 \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0} + n_2} - \frac{2 \sqrt{\varepsilon_0} (\sqrt{\varepsilon_0} - n_2) e^{-ik_2 l}}{[\sqrt{\varepsilon_0} + n_2] [(\sqrt{\varepsilon_0} - n_2)^2 e^{-ik_2 l} - (\sqrt{\varepsilon_0} + n_2)^2 e^{ik_2 l}]}; \\ C_2^- &= \frac{2 \sqrt{\varepsilon_0} (\sqrt{\varepsilon_0} - n_2) e^{-ik_2 l}}{(\sqrt{\varepsilon_0} - n_2)^2 e^{-ik_2 l} - (\sqrt{\varepsilon_0} + n_2)^2 e^{ik_2 l}}; \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что, как и в случае ламинарного потока, компоненты поля E_r и E_θ являются суммой двух нормальных волн, каждая из которых характеризуется соответствующей фазовой скоростью

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 - \frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)}}} \quad \text{или} \quad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 + \frac{\lambda_1 \Omega \sqrt{R_2}}{\alpha \sqrt{r_0 - \beta R_1}} + \frac{\lambda_2 \Omega^2 R_2}{\alpha^2 (r_0 - \beta R_1)}}}$$

и поляризации — обе нормальные волны линейно поляризованы. Поле в потоке, как видно из (9) и (10), эллиптически поляризовано в плоскости (r, θ) ; поля отраженной и прошедшей поток волн также эллиптически поляризованы.

Явные выражения для угла ориентации осей эллипса поляризации и угла гашения не выписаны ввиду их громоздкости, однако, в первом приближении (при малых $\Lambda_1 = \lambda_1 \Omega$ и $\Lambda_2 = \lambda_2 \Omega^2$) выражение для угла гашения согласуется с экспериментальными данными Вейланда для центра зазора.

Рассмотрим теперь кратко возможный способ построения вероятностных характеристик электромагнитного поля. Найдем уравнение для характеристического функционала, который полностью описывает вероятностные свойства электромагнитного поля.

Запишем систему уравнений Максвелла в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} (\overset{V}{E}^{-1} \cdot \vec{D}), \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \vec{H}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\overset{V}{E}^{-1} \cdot \vec{D}$ — диадное произведение, а $\overset{V}{E}^{-1} \cdot \vec{E} = I$ (I — единичный тензор).

При турбулентном режиме движения жидкости $\vec{E}(\vec{V})$ является случайным тензорным полем, поэтому $\vec{D}$ и $\vec{H}$ представляют собой случайные векторные поля. Рассмотрим характеристический функционал шестимерного вектора $\vec{f}(\vec{r}, t) = (H_1, H_2, H_3, D_1, D_2, D_3)$

$$\Phi_t[\vec{g}] = \langle \exp [i(\vec{g} \cdot \vec{f})] \rangle \quad (12)$$

где $\vec{g}(\vec{r})$ — шестимерный неслучайный вектор, а скалярное произведение $(\vec{g} \cdot \vec{f})$ определяется следующим образом

$$\begin{aligned} (\vec{g} \cdot \vec{f}) = & \int g_i(\vec{r}) f_i(\vec{r}, t) dV = \int g_\alpha(\vec{r}) H_\alpha(\vec{r}, t) dV + \\ & + \int g_\beta(\vec{r}) D_\beta(\vec{r}, t) dV \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ \beta = 4, 5, 6 \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

(скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по фазовому пространству [3] — [6]).

Продифференцировав (12) по t и воспользовавшись уравнениями «движения» (11), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_t[\vec{g}]}{\partial t} = & i c \varepsilon_{kn}^\beta \int g_\beta(\vec{r}) \left\langle \frac{\partial H_k}{\partial x_n} \exp [i(\vec{g} \cdot \vec{f})] \right\rangle dN - \\ & - i c \varepsilon_{lm}^\alpha \int g_\alpha(\vec{r}) \left\langle \frac{\partial (\varepsilon_{\gamma l}^{-1} D_\gamma)}{\partial x_m} \exp [i(\vec{g} \cdot \vec{f})] \right\rangle dN, \end{aligned} \quad (13)$$

где ε_{ik}^β — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Представим $\vec{E}^{-1}$ в виде

$$\vec{E}^{-1} = \vec{P} = \vec{P} + \vec{P}', \quad (14)$$

где $\vec{P}'$ — «пульсационная» часть тензора $\vec{E}^{-1}$ (здесь для удобства введено обозначение $\vec{E}^{-1} = \vec{P}$). В компонентах выражение (14) запишется следующим образом:

$$p_{ik} = \bar{p}_{ik} + p'_{ik} = \bar{p}_{ik} \left(1 + \frac{p'_{ik}}{\bar{p}_{ik}} \right). \quad (15)$$

Предположим, что $\frac{p_{ik}}{\rho_{ik}} \ll 1$ для $i, k = 1, 2, 3$, тогда уравнение (13) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_t[g]}{\partial t} = & i c \varepsilon_{kn}^{\beta} \int g_{\beta}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \Phi_t[g]}{\partial g_k} \right) dV - \\ & - i c \varepsilon_{em}^{\alpha} \int g_{\alpha}(\vec{r}) \bar{p}_{e\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial \Phi_t[g]}{\partial g_{\gamma}} \right) dV - \\ & - i c \varepsilon_{em}^{\alpha} \int g_{\alpha}(\vec{r}) \frac{\partial \bar{p}_{e\gamma}}{\partial x_m} \frac{\partial \Phi_t[g]}{\partial g_{\gamma}} dV. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) представляет собой аналог Ф-уравнения Хопфа в теории турбулентности [3]. Отметим, что такой подход возможен и при рассмотрении корреляционной теории электромагнитных полей, особенно при нахождении корреляционных моментов высоких порядков, так как по известному характеристическому функционалу можно определить корреляционные моменты любых порядков [7—8].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Герман и А. А. Лазебный. Оптический метод исследования потоков вязкой несжимаемой жидкости. См. статью в настоящем сборнике.
2. W. Squire. Appl. Sci. Res., s. A, v. 10, p. 439, 1961.
3. E. Hopf. I. Ration. Mech. Anal., v. 1, p. 87, 1952.
4. G. Rozen. Phys. of Fluids, v. 3, № 4, 1960 (p. I).
5. G. Rozen. Phys. of Fluids, v. 3, № 4, 1960.. (p. II).
6. Новиков. ЖЭТФ, т. 47, в. 5, 1964 г.
7. P. Roman, E. Wolf. Nuovo Cimento, v. XVII, № 4, p. I, 1960.
8. P. Roman, E. Wolf. Nuovo Cimento, v. XVII, № 4, p. II, 1960.