УДК 517.547.2

*О. М. КАТКОВА*

# ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С АСИМПТОТИЧЕСКИ КРАТНО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Введение. В связи с проблемой определения числа корней полинома на отрезке по коэффициентам полинома Фекете [1] ввел понятие, обобщающее понятие положительной последовательности. Позднее оно было расширено Шенбергом [2] и приобрело вид:

Определение 1. *Пусть $m$ — натуральное число. Последовательность $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \in l^1$ называется $m$-кратно положительной, если все миноры порядков $\nu = 1, 2, \ldots, m+1$ матрицы*

$$A = \| a_{i-j} \|_{i,\, j \in \mathbf{Z}}, \tag{1}$$

*(считаем $a_k = 0$ при $k < 0$ неотрицательны). Последовательность, $m$-кратно положительная при любом $m \in N$, называется вполне положительной.*

Известно [1, 3], что $m$-кратно положительные последовательности обладают следующим свойством. Пусть последовательность $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ имеет $s \leqslant m$ знакоперемен, а $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ $m$-кратно положительная последовательность. Тогда их свертка имеет не более $s$ знакоперемен. Для вполне положительных последовательностей это верно без ограничения на $s$.

Производящие функции вполне положительных последовательностей полностью описаны в работе Эйсена, Уитни, Шенберга, Эдрея [4]. Возникает вопрос об описании производящих функций для $m$-кратно положительных последовательностей. Шенберг [2] исследовал случай конечных последовательностей. Ему принадлежит следующая теорема.

**Теорема А [2].** *Полином $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ с $m$-кратно положительной последовательностью коэффициентов не имеет корней в секторе*

$$|\arg z| \leqslant \frac{m\pi}{m+n-1}. \tag{2}$$

*Оценку (2) улучшить нельзя.*

В настоящей работе рассматривается вопрос о расположении корней целых трансцендентных функций с $m$-кратно положительными последовательностями коэффициентов. Решить его в полном объеме не удалось. Для формулировки нашего результата введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть $m$ — натуральное число. Последовательность $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \in l^1$ назовем асимптотически $m$-кратно положительной, если существует такое $N$, что все миноры матрицы*

$$A_N = \| a_{N+i-j} \|, \tag{3}$$

*где $i \in N$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$ ($a_k = 0$ при $k < 0$) неотрицательны.*

**Теорема 1.** *Пусть $m$ — натуральное число. $A$ — не более, чем счетное множество в $\mathbf{C}$ (среди точек $A$ могут быть кратные), не имеющее конечной предельной точки, симметричное относительно вещественной оси $\mathbf{R}$ и не пересекающееся с полуосью $\mathbf{R}_+$. Существует целая функция $G$ с положительной и асимптотически $m$-кратно положительной последовательностью коэффициентов, нулевое множество которой совпадает с $A$.*

Теорема 1 является непосредственным следствием такого результата, представляющего, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

**Теорема 2.** *Пусть $g$ — целая трансцендентная функция, положительная на полуоси $R_+$. Существует целая функция $g_1$, не имеющая нулей и такая, что функции $g_1$ и $gg_1$ обладают положительными и асимптотически $m$-кратно положительными последовательностями коэффициентов при любом $m \in N$.*

Из теоремы 2 непосредственно вытекает также такой факт.

С л е д с т в и е. *Пусть $m$ — натуральное число. Любая целая функция $f$, положительная на полуоси $\boldsymbol{R}_+$, допускает представление $f = G/g$, где $G$ и $g$ — целые функции с положительными и асимптотически $m$-кратно положительными последовательностями коэффициентов, причем функция $g$ не имеет нулей.*

Работа состоит из 4 параграфов, 1—3 посвящены доказательству теоремы 2. Оно основано на методе, примененном И. В. Островским [5]. Сначала (п. 1) берем целую функцию $g$, положительную на полуоси $\boldsymbol{R}_+$, нулевое множество которой совпадает с $A$, и по ней с помощью приема работы [5] строим «домножающую» функцию $g_1$. Далее получаем выражение для диагональных миноров матрицы (1), составленной из коэффициентов произведения $G = gg_1$, в виде кратных интегралов по кубу $Q^m = \{(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m) \in \boldsymbol{R}^m : -\pi \leqslant \zeta_j \leqslant \pi,\ j = 1, 2, \ldots, m\}$. Для исследования асимптотики интегралов разбиваем область интегрирования на две:

$$q_\varepsilon^m = \{(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m) \in \boldsymbol{R}^m : -\varepsilon \leqslant \zeta_j \leqslant \varepsilon,\ j = 1, 2, \ldots, m\}$$

и $Q^m \diagdown q_\varepsilon^m$, где $\varepsilon$ подбирается специально. П.2 посвящен оценке снизу интеграла по $q_\varepsilon^m$, а п.3 — оценке сверху интеграла по $Q^m \diagdown q_\varepsilon^m$. Итогом п. 2, 3 является строгая положительность диагональных миноров матрицы (3) при достаточно большом $N$. В п. 4 с помощью одной теоремы Шенберга [2] показываем, что положительность диагональных миноров влечет положительность всех миноров, и завершаем доказательство теоремы.

§ 1. Пусть $A$ — множество, фигурирующее в условиях теоремы 1. Обозначим $A_1 = A \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $A_2 = A \cap \{z < 0\}$. Пусть $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ — канонические произведения Вейерштрасса, составленные по $A_1$, $A_2$, $\overline{A}_A$ соответственно, где $\overline{A}_1$ — множество, симметричное относительно вещественной оси. Тогда функция $g = \pi_1\pi_2\pi_3$ положительна на полуоси $\boldsymbol{R}^+$, и ее нулевое множество совпадает с $A$.

Если мы покажем, что существует целая функция $g_1$, не имеющая нулей и такая, что $g_1$ и $G = gg_1$ — целые функции с положительными и асимптотически $m$-кратно положительными последовательностями коэффициентов, то теоремы 1, 2 будут доказаны.

Обозначим через $B$ класс целых функций вида

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt},\ t \in \boldsymbol{C}, \tag{4}$$

удовлетворяющих условию $f(i\eta) > 0$, $\eta \in \boldsymbol{R}$ (5). Заметим, что из (5) следует, что все коэффициенты в (4) вещественны. Пусть $B_+$ — подкласс в $B$, состоящий из функций вида (4) с положительными коэффициентами $c_k$, а $B_A^m$ — подкласс в $B_+$, состоящий из функций (4) с асимптотически $m$-кратно положительными последовательностями коэффициентов $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$. Замена переменной $z \to e^{it}$ переводит класс $F$ целых функций $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, удовлетворяющих условию $g(x) > 0$, $x \in$

$\in \boldsymbol{R}_+$ в класс $B$. Обозначим через $F^+$ и $F^m$ подклассы в $F$, переходящие при этой замене в $B_+$ и $B_+^m$. Наша задача сводится к тому, чтобы доказать, что для любой функции $f \in B$ существует функция $f_1 \in B_+$, не имеющая нулей и такая, что $f_1$ и $ff_1 \in B_+^m$. Именно этим мы будем далее заниматься.

Пусть $f$ — функция класса $B$. В силу (5) существует непрерывная на полуоси $[0, \infty)$ функция $\delta(r)$ такая, что в круге $\{t: |t-i\eta| < \delta(|\eta|), \eta \in \boldsymbol{R}\}$ имеем $f(t) \neq 0$.

Введем непрерывную на полуоси $[0, \infty)$ функцию

$$G(r) = \max_{\zeta \in R,\ 0 > \eta > -r} \{\ln^+|f(\zeta + i\eta)| + |\ln f(i\eta)| + \\ + 2|(\ln f(i\eta))''| + 1\}. \tag{6}$$

Далее нам понадобится следующая лемма из [5].

Лемма 1. *Пусть $q(r) > 1$ — непрерывная функция на полуоси $[0, \infty)$, а $\beta$ — положительное число. Существует целая функция $h$ вида*

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(ke^z),\ a_k \geqslant 0, \tag{7}$$

удовлетворяющая условиям: $h(r) \geqslant q(r),\ r \geqslant 0$ **(8)**, $h(r + h^{-\beta}(r)) \leqslant Ch(r),\ r \geqslant 0$ **(9)**, где $C > 1$ не зависит от $r$.

Согласно этой лемме существует целая функция $h$ вида (7), удовлетворяющая условиям: $h(r) \geqslant \max\{\delta^{-7}(r),\ 2G^{22}(r)\},\ r \geqslant 0$ **(10)**, $h(r + h^{-1/8}(r)) \leqslant Ch(r),\ r \geqslant 0$ **(11)**, где $C > 1$ не зависит от $r$.

Положим

$$\psi(t) = \exp h(it),\ \varphi(t) = f(t)\psi(t). \tag{12}$$

Очевидно, $\psi \in B_+$ и не имеет нулей, а $\varphi \in B$ и $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$, где коэффициенты $c_k$ действительны. Так как функция $\varphi$-целая, $2\pi$-периодическая, то при любом $\eta \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < \pi} e^{-ik\zeta} e^{k\eta} \varphi(\zeta + i\eta)\, d\zeta. \tag{13}$$

Так как $c_k \in \boldsymbol{R}$, $\varphi(i\eta) > 0$, то вещественны интегралы

$$b_k = \int_{|\zeta| < \pi} e^{-ik\zeta} \varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta)\, d\zeta = \frac{2\pi c_k}{e^{k\eta}\varphi(i\eta)}. \tag{14}$$

Чтобы доказать, что последовательность $\{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ асимптотически $m$-кратно положительна, сначала покажем, что для любого $\nu = 1, 2, \ldots$ существует натуральное $k_\nu^0$ такое, что при любом $k \geqslant k_\nu^0$ определители $C_k^\nu = \det \| c_{k+t-j} \|_{0 < t,\ j < \nu-1}$ положительны.

Заметим, что $\operatorname{sign} C_k^\nu = \operatorname{sign} B_k^\nu$ **(15)**, где $B_k^\nu = \det \| b_{k+t-j} \|_{0 \leqslant t,\, j \leqslant \nu-1}$, так как в силу (14) $B_k^\nu = \frac{2\pi}{\varphi(i\eta)} \frac{1}{e^{k\nu\eta}} C_k^\nu$, $\varphi(i\eta) > 0$ $(\eta \in \boldsymbol{R})$. Таким образом, достаточно исследовать определители $B_k^\nu$.

Введем обозначение

$$\Delta_{a,\, b}^\nu (f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\nu)) = \int \cdots \int\limits_{a \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_\nu \leqslant b} f(x_1,\ \ldots,\ x_\nu)\, dx_1 \ldots dx_\nu,$$

где $f$ — произвольная интегрируемая функция. Воспользуемся следующим известным фактом.

**Лемма 2** [6, с. 72]. *Пусть* $2\nu$ *функций:* $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_\nu(x)$, $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_\nu(x)$ *интегрируемы по Риману в интервале* $a \leqslant x \leqslant b$. *Тогда*

$$\det \left\| \int_a^b f_\alpha(x) \varphi_\beta(x)\, dx \right\|_{1 \leqslant \alpha,\, \beta \leqslant \nu} = \Delta_{a,\, b}^\nu (\det \| f_\alpha(x_\beta) \|_{1 \leqslant \alpha,\, \beta \leqslant \nu} \times$$

$$\times \det \| \varphi_\alpha(x_\beta) \|_{1 \leqslant \alpha,\, \beta \leqslant \nu}).$$

Из (14) следует, что

$$B_k^\nu = \det \left\| \int\limits_{|\zeta| \leqslant \pi} e^{-i(k+t-j)\zeta} \varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta)\, d\zeta \right|_{0 \leqslant t,\, j \leqslant \nu-1}.$$

Применим к $B_k^\nu$ лемму 2, взяв

$$f_1 = e^{-ik\zeta} \frac{\varphi(\zeta + i\eta)}{\varphi(i\eta)}, \quad f_2 = e^{-i(k-1)\zeta} \frac{\varphi(\zeta + i\eta)}{\varphi(i\eta)},\ \ldots,$$

$$f_\nu = e^{-i(k-\nu+1)\zeta} \frac{\varphi(\zeta + i\eta)}{\varphi(i\eta)},\ \varphi_1 = 1,\ \varphi_2 = e^{-i\zeta},\ \ldots,\ \varphi_\nu = e^{-i(\nu-1)\zeta}.$$

Получим

$$B_k^\nu = \Delta_{-\pi,\, \pi}^\nu \left( \det \left\| e^{-i(k-j)\zeta_t} \frac{\varphi(\zeta_t + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right\|_{1 \leqslant t,\, j \leqslant \nu} \times \right.$$

$$\times \det \| e^{ij\zeta_t} \|_{1 \leqslant t,\, j+1 \leqslant \nu} = \Delta_{-\pi,\, \pi}^\nu \Big( \Big| \prod_{1 \leqslant p < j \leqslant \nu} (e^{i\zeta_j} - e^{i\zeta_p}) \Big|^2 \times$$

$$\times \prod_{j=1}^\nu \left( e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi(\zeta_j + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) \Big) = \Delta_{-\pi,\, \pi}^\nu \Big( \prod_{1 \leqslant p < j \leqslant \nu} 4 \sin^2 \frac{\zeta_p - \zeta_j}{2} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^\nu \left( e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi(\zeta_j + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) \Big).$$

Так как все элементы $B_k^\nu$ вещественны, то

$$B_k^\nu = \Delta_{-\pi,\, \pi}^\nu \left( \prod_{1 \leqslant p < j \leqslant \nu} 4 \sin^2 \frac{\zeta_p - \zeta_j}{2} \operatorname{Re} \left( \prod_{j=1}^\nu e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi(\zeta_j - i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) \right).$$

Вводя обозначение $\|\zeta\| = \max\limits_{1 < j < \nu} |\zeta_j|$ и замечая, что подынтегральная функция в интеграле $\Delta^{\nu}_{-\pi,\,\pi}$ не меняется при любой перестановке переменных, получаем

$$B_k^{\nu} = \frac{1}{\nu!} \int\limits_{\|\zeta\| < \pi} \prod_{1 < p < j < \nu} 4 \sin^2 \frac{\zeta_p - \zeta_j}{2} \operatorname{Re} \Big( \prod_{j=1}^{\nu} e^{-ik\zeta_j} \varphi (\zeta_j + $$

$$+ i\eta)/\varphi (i\eta) \Big) d\zeta_1 \ldots d\zeta_{\nu} = \frac{1}{\nu!} \Big( \int\limits_{\|\zeta\| < \varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon < \|\zeta\| < \pi} \Big) \times$$

$$\times \Big( \Big( \prod_{1 \leqslant p < j \leqslant \nu} 4 \sin^2 \frac{\zeta_p - \zeta_j}{2} \Big) \operatorname{Re} \Big( \prod_{j=1}^{\nu} e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi (\zeta_j - i\eta)}{\varphi (i\eta)} \Big) d\zeta_1 \ldots d\zeta_{\nu} \Big) =$$

$$= \Delta^{\nu}_{-\varepsilon,\,\varepsilon} + I^{\nu}. \qquad (16)$$

Здесь величина $\varepsilon = \varepsilon (\eta) > 0$ будет выбрана позднее.

§ 2. Оценим снизу интеграл $\Delta^{\nu}_{-\varepsilon,\,\varepsilon}$. Для этого нам понадобятся некоторые свойства функции $b(\eta) = \ln \varphi (i\eta)$, $\eta \in \boldsymbol{R}$. Положим $\varkappa(\eta) = \min \{\delta (|\eta|),\ h^{-1/8} (-\eta)\}$ **(17)**. Будем пользоваться следующим результатом из [5].

**Лемма 3** [5, с. 110]. *Справедливы неравенства*:

$$b (\eta) \geqslant \frac{1}{2} h (-\eta), \ \ \eta < 0, \qquad (18)$$

$b''(\eta) > \frac{1}{2} h (-\eta)$, $\eta < 0$ **(19)**, $|b^{(k)} (\eta)| \leqslant Ak! h (-\eta) (\varkappa (\eta))^{-k}$ **(20)**, *где* $k = 1, 2, \ldots;\ \eta < 0;\ A > 0$ *не зависит от* $k$ *и* $\eta$.

Изучим подынтегральную функцию в интеграле $\Delta^{\nu}_{-\varepsilon,\,\varepsilon}$. Функция $\varphi$ не обращается в нуль в круге $\{t : |t - i\eta| \leqslant \varkappa (\eta)\}$, поэтому при $|\zeta| \leqslant \varkappa (\eta)$ имеем разложение

$$\ln \Big\{ e^{-ik\zeta} \frac{\varphi (\zeta + i\eta)}{\varphi (i\eta)} \Big\} = -ik\zeta + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^{-j} \zeta^j}{j!} b^{(j)} (\eta). \qquad (21)$$

В силу (19) функция $b'(\eta)$ строго монотонна при $\eta < 0$, причем $b'(\eta) \to -\infty$ при $\eta \to -\infty$. Поэтому при всех достаточно больших $k > 0$ уравнение $b'(\eta) = -k$ **(22)** имеет единственное решение $\eta = \eta(k)$. Такой выбор $\eta$ позволяет записать равенство (21) в виде

$$\ln \Big\{ e^{-ik\zeta} \frac{\varphi (\zeta + i\eta)}{\varphi (i\eta)} \Big\} = -\frac{1}{2} \zeta^2 b''(\eta) + \tau (\zeta, \eta), \qquad (23)$$

где $\tau (\zeta, \eta) = \sum\limits_{j=3}^{\infty} \frac{i^{-j} \zeta^j}{j!} b^{(j)} (\eta)$. Используя оценку (20), получим

$$|\tau (\zeta, \eta)| \leqslant \sum_{j=3}^{\infty} Ah (-\eta) (|\zeta| / \varkappa (\eta))^j =$$

$$= Ah (-\eta) (|\zeta| / \varkappa (\eta))^3 (1 - |\zeta| / \varkappa (\eta)),$$

откуда при $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2} \varkappa (\eta)$ следует $|\tau (\zeta, \eta)| \leqslant 2Ah (-\eta) (|\zeta| / \varkappa (\eta))^3$.

Выберем величину $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$ следующим образом:

$$\varepsilon(\eta) = \frac{1}{2}\varkappa(\eta)(A\nu h(-\eta))^{-1/3}. \tag{24}$$

Тогда при $|\zeta| \leqslant \varepsilon(\eta)$ будем иметь $|\tau(\zeta, \eta)| \leqslant \frac{1}{4\nu}$ (25). Учитывая (23), получим

$$\ln\left(\prod_{j=1}^{\nu} e^{-ik\zeta_j}\frac{\varphi(\zeta_j + i\eta)}{\varphi(i\eta)}\right) = -\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{2}\zeta_j^2 b''(\eta) + \sum_{j=1}^{\nu}\tau(\zeta_j, \eta).$$

В силу (25) при $|\zeta| \leqslant \varepsilon(\eta)$ имеем $\left|\sum_{j=1}^{\infty}\tau(\zeta_j, \eta)\right| \leqslant \frac{1}{4}$, поэтому $\mathrm{Re}\times$ $\times\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^{\nu}\tau(\zeta_j, \eta)\right)\right\} \geqslant L$, где $L > 0$ — абсолютная постоянная. Учитывая (20) с $k = 2$, при $|\zeta| \leqslant \varepsilon(\eta)$ имеем:

$$\mathrm{Re}\left\{\prod_{j=1}^{\nu}\left(e^{-ik\zeta_j}\frac{\varphi(\zeta_j + i\eta)}{\varphi(i\eta)}\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\exp\left(-\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{2}b''(\eta)\zeta_j^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{\nu}\tau(\zeta_j, \eta)\right)\right\} \geqslant L\exp\left(-\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{2}b''(\eta)\zeta_j^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant L\prod_{j=1}^{\nu}\{\exp(-Ah(-\eta)(\zeta_j/\varkappa(\eta))^2\}. \tag{26}$$

Поэтому

$$\Delta_{-\varepsilon,\,\varepsilon}^{\nu} \geqslant L^0(\nu)\,\Delta_{-\varepsilon,\,\varepsilon}^{\nu}\Big(\prod_{1 \leqslant t < j \leqslant \nu}(\zeta_t - \zeta_j)^2 \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{\nu}\exp\{-Ah(-\eta)(\zeta_j/\varkappa(\eta))^2\}\Big).$$

Полагая $\mu = \mu(\eta) = \sqrt{2Ah(-\eta)}/\varkappa(\eta)$ и делая замену переменных $u_j = \mu\zeta_j$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, в интеграле, стоящем в правой части, получаем оценку

$$\Delta_{-\varepsilon,\,\varepsilon}^{\nu} \geqslant L^0(\nu)(\mu(\eta))^{-\nu^2}\Delta_{-\varepsilon\mu,\,\varepsilon\mu}^{\nu}\Big(\prod_{1 \leqslant t < j \leqslant \nu}(u_t - u_j)^2\prod_{j=1}^{\nu}\exp(-u_j^2/2)\Big).$$

Заметим, что в силу (24) при $\eta \to -\infty$ $\varepsilon(\eta)\mu(\eta) = (Ah(-\eta))^{1/6}\nu^{-1/3}/\sqrt{2} \to +\infty$, и поэтому интеграл $\Delta_{-\varepsilon\mu,\,\varepsilon\mu}^{\nu}$ ограничен снизу положительной постоянной, зависящей лишь от $\nu$. Учитывая (10), (17), видим, что при достаточно больших $|\eta|$, $\eta < 0$

$$\Delta_{-\varepsilon,\,\varepsilon}^{\nu} \geqslant L(\nu)\left(\varkappa(\eta)/\sqrt{h(-\eta)}\right)^{\nu^2} \geqslant L(\nu)(h(-\eta))^{-9\nu^2/14}, \tag{27}$$

где $L(\nu)$ не зависит от $\eta$.

§ 3. Оценим сверху интеграл $I^{(\nu)}$. Нам понадобится неравенство $|h(x+iy)| \leqslant h(x)\exp(-2y^2/\pi^2)$, $|y| \leqslant \pi$, $x > 0$ **(28).** Для доказательства достаточно заметить, что при $x > 0$, $y \in [-\pi, \pi]$ имеем

$$|h(x+iy)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(ke^x \cos y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(ke^x)\exp(ke^x(\cos y - 1)) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{e^x(\cos y - 1)\} h(x) \leqslant \exp(-2y^2/\pi^2) h(x).$$

Заметим, что существует постоянная $b > 0$, такая, что неравенство $1 - e^{-2\zeta^2/\pi^2} \geqslant b\zeta^2$ **(29)** выполняется для любого $\zeta$ из отрезка $[-\pi, \pi]$. Из (12), (29), (28) следует

$$|\psi(\zeta + i\eta)/\psi(i\eta)| = \exp\{\operatorname{Re} h(-\eta + i\zeta) - h(-\eta)\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{|h(-\eta + i\zeta)| - h(-\eta)\} \leqslant \exp\{-h(-\eta) \times$$
$$\times (1 - \exp(-2\zeta^2/\pi^2))\} \leqslant \exp\{-bh(-\eta)\zeta^2\}. \tag{30}$$

Из (12), (30) вытекает, что

$$\varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta)| \leqslant \begin{cases} |b(\zeta + i\eta)/f(i\eta)|, & |\zeta| \leqslant \pi, \\ \exp\{-bh(-\eta)\varepsilon^2\}|f(\zeta + i\eta)/f(i\eta)|, & \varepsilon < |\zeta| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Но из (6), (10) видно, что

$$|f(\zeta + i\eta)| \leqslant \exp\{G(-\eta)\} \leqslant \exp\left\{\left(\frac{1}{2} h(-\eta)^{1/22}\right\},\right.$$
$$|f(i\eta)| \geqslant \exp\{-G(-\eta)\} \geqslant \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} h(-\eta)\right)^{1/22}\right\},$$

а значит,

$$|\varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta)| \leqslant \begin{cases} \exp\{2(h(-\eta))^{1/22}\}, & |\zeta| \leqslant \pi, \\ \exp\{-bh(-\eta)\varepsilon^2 + 2(h(-\eta))^{1/22}\}, & \varepsilon < |\zeta| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{31}$$

Так как $\{\zeta \in \boldsymbol{R}^\nu : \varepsilon < \|\zeta\| \leqslant \pi\} = \bigcup_{j=1}^{\nu} \{\zeta \in \boldsymbol{R}^\nu : \varepsilon < |\zeta_j| \leqslant \pi, \quad \|\zeta^j\| \leqslant \pi\}$, где $\zeta^j = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_\nu)$, то учитывая (31), получаем

$$|I^\nu| \leqslant K(\nu)\sum_{j=1}^{\nu}\Big(\int_{\varepsilon<|\zeta_j|\leqslant\pi} |\varphi(\zeta_j + i\eta)/\varphi(i\eta)|\, d\zeta_j) \times$$
$$\int_{\|\zeta^j\|\leqslant\pi} \prod_{t\neq j} |\varphi(\zeta_t + i\eta)/\varphi(i\eta)|\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_{j-1} d\zeta_{j+1} \ldots d\zeta_\nu =$$
$$= \nu K(\nu) \int_{\varepsilon<|\zeta|\leqslant\pi} |\varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta)|\, d\zeta \Big(\int_{|\zeta|\leqslant\pi} |\varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta)|\, d\zeta)^{\nu-1} \leqslant$$
$$\leqslant K_1(\nu)\exp\{-bh(-\eta)\varepsilon^2 + 2(h(-\eta))^{1/22}\nu\}.$$

Так как в силу (24), (17) и (10) $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}(h(-\eta))^{-1/7}(A\nu h(-\eta))^{-1/3} \geqslant$ $\geqslant \frac{1}{2}(A\nu)^{-1/3}(h(-\eta))^{-10/21}$, то получаем оценку

$$|I^\nu| \leqslant K_1(\nu)\exp\{-C(h(-\eta))^{1/21}\}, \tag{32}$$

где $C > 0$ не зависит от $\eta$.

§ 4. Из оценок (27), (32) и соотношения (16) получаем, что для любого $\nu = 1, 2, \ldots$ существует натуральное $k_\nu^0$ такое, что при любом $k \geqslant k_\nu^0$ определители $C_k^\nu = \det \| c_{k+i-j} \|$, где $0 \leqslant i, j \leqslant \nu - 1$ положительны. Отсюда следует, что для заданного натурального числа $m$ можно подобрать такое $N = N(m)$, что все миноры порядков $\nu = 1, 2, \ldots, m+1$, составленные из соседних строк и соседних столбцов матрицы $C_N = \| c_{N+i-j} \|$, где $0 \leqslant i < \infty$, $0 \leqslant j \leqslant m$, положительны. Асимптотическая $m$-кратная положительность последовательности коэффициентов функции $\varphi$ означает неотрицательность всех миноров матрицы $C_N$. Что эти миноры даже положительны, непосредственно вытекает из следующей теоремы Шенберга [2].

**Теорема В**. *Если все миноры порядков* $\nu = 1, 2, \ldots, m$, *составленные из соседних строк и соседних столбцов некоторой матрицы положительны, то и все ее миноры порядков* $\nu = 1, 2, \ldots, m$ *положительны.*

Тем самым доказано, что $\varphi \in B_+^m$. Чтобы завершить доказательство теоремы 2, остается показать, что $\psi \in B_+^m$.

Положим $f_0 \equiv 1$, тогда функция $G_0(r)$, определенная равенством (6), где роль $f$ играет $f_0$, будет тождественно равна 1. Очевидно, функция $h$, которую мы ранее построили по $G(r)$ и $\delta(r)$, будет удовлетворять неравенству (10), если в правой его части заменить $G$ на $G_0$, а $\delta$ на $\delta_0(r) \equiv 1$. Проведем дальнейшие рассуждения, заменяя $f$, $G$, $\delta$ на $f_0$, $G_0$, $\delta_0$, но сохраняя $h$ и $\psi$ такими же, как раньше. При этом функция $\varphi_0$, определяемая равенством (12) с заменой $f$ на $f_0$, совпадает с $\psi$, и мы приходим к заключению, что $\psi \in B_+^m$.

**Список литературы:** 1. *Fekete M., Polya G.* Überein problem von Laguerre // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.— 1912.— **34**.— P. 89—120. 2. *Schoenberg I. J.* On the zeroes of the generating functions of multiply positive sequences and functions // Annals of Mathematics.— 1955.— **62**, N 3.— P. 447—471. 3. *Хиршман И. И., Уиддер Д. В.* Преобразования типа свертки.— М., 1985.— 312 с. 4. *On the generating* functions of totally positive sequences I, II // J. d'Analyse Math.— 1953.— 2.— P. 93—109. 5. *Островский И. В.* О нулевых множествах целых периодических эрмитово-позитивных функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1982.— Вып. 37.—С. 102—110. 6. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа.— Т. I.— М., 1978.— 432 с.

*Поступила в редколлегию 05. 08. 86*