

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ РЕШЕТКЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Г. Н. Гестрин, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов

1. Задача нахождения электромагнитного поля, возникающего при падении плоской волны на периодическую решетку, образованную идеально проводящими металлическими лентами, является хорошо известной и рассматривалась многими авторами [2], [3], [4], [5]. Разработанный в [5] метод решения задачи позволяет получить как удобные для исследования

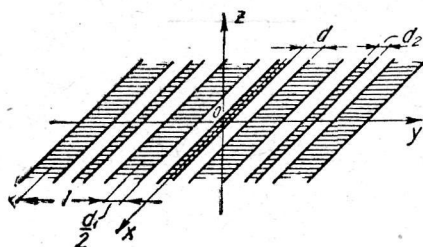


Рис. 1.

аналитические выражения, так и аппарат для численных расчетов, пригодный для любых соотношений между шириной щелей и периодом решетки. При этом отношение периода решетки к длине падающей волны может изменяться в пределах от нуля до величины порядка нескольких единиц, когда уже можно пользоваться коротковолновым приближением. В настоящей работе этот метод применяется к решению задачи дифракции на решетке, состоящей из металлических полос различной ширины (рис. 1). Такая задача может иметь многочисленные применения, в частности в антенной технике, в связи с тем, что отражение и прохождение плоской волны от такой решетки обладает рядом интересных свойств. Особенно интересным и важным является случай, когда одна из полос имеет ширину много меньшую второй. В этом случае дифракционная картина при определенных частотах падающей волны может резко отличаться от случая, когда узкая полоса отсутствует. Соответствующие количественные расчеты могут быть получены на основании результатов п. 3.

В первой части работы (п. 2) мы приводим задачу к некоторой системе уравнений, оставляя вычисление ее коэффициентов до п. 4. В п. 3 даются некоторые аналитические приближения и результаты численных расчетов.

2. Пусть в плоскости $ХОУ$ расположена плоская бесконечно тонкая и идеально проводящая металлическая решетка с периодом l , состоящая из чередующихся полос ширины d_1 и d . Система координат выбрана так, что ось $ОХ$ параллельна полосам решетки. Из полупространства $z > 0$ нормально к этой решетке падает плоская электромагнитная волна с со-

ставляющими $E_x = e^{-ikz}$, $E_y = 0$, $E_z = 0$ (множитель $e^{-i\omega t}$ мы опускаем). Нужно определить поле, полученное в результате дифракции на решетке.

Учитывая симметрию задачи и соответствующие граничные условия [5], мы можем утверждать, что искомое электрическое поле будет иметь отличной от нуля лишь составляющую E_x и эта составляющая может быть представлена в виде:

$$E_x = e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} z} \cdot e^{\frac{2\pi i n}{l} y} \quad (z > 0)$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{-i\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} z} e^{\frac{2\pi i n}{l} y} \quad (z < 0)$$

и при этом

$$b_0 = 1 + a_0; \quad b_n = a_n; \quad (n \neq 0);$$

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{\frac{2\pi i n}{l} y} = 0; & (\text{на металле}) \\ -k + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} \cdot e^{\frac{2\pi i n}{l} y} = 0. & (\text{на щелях}) \end{cases}$$

Пусть

$$x = \frac{kl}{2\pi} = \frac{l}{\lambda}; \quad \varepsilon_n = 1 + i\sqrt{\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 1}; \quad \frac{2\pi}{l} y = \varphi,$$

(здесь λ — длина волны падающего поля), тогда для определения b_n получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\varphi} = 0, & |\varphi| < \Theta_1, \quad \Theta < |\varphi| < \pi \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n |n| (1 - \varepsilon_n) e^{in\varphi} = ix(b_0 - 1), & \Theta_1 < |\varphi| < \Theta \\ \Theta_1 = \frac{\pi d_1}{l}, \quad \Theta = \frac{\pi(l-d)}{l}. \end{cases} \quad (1)$$

Если обозначить

$$f(e^{i\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varepsilon_n |n| e^{in\varphi},$$

то система (1) может быть переписана так:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\varphi} = 0, & |\varphi| < \Theta_1, \quad \Theta < |\varphi| < \pi \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n |n| e^{in\varphi} = ab_0 + f(e^{i\varphi}), & \Theta_1 < |\varphi| < \Theta. \end{cases} \quad (2)$$

Если считать функцию f известной, то система (2) может быть фактически решена. Именно, дифференцируя первое из уравнений в (2) и полагая $b_n n = x_n$, получим

$$\begin{cases} \sum_{n \neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0, & |\varphi| < \Theta, \quad \Theta_1 < |\varphi| < \pi \\ \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = ab_0 + f(e^{i\varphi}), & \Theta_1 < |\varphi| < \Theta. \end{cases} \quad (3)$$

Кроме того, из (2) при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ получаем дополнительные условия

$$\begin{cases} \sum_{n \neq 0} (-1)^n \frac{x_n}{n} = -b_0 \\ \sum_{n \neq 0} \frac{x_n}{n} = -b'_0. \end{cases} \quad (4)$$

Вводя функции

$$x^+(z) = \sum_{n \geq 0} x_n z^n, \quad x^-(z) = - \sum_{n < 0} x_n z^n$$

и замечая, что они, совпадая на дугах L_2 и L'_2 , в силу (3) являются аналитическими функциями внутри и вне окружности $|z| = 1$, можем ввести функцию

$$x(z) = \begin{cases} x^+(z), & |z| < 1 \\ x^-(z), & |z| > 1, \end{cases}$$

которая аналитична в плоскости z с разрезами вдоль дуг L_1 и L'_1 . Согласно (4) на L_1 и L'_1

$$x^+(z) + x^-(z) = ab_0 + f(z) \quad (5)$$

и нам, таким образом, известна сумма предельных значений функции $x(z)$ на L_1 и L'_1 . Задача нахождения функции $x(z)$ является известной задачей Римана — Гильберта и ее решение [1] может быть представлено в виде

$$x(z) \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1 + L'_1} \frac{[x^+(\zeta) + x^-(\zeta)] \psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + c_1 z + c_2, \quad (6)$$

где $\psi(z) = V(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})(z - \beta)(z - \bar{\beta})$ определена в плоскости z с разрезами вдоль L_1 и L'_1 и так, что $\psi(0) = |\alpha| \cdot |\beta|$. Константы c_1 и c_2 в (6) произвольны и для нашей задачи определяются из условия (4).

Вводя функцию

$$R(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\psi(\zeta)} & \text{на } L_1 + L'_1 \\ 0 & \text{на } L_2 + L'_2 \end{cases}$$

из (5) и (6), получаем

$$x^+(\zeta_0) - x^-(\zeta_0) = \frac{R(\zeta_0)}{\pi i} \int_{L_1 + L'_1} \frac{ab_0 + f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} \psi(\zeta) d\zeta + 2(c_1 \zeta_0 + c_2) R(\zeta_0). \quad (7)$$

Равенство (7), а также (4) дает нам для коэффициентов Фурье соответствующих функций

$$\begin{cases} x_m = ab_0 V_m^0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n V_m^n + 2(c_2 R_m + c_1 R_{m-1}) & (m \neq 0) \\ 0 = ab_0 V_0^0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n V_0^n + 2(c_2 R_0 + c_1 R_{-1}) \\ -b_0 = ab_0 V_{[\sigma]}^0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n V_{[\sigma]}^n + 2(c_2 R_{[\sigma]} + c_1 R_{[\sigma]-1}^1) \\ -b_0 = ab_0 W_{[\sigma]}^0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n W_{[\sigma]}^n + 2(c_2 \tilde{R}_{[\sigma]} + c_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^1), \end{cases} \quad (8)$$

где коэффициенты в (8) определяются равенствами

$$V_n(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_1 + L'_1} \frac{\zeta^n}{\zeta - \zeta_0} \phi(\zeta) d\zeta, \quad V_m^n(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_n(e^{i\varphi}) R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi,$$

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi, \quad R_{[\sigma]} = \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{R_m}{m},$$

$$R_{[\sigma]}^1 = \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{R_{m-1}}{m}, \quad \tilde{R}_{[\sigma]} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_m}{m}, \quad \tilde{R}_{[\sigma]}^1 = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-1}}{m},$$

$$V_{[\sigma]}^n = \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{V_m^n}{m}, \quad W_{[\sigma]}^n = \sum_{m \neq 0} \frac{V_m^n}{m}.$$

Вычисление этих коэффициентов приведено в п. 4.

Равенства (8) дают решение задачи (2) (напомним, что $b_m = \frac{x_m}{m}$).

Вспоминая теперь, что $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n |n| \varepsilon_n z^n$, мы можем переписать систему (8) следующим образом:

$$x_m = ix b_0 V_m^0 - ix V_m^0 + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_m^n + 2(c_2 R_m + c_1 R_{m-1}) \quad (m \neq 0)$$

$$0 = ix b_0 V_0^0 - ix V_0^0 + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_0^n + 2(c_2 R_0 + c_1 R_{-1})$$

$$-b_0 = ab_0 V_{[\sigma]}^0 - ix V_{[\sigma]}^0 + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{[\sigma]}^n + 2(c_2 R_{[\sigma]} + c_1 R_{[\sigma]}^1) \quad (10)$$

$$-b_0 = ab_0 W_{[\sigma]}^0 - ix W_{[\sigma]}^0 + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_{[\sigma]}^n + 2(c_2 \tilde{R}_{[\sigma]} + c_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^1).$$

Заметив, что $\varepsilon_{-n} = \varepsilon_n$ и что из (2) вытекает

$$b_{-n} = b_n, \quad x_{-n} = -x_n,$$

мы можем упростить систему (10)

$$x_m = ix b_0 V_m^0 - ix V_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n [V_m^n + V_m^{-n}] + 2(c_2 R_m + c_1 R_{m-1}) \quad (m \neq 0)$$

$$0 = ix b_0 V_0^0 - ix V_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n [V_0^n + V_0^{-n}] + 2(c_2 R_0 + c_1 R_{-1})$$

$$-b_0 = ab_0 V_{[\sigma]}^0 - ix V_{[\sigma]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n [V_{[\sigma]}^n + V_{[\sigma]}^{-n}] + 2(c_2 R_{[\sigma]} + c_1 R_{[\sigma]}^1) \quad (11)$$

$$-b_0 = ab_0 W_{[\sigma]}^0 - ix W_{[\sigma]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n [W_{[\sigma]}^n + W_{[\sigma]}^{-n}] + 2(c_2 \tilde{R}_{[\sigma]} + c_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^1).$$

Находя из этой бесконечной системы величины b_0 , c_2 , c_1 и x_m , мы определим решение первоначальной задачи (1).

3. Для ряда физических приложений интерес представляет случай, когда длина падающей волны имеет порядок периода системы ($\kappa \approx 1$).

В случае, когда x меняется в интервале $(0,4)$, $0 < \theta_1 < \theta < \pi$ было получено численное значение для x_m и b_0 (в системе (11) были взяты двенадцать уравнений). На рис. 3 приведены несколько графиков для коэффициента отражения $|b_0|^2$. Как видно из этих графиков, в определенной полосе частот наличие чрезвычайно узких «внутренних» полос резко влияет на величину коэффициента отражения. Ниже мы приведем ряд приближенных формул, из которых можно будет увидеть аналитическую зависимость b_0

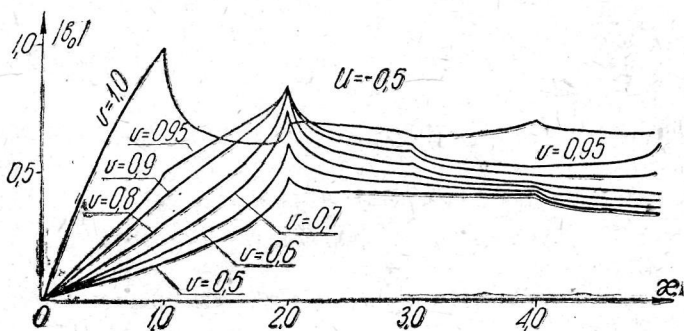


Рис. 3а.

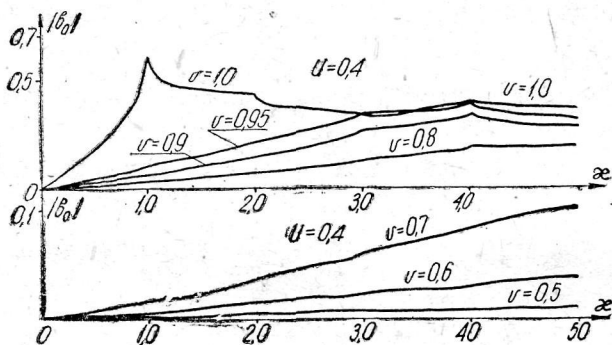


Рис. 3б.

от параметров решетки $u = \cos \theta_1$ и $v = \cos \theta$. В области длинноволнового приближения ($x \ll 1$) в системе (11) можно положить все $\varepsilon_n = 0$. Тогда мы получим

$$b_0 = \frac{2ix(R_{[\sigma]}R_{[\sigma]}^1 - \tilde{R}_{[\sigma]}\tilde{R}_{[\sigma]}^1)}{2ix(R_{[\sigma]}\tilde{R}_{[\sigma]}^1 - \tilde{R}_{[\sigma]}R_{[\sigma]}^1) + R_{[\sigma]}^1 - \tilde{R}_{[\sigma]}^1}. \quad (12)$$

Что касается $R_{[\sigma]}$, $R_{[\sigma]}^1$, $\tilde{R}_{[\sigma]}$ и $\tilde{R}_{[\sigma]}^1$, то эти величины выражаются определенными интегралами (см. следующий параграф), имеющими следующую асимптотику при $v \rightarrow 1$ (с точностью до величин порядка $1-v$ и $(1-v) \ln(1-v)$)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{[\sigma]} &= -\frac{1}{2\sqrt{2(1-u)}} \ln \frac{1-v(1-u+\sqrt{2(1-u)})^2}{(1-u)^2} \\ R_{[\sigma]}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \ln \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u+\sqrt{2(1-u)}} \\ \tilde{R}_{[\sigma]} &= \tilde{R}_{[\sigma]}^1 - \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1-u}{2}}\right), \quad R_{[\sigma]} = R_{[\sigma]}^1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

Если перейти к пределу при $v \rightarrow 1$ в (12), то мы получим известное приближение Ламба для плоской периодической решетки (ср. [5]). Однако, благодаря тому, что стремление к нулю соответствующих членов в формуле (12) очень медленное (как $\frac{1}{\ln(1-v)}$), наличие v , хотя бы мало отличного от 1, уже может заметно отразиться на величине b_0 .

В заключение приведем более точную формулу для b_0 , которой с достаточной степенью точности можно пользоваться для значений x вплоть до $x = 1$

$$b_0 = \frac{ix\Delta}{ix\Delta + D}, \quad (14)$$

где

$$\Delta = \Delta_0 + \varepsilon_1 \Delta, \quad D = D_0 + \varepsilon_1 D_1;$$

$$\Delta_0 = -4 (R_{[\sigma]} \cdot \tilde{R}_{[\sigma]}^1 - \tilde{R}_{[\sigma]} \cdot R_{[\sigma]}^1),$$

$$D_0 = -2 (R_{[\sigma]}^1 - \tilde{R}_{[\sigma]}^1),$$

$$\Delta_1 = 4 \{R_{[\sigma]} \tilde{R}_{[\sigma]}^2 - \tilde{R}_{[\sigma]} R_{[\sigma]}^2\} + \{4 - 3(u^2 + v^2) - 2uv\} \{R_{[\sigma]} \tilde{R}_{[\sigma]}^1 - \tilde{R}_{[\sigma]} R_{[\sigma]}^1\} - \\ - 2(u + v) \{R_{[\sigma]}^1 \tilde{R}_{[\sigma]}^2 - \tilde{R}_{[\sigma]}^1 R_{[\sigma]}^2\},$$

$$D_1 = 2 (R_{[\sigma]}^2 - \tilde{R}_{[\sigma]}^2) + \left\{2 - \frac{1}{2}(u - v)^2\right\} \{R_{[\sigma]}^1 - \tilde{R}_{[\sigma]}^1\} - 2(u + v) \{R_{[\sigma]} - \tilde{R}_{[\sigma]}\}.$$

Для значений v , близких к 1, при вычислении величин типа $R_{[\sigma]}$ можно пользоваться формулами (13) и формулами*

$$\tilde{R}_{[\sigma]}^2 = R_{[\sigma]}^1 - (1 + u) \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1-u}{2}}\right) + \frac{1-u}{2} - \sqrt{2(1-u)} \\ R_{[\sigma]}^2 = R_{[\sigma]}^1 - \frac{1-u}{2} \ln \frac{1+u}{2} - \frac{1-u}{2}. \quad (15)$$

4. В этом параграфе мы покажем, как вычисляются коэффициенты (9) системы (11).

а) Полиномы $Q_n(u, v)$.

В п. 2 мы ввели функцию $\Psi(z) = \sqrt{(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})(z - \beta)(z - \bar{\beta})}$, $\alpha = e^{i\theta}$, $\beta = e^{i\theta_1}$, $u = \cos \theta$, $v = \cos \theta_1$. Полиномы $Q_n(u, v)$ определяются как коэффициенты в разложении функции $\frac{1}{\Psi(z)}$ в степенной ряд

$$\frac{1}{\Psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(u, v) z^n \quad (|z| < 1). \quad (16)$$

Так как, с другой стороны

$$\frac{1}{\Psi(z)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(u) z^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} P_l(v) z^l \right),$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, то

$$Q_n(u, v) = \sum_{k=0}^n P_k(u) P_{n-k}(v),$$

* Величины $R_{[\sigma]}^2$ и $\tilde{R}_{[\sigma]}^2$ появляются при подсчете $V_{[\sigma]}^n$ и $W_{[\sigma]}^n$ (см. п. 4).

Для $Q_n(u, v)$, также как для полиномов Лежандра, можно получить интегральные представления

$$\begin{aligned} Q_n(u, v) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\theta_1 < |\varphi| < \theta} \frac{e^{i(n+2)\varphi}}{\Psi(e^{i\varphi})} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1 < |\varphi| < \theta} \frac{e^{-in\varphi}}{\Psi(e^{i\varphi})} d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin(n+1)\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta} \sqrt{\cos \theta_1 - \cos \varphi}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если теперь определить для любого n $Q_n(u, v)$ формулой (17), то легко установить, что

$$Q_{-n} = -Q_{n-2}. \quad (18)$$

Дифференцируя (16) по z и сравнивая коэффициенты в разложении левой и правой части, получим рекуррентные соотношения для $Q_n(u, v)$

$$\begin{aligned} (n+1)Q_{n+1} - (2n+1)(u+v)Q_n + 2n(1+2uv)Q_{n-1} - \\ - (2n-1)(u+v)Q_{n-2} + (n-1)Q_{n-3} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

б) Коэффициент R_m .

Из определения R_m имеем

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1 < |\varphi| < \theta} \frac{e^{-im\varphi}}{\Psi(e^{i\varphi})} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1 < |\varphi| < \theta} \frac{\sin(n+1)\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta} \sqrt{\cos \theta_1 - \cos \varphi}}.$$

Сравнивая это с (17), находим

$$R_m(u, v) = \frac{1}{2} Q_m(u, v). \quad (20)$$

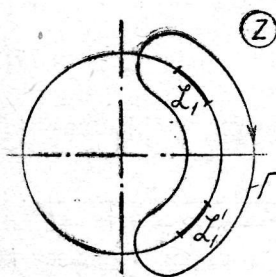


Рис. 4.

в) Вычисление $V_n(\zeta_0)$.
Положим

$$\Psi(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(u, v) z^n & |z| < 1 \\ z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(u, v) z^n & |z| > 1. \end{cases}$$

Легко подсчитать, что

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} &= Q_{n+1} - 2(u+v)Q_n + 2(2uv+1)Q_{n-1} - \\ &- 2(u+v)Q_{n-2} + Q_{n-3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, так как

$$V_n(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{z - \zeta_0} \Psi(z) dz,$$

где Γ — контур, указанный на рис. 4, то $V_n(\zeta_0) = \text{Res}(0) + \text{Res}(\infty)$. Это даёт

$$V_n(\zeta_0) = \begin{cases} -\sum_{p=0}^{n+2} \mu_{n-p+2}(u, v) \zeta_0^p, & n \geq 0 \\ -\zeta_0^{-1} - \mu_1(u, v) - \zeta_0, & n = -1 \\ -1 - \zeta_0^{-2} - \mu_1(u, v) \zeta_0, & n = -2 \\ -\sum_{p=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-p}(u, v) \zeta_0^{-p-1}, & n < -2. \end{cases} \quad (22)$$

в) Коэффициенты V_m^n .

По определению

$$V_m^n = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1 < |\varphi| < \theta} \frac{V_n(e^{i\varphi})}{\Psi(e^{i\varphi})} e^{-im\varphi} d\varphi.$$

Принимая во внимание (17) и (22), получаем

$$V_m^n = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+2} \mu_{n-p+2} Q_{p-m-2}, & n \geq 0 \\ \frac{1}{2} (Q_{m+1} + \mu_1 Q_m + Q_{m-1}), & n = -1 \\ -\frac{1}{2} (Q_m + \mu_1 Q_{m+1} + Q_{m+2}), & n = -2 \\ -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{-n-1} \mu_{n-1-p} Q_{m+p+1} & n < -2. \end{cases} \quad (23)$$

Подсчитаем теперь сумму

$$\sum_{j=0}^n \mu_{n-j} Q_{j+s} = \sigma_{n,s}.$$

$\sigma_{n,s}$ является коэффициентом при z^n в разложении функции $\Psi(z) \sum_{j=0}^{\infty} Q_{j+s} z^{j+s}$

($|z| < 1$). Рассматривая функцию $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{j+s} z^{j+s}$ и дифференцируя её, получим

$$g'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+s) Q_{j+s} z^{j+s-1}.$$

Заменяя Q_{j+s} по формуле (19) через Q_{j+s-1} и другие полиномы, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \Psi'(z) \{1 - 2(u+v)z + 2z^2(2uv+1) - 2(u+v)z^3 + z^4\} + \\ + \Psi(z) \{- (u+v) + 2z(2uv+1) - 3(u+v)z^2 + 2z^3\} = G(z), \\ G(z) = z^{s-1} \{sQ_s + z[(s+1)Q_{s+1} - (2s+1)(u+v)Q_s] + \\ + z^2[(u+v)(2s+1)Q_{s-1} - sQ_{s-2}] - z^3(s+1)Q_{s-1}\}. \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\frac{d}{dz} \{g(z) \Psi(z)\} = \frac{G(z)}{\Psi(z)},$$

получаем

$$\Psi(z) g(z) = \int_0^z \frac{G(z)}{\Psi(z)} dz,$$

а, следовательно, $\sigma_{n,s}$ будет коэффициентом при z^n в разложении функции

$z^{-s} \int_0^z \frac{G(z)}{\Psi(z)} dz$ в степенной ряд. Это даёт

$$\begin{aligned} \sigma_{n,s} = \frac{sQ_n Q_s}{n+s} + \frac{Q_{n-1} [(Q_{s+1}(s+1) - (2s+1)(u+v))] }{n+s} + \\ + \frac{Q_{n-2} [(u+v)(2s+1)Q_{s-1} - sQ_{s-2}]}{n+s} - \frac{(s+1)Q_{n-3}Q_{s-1}}{n+s}. \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда вместе с (23) вытекает

$$V_m^n = \begin{cases} \frac{1}{2(n-m)} \{ (m+2) Q_{n+2} Q_m + Q_{n+1} [Q_{n-1} (m+1) - (2m+3) \times \\ \times (u+v) Q_n] + Q_n [(u+v) (2m+3) Q_{m+3} - (m+2) Q_{m+2}] - \\ - (m+1) Q_{n-1} Q_{m+1} \} & (n \neq m, n \neq -1, -2) \\ -\frac{1}{2} \{ Q_{m+1} - (u+v) Q_m + Q_{m-1} \} & n = -1 \\ -\frac{1}{2} \{ Q_m - (u+v) Q_{m+1} + Q_{m+2} \} & n = -2. \end{cases} \quad (25)$$

г) Коэффициенты $R_{[\sigma]}$, $\tilde{R}_{[\sigma]}$, $R_{[\sigma]}^1$ и $\tilde{R}_{[\sigma]}^1$.

$$\begin{aligned} R_{[\sigma]} &= \frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{Q_m}{m} = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{Q_m}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{Q_{m-2}}{m} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{-1} \left\{ \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\Psi(z)} - 1 \right) + \frac{z}{\Psi(z)} \right\} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{z} \left[\frac{1}{\sqrt{(z^2 + 2uz + 1)(z^2 + 2vz + 1)}} - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{\sqrt{(z^2 + 2uz + 1)(z^2 + 2vz + 1)}} \right\} dz. \end{aligned} \quad (26)$$

Точно так же

$$R_{[\sigma]}^1 = - \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + 2uz + 1)(z^2 + 2vz + 1)}}. \quad (27)$$

Легко видеть, что

$$\tilde{R}_{[\sigma]}(u, v) = R_{[\sigma]}(-u, -v), \quad \tilde{R}_{[\sigma]}^1 = -R_{[\sigma]}^1(-u, -v). \quad (28)$$

д) Коэффициенты $V_{[\sigma]}^n$ и $W_{[\sigma]}^n$.

Пусть $n \geq 0$. Тогда

$$V_{[\sigma]}^n = \frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n+2} \mu_{n-k+2} Q_{k-m-2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+2} \mu_{n-k+2} \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{Q_{m-k}}{m}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_m \sin(m+1)\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{(\cos\varphi - \cos\theta_1)\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}}} & \theta_1 < \varphi < \theta \\ 0 & \theta < \varphi < \theta_1, \theta < \varphi < \pi. \end{cases}$$

Обозначим

$$S_k(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \frac{Q_{m-k}}{m+s}.$$

Имеем

$$2 \int_0^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} Q_{m-1} \sin m\varphi \right) \sin s\varphi d\varphi = -\sin s\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m Q_{m-1}}{s+m}.$$

Отсюда следует

$$S_k(s) = -\frac{1}{\sin s\pi} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin(s+k-1)\varphi d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\theta_1)(\cos\theta - \cos\varphi)}} = -\frac{\pi}{\sin s\pi} Q_{s+k-2}. \quad (29)$$

Для вычисления $V_{[\sigma]}^n$ рассмотрим сумму

$$V_{[\sigma]}^n(s) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+2} \mu_{n-k+2} \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{Q_{m-k}}{m+s}.$$

Воспользовавшись (24), будем иметь

$$\begin{aligned} V_{[\sigma]}^n(s) &= \frac{\pi}{2 \sin \pi s} \sum_{k=0}^{n+2} \mu_{n-k+2} Q_{s+k-2} + \frac{1}{2s} \sum_{k=0}^{n+2} \mu_{n-k+2} Q_{-k} = \frac{\pi}{2 \sin \pi s} \left\{ \frac{s Q_n Q_s}{n+s} + \right. \\ &+ \frac{Q_{n-1} [Q_{s+1}(s+1) - (2s+1)(u+v) Q_s]}{n+s} + \frac{Q_{n-2} [(u+v)(2s+1) Q_{s-1} - s Q_{s-1}]}{n+s} \\ &\left. - \frac{(s+1) Q_{n-3} Q_{s-1}}{n+s} \right\} + \frac{\pi}{\sin \pi s} (\mu_{n+2} Q_{s-2} + \mu_{n+1} Q_{s-1}) - \frac{1}{2s} \mu_{n+2} Q_{-2}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} V_{[\sigma]}^n = V_{[\sigma]}^n(0) &= \frac{1}{2n} \{ Q_n - (u+v) Q_{n-1} + Q_{n-2} \} + \frac{1}{2n} \left\{ Q_{n-1} \left(\frac{\partial Q_n}{\partial n} \right) \Big|_{n=1} - \right. \\ &- (u+v) \frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=0} + Q_{n-2} (u+v) \frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=-1} - Q_{n-3} \frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=-1} \Big\} + \\ &+ \frac{\mu_{n+2}}{2} \frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=-2} + \frac{\mu_{n+1}}{2} \frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Отметим, что в силу (29)

$$\sum_{m \neq 0} \frac{(-1)^m Q_{m-k}}{m+s} = -\frac{\pi}{\sin \pi s} Q_{s+k-2} - \frac{Q_{-k}}{s} = \frac{\pi}{\sin \pi s} Q_{-k-s} - \frac{Q_{-k}}{s}$$

и, значит,

$$\sum_{m \neq 0} \frac{(-1)^m Q_{m-k}}{m} = -\frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=-k}. \quad (31)$$

Из (30) получаем

$$\frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=0} = -2R_{[\sigma]}, \quad \frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=-2} = -2R_{[\sigma]}, \quad \frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=-1} = -2R_{[\sigma]}^1$$

Если обозначить еще $-2R_{[\sigma]}^2 = \frac{\partial Q_n}{\partial n} \Big|_{n=1} = \sum_{m \neq 0} \frac{(-1)^m Q_{m+1}}{m}$, то

$$\begin{aligned} R_{[\sigma]}^2 &= \frac{1}{2} \int_0^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} Q_{m+1}^* z^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} Q_{m-3} z^{m-1} \right\} dz = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{\sqrt{(z^2 + 2uz + 1)(z^2 + 2vz + 1)}} + Q_1 z + 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{\sqrt{(z^2 + 2uz + 1)(z^2 + 2vz + 1)}} + Q_{-2} \right\} dz. \end{aligned} \quad (32)$$

Ниже нам понадобится также величина

$$\tilde{R}_{[\sigma]}^2(u, v) = \sum_{m \neq 0} \frac{Q_m}{m} = -R_{[\sigma]}^2(-u, -v). \quad (33)$$

Заменяя теперь в (30) μ_n их выражениями через Q_n и воспользовавшись значениями $\frac{\partial Q_n}{\partial n}$, мы получаем окончательно

$$\begin{aligned} V_{[\sigma]}^n = & \frac{1}{2n} \{Q_n - Q_{n-1}(u+v) + Q_{n-2}\} + \frac{1}{n} \{-R_{[\sigma]}^2 Q_{n-1} - R_{[\sigma]}[-2Q_{n+2} + \\ & + 3(u+v)Q_{n+1} - 2(2uv+1)Q_n] - R_{[\sigma]}^1[-Q_{n+1} - (u+v)Q_n]\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Проделав ту же процедуру для $n \leq 0$, мы убедимся в том, что (34) имеет место для всех n . Нам остается вычислить $W_{[\sigma]}^n$. Прежде всего заметим, что $Q_n(u, v) = (-1)^n Q_n(-u, -v)$ и $\mu_n(-u, -v) = (-1)^n \mu_n(u, v)$. Это дает

$$W_{[\sigma]}^n(u, v) = (-1)^n V_{[\sigma]}^n(-u, -v). \quad (35)$$

Из (34) и (35) сразу следует

$$\begin{aligned} W_{[\sigma]}^n = & \frac{1}{2n} \{Q_n - Q_{n-1}(u+v) + Q_{n-2}\} + \frac{1}{n} \{-\tilde{R}_{[\sigma]}^2 Q_{n-1} - \tilde{R}_{[\sigma]}[-2Q_{n+2} + \\ & + 3(u+v)Q_{n+1} - 2(2uv+1)Q_n] - \tilde{R}_{[\sigma]}^1[-Q_{n+1} - (u+v)Q_n]\}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, М. Физматгиз, 1958.
2. Л. А. Вайнштейн, «Ж. техн. физ.» 25, вып. 5, 847 (1955).
3. G. L. Baldwin, A. E. Heins, Math. seand., № 1, 103 (1954).
4. В. Н. Детинко. «Изв. вузов», № 1, 1957.
5. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, «Ж. техн. физ.» 32, вып. 4, 381 (1962).