Такимъ образомъ окончательно приходимъ къ выводу, что при $n(n-1) \geqq 0$ невозмущенное движеніе устойчиво, а при $n(n-1) < 0$ неустойчиво.

Примѣръ 3. — Даны уравненія

$$\frac{dx}{dt} + y = \alpha yz, \qquad \frac{dy}{dt} - x = \beta xz, \qquad \frac{dz}{dt} + kz = \gamma xy,$$

въ которыхъ k означаетъ положительную, а α, β и γ какія угодно вещественныя постоянныя.

Поступая, какъ было указано въ параграфѣ 36$^{\text{омъ}}$ (примѣчаніе), дѣлаемъ

$$t = t_0 + (1 + h_2c^2 + \ldots)\tau.$$

Затѣмъ, замѣчая, что вслѣдствіе замѣны x черезъ $-x$ и y черезъ $-y$ предложенныя уравненія не мѣняются, полагаемъ

$$x = c\cos\tau + x_3c^3 + x_5c^5 + \ldots,$$
$$y = c\sin\tau + y_3c^3 + y_5c^5 + \ldots,$$
$$z = z_2c^2 + z_4c^4 + \ldots,$$

разумѣя подъ x_s, y_s, z_s независящія отъ c функціи τ.

Изъ этихъ функцій z_2, x_3 и y_3 опредѣлятся слѣдующими уравненіями:

$$\frac{dz_2}{d\tau} + kz_2 = \frac{\gamma}{2}\sin 2\tau,$$

$$\frac{dx_3}{d\tau} + y_3 = -h_2\sin\tau + \alpha z_2\sin\tau,$$

$$\frac{dy_3}{d\tau} - x_3 = h_2\cos\tau + \beta z_2\cos\tau.$$

Для перваго находимъ періодическое рѣшеніе

$$z_2 = \frac{\gamma}{2(k^2+4)}(k\sin 2\tau - 2\cos 2\tau),$$

которое подставляемъ во вторыя части двухъ остальныхъ. Затѣмъ, означая послѣднія для второго уравненія черезъ P и для третьяго черезъ Q, составляемъ выраженіе

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P\cos\tau + Q\sin\tau)\,d\tau = \frac{(\alpha+\beta)\gamma k}{8(k^2+4)}.$$

Это выраженіе, если оно не нуль, и представитъ постоянную g (стр. 125).

Поэтому, замѣчая, что изъ двухъ случаевъ $\gamma = 0$ и $\alpha + \beta = 0$, когда оно дѣлается нулемъ, въ первомъ предложенная система уравненій допускаетъ періодическое рѣшеніе

$$x = c\cos(t - t_0), \qquad y = c\sin(t - t_0), \qquad z = 0,$$

во второмъ — интегралъ

$$x^2 + y^2,$$

заключаемъ, что при $(\alpha + \beta)\gamma > 0$ невозмущенное движеніе неустойчиво, а при $(\alpha + \beta)\gamma \leqq 0$ устойчиво.

Примѣръ 4. — Пусть даны уравненія

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + (x + y)z, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + (y - x)z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -z + x + y - 2(6x - 3y + z)z,$$

въ которыхъ λ означаетъ какую угодно отличную отъ нуля вещественную постоянную.

Означая черезъ f форму третьей степени перемѣнныхъ x, y, z, опредѣляемъ ее изъ условія, чтобы производная по t отъ функціи

$$U = x^2 + y^2 + f,$$

составленная при посредствѣ нашихъ дифференціальныхъ уравненій, не содержала членовъ третьяго порядка.

Эту форму получаемъ изъ уравненія

$$\lambda\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right) + (z - x - y)\frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)z$$

подъ видомъ

$$f = 2(x^2 + y^2)\left(\frac{x - y}{\lambda} + z\right).$$

При этомъ находимъ:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{4(1 - 3\lambda)}{\lambda}(x^2 + y^2)(2x - y)z. \tag{92}$$

Замѣняемъ здѣсь z линейнымъ рѣшеніемъ

$$z = \frac{(1 - \lambda)x + (1 + \lambda)y}{1 + \lambda^2}$$

уравненія

$$\lambda\left(x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -z + x + y;$$

затѣмъ дѣлаемъ $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ и, означая черезъ Θ функцію перемѣнной ϑ, въ которую обращается результатъ по раздѣленіи на r^4, составляемъ величину

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Theta\, d\vartheta = \frac{2(1-3\lambda)^2}{\lambda(1+\lambda^2)}\,.$$

Если эта величина не равна нулю, то ею опредѣляется постоянная G (стр. 142). Нулемъ же она можетъ сдѣлаться только въ случаѣ $\lambda = \frac{1}{3}$. А тогда, какъ видно изъ (92), функція U будетъ интеграломъ предложенной системы уравненій.

Вслѣдствіе этого полученное выраженіе позволяетъ заключить, что при λ отрицательномъ и при $\lambda = \frac{1}{3}$ невозмущенное движеніе устойчиво, а при λ положительномъ, отличномъ отъ $\frac{1}{3}$, неустойчиво.

Примѣръ 5. — Дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія даны подъ видомъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = az^n, \qquad \frac{dz}{dt} + kz = x,$$

гдѣ n цѣлое число, бо́льшее 1, k положительная и a какая угодно отличная отъ нуля вещественная постоянная. Изслѣдовать устойчивость невозмущеннаго движенія $(x = z = 0)$ по отношенію къ величинамъ x, $\frac{dx}{dt}$ и z.

Поступаемъ по правилу, изложенному въ концѣ предыдущаго параграфа.

Дѣлая $\frac{dx}{dt} = x'$, разсматриваемъ уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$x'\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial x'} + kz = x - az^n\frac{\partial z}{\partial x'}\,,$$

которое вслѣдствіе подстановки $x' = r\cos\vartheta$, $x = r\sin\vartheta$ приводится къ виду:

$$\frac{\partial z}{\partial\vartheta} + kz = r\sin\vartheta - az^n\left(\cos\vartheta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial z}{\partial\vartheta}\right).$$

Этому уравненію можемъ удовлетворить по крайней мѣрѣ формально, подставляя вмѣсто z рядъ

$$\Theta_0 r + \Theta_1 r^n + \Theta_2 r^{2n-1} + \ldots\,, \tag{93}$$

расположенный по степенямъ r, возрастающимъ на $n-1$, съ періодическими относительно ϑ коэффиціентами Θ_0, Θ_1 и т. д., опредѣляемыми послѣдовательно при помощи дифференціальныхъ уравненій, которыя легко составить. Такъ, коэффиціенты Θ_0 и Θ_1 найдутся изъ уравненій

$$\frac{d\Theta_0}{d\vartheta} + k\Theta_0 = \sin\vartheta\,,$$

$$\frac{d\Theta_1}{d\vartheta} + k\Theta_1 = -\,a\Theta_0^n\left(\cos\vartheta\,\Theta_0 - \sin\vartheta\,\frac{d\Theta_0}{d\vartheta}\right),$$

и слѣдовательно будутъ

$$\Theta_0 = \frac{k\sin\vartheta - \cos\vartheta}{k^2+1}\,, \qquad \Theta_1 = \frac{a e^{-k\vartheta}}{k^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\vartheta} e^{k\vartheta}\,\Theta_0^n\,d\vartheta\,.$$

Обращаемся теперь къ первому изъ предложенныхъ дифференціальныхъ уравненій и, дѣлая прежнюю подстановку, выводимъ изъ него слѣдующее:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{a z^n\cos\vartheta}{1 - a\,\dfrac{z^n}{r}\sin\vartheta}\,.$$

Вторую часть этого уравненія представляемъ подъ видомъ ряда

$$a z^n\cos\vartheta + a^2\frac{z^{2n}}{r}\sin\vartheta\cos\vartheta + \ldots\,,$$

и замѣняя въ послѣднемъ z рядомъ (93), результатъ располагаемъ по восходящимъ степенямъ r.

Такимъ образомъ получаемъ рядъ

$$R_n r^n + R_{2n-1} r^{2n-1} + \ldots\,,$$

въ которомъ степени r возрастаютъ на $n-1$ и коэффиціенты R суть опредѣленныя періодическія функціи ϑ:

$$R_n = a\Theta_0^n\cos\vartheta\,, \quad R_{2n-1} = a^2\Theta_0^{2n}\sin\vartheta\cos\vartheta + na\Theta_0^{n-1}\Theta_1\cos\vartheta\,, \ \text{и т. д.}$$

Разсматривая теперь выраженіе

$$\frac{dr}{d\vartheta} - R_n r^n - R_{2n-1} r^{2n-1}$$

и означая черезъ c произвольную постоянную, а черезъ u_n, u_{2n-1} независящія отъ нея функціи ϑ, дѣлаемъ въ него подстановку

$$r = c + u_n c^n + u_{2n-1} c^{2n-1}$$

и въ результатѣ приравниваемъ нулю коэффиціенты при $n^{\text{ой}}$ и $2n-1^{\text{ой}}$ степеняхъ c.

Такимъ путемъ получаемъ уравненія

$$\frac{du_n}{d\vartheta} = R_n, \qquad \frac{du_{2n-1}}{d\vartheta} = nu_n R_n + R_{2n-1}, \tag{94}$$

изъ которыхъ первое даетъ

$$u_n = a \int \Theta_0^n \cos\vartheta \, d\vartheta + \text{Const.}$$

Если же введемъ уголъ ε, опредѣляемый равенствами

$$\sin\varepsilon = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}, \qquad \cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}},$$

то будемъ имѣть

$$\Theta_0 = -\frac{\cos(\vartheta+\varepsilon)}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Тогда выраженіе функціи u_n приведется къ виду

$$u_n = \frac{(-1)^n a}{(k^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \left\{ \int \cos^{n+1}(\vartheta+\varepsilon) d\vartheta - \frac{k}{n+1} \cos^{n+1}(\vartheta+\varepsilon) \right\} + \text{Const.}$$

Отсюда видно, что, если n число нечетное, функція u_n будетъ заключать въ себѣ вѣковой членъ, и постоянная g найдется по формулѣ

$$g = -\frac{2a}{\pi(k^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\vartheta \, d\vartheta.$$

Постоянная эта будетъ, слѣдовательно, противоположнаго знака съ a.

Если же n число четное, функція u_n будетъ періодическою. Тогда, какъ видно изъ (94), постоянная g будетъ опредѣляться равенствомъ

$$g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{2n-1} d\vartheta,$$

если только входящій въ него интегралъ не нуль.

Покажемъ, что интегралъ этотъ никогда не сдѣлается нулемъ, и что при томъ онъ будетъ отрицательнымъ.

Для этого преобразуемъ надлежащимъ образомъ его выраженіе

$$\int_0^{2\pi} R_{2n-1} d\vartheta = a^2 \int_0^{2\pi} \Theta_0^{2n} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta + na \int_0^{2\pi} \Theta_0^{n-1} \Theta_1 \cos\vartheta \, d\vartheta.$$

Пользуясь опять угломъ ε и замѣчая, что въ случаѣ четнаго n

$$\Theta_1 = \frac{a e^{-k(\vartheta+\varepsilon)}}{(k^2+1)^{\frac{n+2}{2}}} \int_{-\infty}^{\vartheta+\varepsilon} e^{k\varphi} \cos^n \varphi \, d\varphi ,$$

получаемъ:

$$\int_0^{2\pi} \Theta_0^{n-1} \Theta_1 \cos\vartheta \, d\vartheta = -\frac{a}{(k^2+1)^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{-k\vartheta} \cos^n \vartheta \, d\vartheta \int_{-\infty}^{\vartheta} e^{k\varphi} \cos^n \varphi \, d\varphi -$$

$$-\frac{ka}{(k^2+1)^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{-k\vartheta} \cos^{n-1} \vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{-\infty}^{\vartheta} e^{k\varphi} \cos^n \varphi \, d\varphi .$$

Но вводя для сокращенія обозначеніе

$$\int_0^{2\pi} e^{-k\vartheta} \cos^n \vartheta \, d\vartheta \int_{-\infty}^{\vartheta} e^{k\varphi} \cos^n \varphi \, d\varphi = J ,$$

интегрированіемъ по частямъ находимъ:

$$n \int_0^{2\pi} e^{-k\vartheta} \cos^{n-1} \vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{-\infty}^{\vartheta} e^{k\varphi} \cos^n \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta \, d\vartheta - kJ .$$

Вслѣдствіе этого, замѣчая, что

$$\int_0^{2\pi} \Theta_0^{2n} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{k}{(k^2+1)^{n+1}} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta \, d\vartheta - 2 \int_0^{2\pi} \cos^{2n+2} \vartheta \, d\vartheta \right\},$$

окончательно приходимъ къ равенству:

$$\int_0^{2\pi} R_{2n-1} \, d\vartheta = \frac{4\pi k a^2}{(k^2+1)^{n+1}} \left\{ \frac{k^2-n}{4\pi k} J - \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)} \right\}.$$

Изъ этого равенства и слѣдуетъ справедливость сказаннаго выше, ибо величина, находящаяся въ скобкахъ во второй его части, во всякомъ случаѣ менѣе

$$\frac{kJ}{4\pi} - \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}$$

(J величина положительная); а такъ какъ kJ, очевидно, менѣе интеграла

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \vartheta \, d\vartheta = \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n} 2\pi ,$$

то эта величина менѣе слѣдующей:

$$\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\left\{\frac{1}{2}-\frac{(n+1)(n+3)\ldots(2n+1)}{(n+2)(n+4)\ldots(2n+2)}\right\},$$

которая навѣрно отрицательна.

Такимъ образомъ при n четномъ постоянная g будетъ всегда отрицательною.

Мы приходимъ, слѣдовательно, къ выводу, что въ случаѣ нечетнаго n невозмущенное движенiе устойчиво при a положительномъ и неустойчиво при a отрицательномъ, а въ случаѣ четнаго n всегда устойчиво.

Примѣръ 6. — Пусть при прежнемъ значенiи постоянныхъ дифференцiальныя уравненiя возмущеннаго движенiя предложены подъ видомъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=az^n, \qquad \frac{dz}{dt}+kz=\frac{dx}{dt}.$$

Идя совершенно такимъ же путемъ, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, найдемъ: въ случаѣ нечетнаго n

$$g=\frac{2ka}{\pi(k^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\vartheta\, d\vartheta,$$

а въ случаѣ четнаго

$$g=\frac{2ka^2}{(k^2+1)^{n+1}}\left\{\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}-\frac{n+1}{2}\frac{kJ}{2\pi}\right\}, \tag{95}$$

гдѣ J имѣетъ прежнее значенiе.

Въ первомъ случаѣ постоянная g будетъ, слѣдовательно, обладать знакомъ постоянной a. Во второмъ знакъ ея отъ a не зависитъ. Покажемъ, что она будетъ тогда отрицательною.

Для этой цѣли прежде всего докажемъ, что kJ есть возрастающая функцiя k.

Это легко докажется при помощи формулы приведенiя, дающей зависимость между двумя J, соотвѣтствующими значенiямъ n, разнящимся на двѣ единицы.

Названную формулу выведемъ посредствомъ интегрированiя по частямъ, и если J, какъ функцiю числа n, означимъ черезъ J_n, то она будетъ слѣдующею:

$$kJ_n=\frac{n^2(n-1)^2}{(k^2+n^2)^2}kJ_{n-2}+\frac{k^2}{k^2+n^2}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}\vartheta\, d\vartheta+\frac{n(n-1)}{k^2+n^2}\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n-2}\vartheta\, d\vartheta\right\}. \tag{96}$$

Формула эта легко приводится къ виду

$$\begin{aligned}kJ_n=&\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}\vartheta\, d\vartheta-\frac{n}{2(k^2+n^2)}\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n-2}\vartheta\, d\vartheta-\\&-\frac{n^2(n-1)^2}{(k^2+n^2)^2}\left\{\left[\frac{n-2}{2(n-1)^2}+1\right]\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n-4}\vartheta\, d\vartheta-kJ_{n-2}\right\},\end{aligned} \tag{97}$$

и тогда становится яснымъ, что, если для $m = n - 2$ выполняется неравенство

$$kJ_m < \int_0^{2\pi} \cos^{2m}\vartheta\, d\vartheta\,,$$

то послѣднее будетъ выполняться и для $m = n$.

Но изъ (97) непосредственно видно, что это неравенство справедливо въ случаѣ $m = 2$. Оно будетъ поэтому справедливо и для всякаго бóльшаго 2 четнаго m.

Принимая въ разсчетъ указанное неравенство, изъ уравненія (97) заключаемъ, что, если kJ_{n-2} есть возрастающая функція k, то такою же будетъ и kJ_n. Поэтому, замѣчая, что функція

$$kJ_2 = \pi\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{k^2+4}\right)$$

возрастаетъ съ возрастаніемъ k, убѣждаемся, что kJ_n обладаетъ тѣмъ же свойствомъ по крайней мѣрѣ для всякаго бóльшаго 2 четнаго n. *)

Доказавши, что kJ_n или, при нашемъ прежнемъ обозначеніи, kJ есть возрастающая функція k, мы получимъ для нея низшій предѣлъ, дѣлая въ ней $k = 0$. Этотъ предѣлъ найдется изъ формулы (96) и будетъ слѣдующій:

$$\left(\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\right)^2 2\pi\,.$$

Обращаясь теперь къ формулѣ (95), замѣняемъ въ ней kJ найденнымъ низшимъ предѣломъ. Тогда выраженіе, стоящее въ скобкахъ, обратится въ слѣдующее:

$$\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\left\{\frac{(n+1)(n+3)\ldots(2n+1)}{(n+2)(n+4)\ldots(2n+2)} - \frac{n+1}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\right\}.$$

А послѣднее, приводясь къ виду

$$\frac{1}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\left\{\frac{(n+3)(n+5)\ldots(2n+1)}{(n+2)(n+4)\ldots 2n} - \frac{3.5.7\ldots(n+1)}{2.4.6\ldots n}\right\},$$

очевидно, отрицательно.

Поэтому величина g, опредѣляемая формулою (95), и подавно будетъ отрицательною.

Такимъ образомъ окончательно приходимъ къ заключенію, что въ случаѣ нечетнаго n невозмущенное движеніе устойчиво, если a отрицательно, и неустойчиво, если a положительно; въ случаѣ же четнаго n всегда устойчиво.

---

*) Указанныя здѣсь свойства функціи J_n можно было бы распространить, если бы въ томъ была надобность, и на нечетныя значенія n.

О періодическихъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

42. Мы видѣли, что всякій разъ, когда возможно найти періодическіе ряды извѣстнаго типа, которые формально удовлетворяли бы системѣ (45), послѣдняя дѣйствительно допускаетъ періодическое рѣшеніе, представляемое такими рядами.

Доказательство этого предложенія основывалось на допущеніи, что всѣ корни опредѣляющаго уравненія системы (45), за исключеніемъ двухъ, обладаютъ отрицательными вещественными частями. Но допущеніе это несущественно, и названное предложеніе легко обобщить, разсматривая какую угодно систему, для которой опредѣляющее уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одну пару чисто мнимыхъ корней.

Покажемъ, какъ это можно сдѣлать, ограничиваясь тѣмъ случаемъ, когда между чисто мнимыми корнями опредѣляющаго уравненія находятся *простые*

$$\lambda\sqrt{-1}\,, \qquad -\lambda\sqrt{-1}\,, \tag{98}$$

цѣлыя кратности которыхъ не суть его корни, и когда уравненіе это не имѣетъ равныхъ нулю корней.

Допуская, что данная система дифференціальныхъ уравненій удовлетворяетъ этимъ предположеніямъ, и пользуясь извѣстною линейною подстановкой съ постоянными коэффиціентами, преобразовываемъ ее къ виду (45). При томъ, для упрощенія дальнѣйшихъ разсужденій названную подстановку выбираемъ такъ, чтобы всѣ постоянныя, играющія роль α_s, β_s, были нулями. Это всегда возможно при сдѣланномъ допущеніи, что корни (98) суть простые.

Такимъ образомъ преобразованная система будетъ вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y, \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n + X_s \qquad {\scriptstyle (s=1,\,2,\,\dots,\,n)} \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

при томъ же характерѣ функцій, означенныхъ черезъ X, Y, X_s, какъ и въ системѣ (45), но съ болѣе общими коэффиціентами $p_{s\sigma}$, относительно которыхъ здѣсь предполагается только, что уравненіе

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\varkappa & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn}-\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

не имѣетъ корней вида $m\lambda\sqrt{-1}$, соотвѣтствующихъ дѣйствительнымъ цѣлымъ значеніямъ m, включая и нуль.

Дѣлаемъ теперь подстановку

$$x = r\cos\vartheta\,, \quad y = r\sin\vartheta\,, \quad x_1 = rz_1\,, \quad x_2 = rz_2\,, \;\ldots\,, \quad x_n = rz_n$$

и изъ системы (99) выводимъ дифференціальныя уравненія, опредѣляющія величины $r\,,\ z_1\,,\ z_2\,,\ldots\,,\ z_n$, какъ функціи перемѣнной ϑ.

Полагая

$$q_{s\sigma} = \frac{p_{s\sigma}}{\lambda} \qquad {\scriptstyle (s,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)}$$

и означая черезъ $\varphi_1\,,\ \varphi_2\,,\ldots\,,\ \varphi_n$ нѣкоторыя квадратичныя формы величинъ $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$, можемъ представить эти уравненія подъ видомъ

$$\left.\frac{dr}{d\vartheta} = R\,, \qquad \frac{dz_s}{d\vartheta} = q_{s1}z_1 + q_{s2}z_2 + \ldots + q_{sn}z_n + \varphi_s r + Z_s\,, \quad {\scriptstyle (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)}\right\} \tag{100}$$

гдѣ $R\,,\ Z_s$ суть функціи перемѣнныхъ $z_1\,,\ z_2\,,\ldots\,,\ z_n\,,\ r\,,\ \vartheta$, легко выводимыя изъ функцій X, Y, X_s и представляемыя, при разложеніи по степенямъ величинъ $r\,,\ z_s$, рядами, не содержащими членовъ ниже второго порядка, съ періодическими относительно ϑ коэффиціентами [по отношенію къ сходимости ряды эти такого же характера, какъ и разложенія функцій Q_s въ уравненіяхъ (47)].

Будемъ теперь трактовать уравненія (100) подобно тому, какъ мы трактовали уравненія (47) въ параграфахъ 34$^{\underline{\text{омъ}}}$ и 35$^{\underline{\text{омъ}}}$.

Разыскивая для системы (100) рѣшеніе подъ видомъ рядовъ

$$\left.\begin{aligned} r &= c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + \ldots\,, \\ z_s &= u_s^{(1)}c + u_s^{(2)}c^2 + u_s^{(3)}c^3 + \ldots\,, \\ &{\scriptstyle (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)} \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

расположенныхъ по восходящимъ степенямъ произвольной постоянной c, съ періодическими относительно ϑ коэффиціентами u, получимъ для опредѣленія послѣднихъ системы дифференціальныхъ уравненій такого же характера, какъ и въ случаѣ, разсмотрѣнномъ въ указанныхъ параграфахъ, и когда задача наша возможна, эти системы дадутъ искомые коэффиціенты подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ въ той же послѣдовательности, какъ и въ названномъ сейчасъ случаѣ. При этомъ, каково бы ни было l, разысканіе коэффиціентовъ $u_1^{(l)}\,,\ u_2^{(l)}\,,\ldots\,,\ u_n^{(l)}$ послѣ опредѣленія всѣхъ предшествующихъ имъ, по прежнему не представитъ затрудненій, ибо опредѣляющее уравненіе

$$\begin{vmatrix} q_{11} - \varkappa & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{102}$$

системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, отъ которой зависятъ эти коэффиціенты, при сдѣланныхъ допущеніяхъ не имѣетъ ни равныхъ нулю корней, ни корней, которые представляли бы цѣлыя кратности $\sqrt{-1}$. Возможность нашей задачи поэтому по прежнему будетъ обусловливаться тѣмъ, чтобы каждая изъ періодическихъ функцій, къ интегрированію которой приведется опредѣленіе какого либо изъ коэффиціентовъ $u^{(l)}$, при разложеніи въ рядъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ, давала только члены, зависящіе отъ ϑ.

Допустимъ, что это условіе дѣйствительно выполняется, и предполагая по прежнему, что вычисленіе разсматриваемыхъ коэффиціентовъ ведется такъ, чтобы всѣ $u^{(l)}$ при $\vartheta = 0$ дѣлались нулями, изслѣдуемъ сходимость рядовъ (101).

Съ этою цѣлью разсмотримъ такія же линейныя преобразованія послѣднихъ, какія для рядовъ (49) разсматривались въ параграфѣ 35$^{\text{омъ}}$.

Вопросъ приведется такимъ образомъ къ изслѣдованію рядовъ (101), составленныхъ въ предположеніи, что всѣ коэффиціенты $q_{s\sigma}$, которые не заключаются въ группѣ

$$q_{11} = \varkappa_1, \quad q_{22} = \varkappa_2, \dots, \quad q_{nn} = \varkappa_n, \quad q_{21} = \sigma_1, \quad q_{32} = \sigma_2, \dots, \quad q_{n\,n-1} = \sigma_{n-1},$$

суть нули.

Разсматривая эти ряды, допустимъ, что въ нихъ всѣ коэффиціенты $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, для которыхъ $i < l$, уже извѣстны. Тогда для опредѣленія коэффиціентовъ $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ получимъ уравненія

$$\frac{du^{(l)}}{d\vartheta} = U^{(l)}, \qquad \frac{du_1^{(l)}}{d\vartheta} = \varkappa_1 u_1^{(l)} + \varphi_1 u^{(l)} + U_1^{(l)},$$

$$\frac{du_j^{(l)}}{d\vartheta} = \varkappa_j u_j^{(l)} + \sigma_{j-1} u_{j-1}^{(l)} + \varphi_j u^{(l)} + U_j^{(l)}, \qquad (j = 2, 3, \dots, n)$$

въ которыхъ извѣстные члены $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ будутъ функціями такого же характера, какъ и въ системѣ ненумерованныхъ уравненій на стр. 117.

Первое изъ этихъ уравненій дастъ

$$u^{(l)} = \int_0^{\vartheta} U^{(l)} d\vartheta.$$

Но для полученія періодическихъ рѣшеній остальныхъ здѣсь уже нельзя будетъ пользоваться формулами вида (53), ибо послѣднія возможны только въ предположеніи, что вещественныя части всѣхъ $\varkappa_s$ отличны отъ нуля и при томъ отрицательны.

Чтобы получить соотвѣтствующія формулы для разсматриваемаго случая, мы замѣчаемъ, что вообще періодическое рѣшеніе уравненія

$$\frac{du}{d\vartheta} = \varkappa u + f(\vartheta),$$

въ которомъ $\varkappa$ есть отличная отъ нуля постоянная, а $f(\vartheta)$ періодическая функція ϑ съ періодомъ ω, находится по формулѣ:

$$u = \frac{e^{\varkappa\vartheta}}{e^{-\varkappa\omega}-1}\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} e^{-\varkappa\vartheta} f(\vartheta)\, d\vartheta,$$

если только $\varkappa\omega$ не представляетъ цѣлой кратности $2\pi\sqrt{-1}$.

При $\omega = 2\pi$ и $\varkappa = \varkappa_s$ послѣднее условіе выполняется, ибо величины $\varkappa_s$ суть корни уравненія (102).

Поэтому для вычисленія коэффиціентовъ $u_s^{(l)}$ можно воспользоваться формулами:

$$u_1^{(l)} = \frac{e^{\varkappa_1\vartheta}}{e^{-2\pi\varkappa_1}-1}\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\varkappa_1\vartheta}(\varphi_1 u^{(l)} + U_1^{(l)})\, d\vartheta,$$

$$u_j^{(l)} = \frac{e^{\varkappa_j\vartheta}}{e^{-2\pi\varkappa_j}-1}\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\varkappa_j\vartheta}(\sigma_{j-1} u_{j-1}^{(l)} + \varphi_j u^{(l)} + U_j^{(l)})\, d\vartheta.$$

$$(j = 2, 3, \ldots, n)$$

Положимъ

$$\varkappa_s = \lambda_s + \mu_s\sqrt{-1}, \qquad \varrho_s = \frac{\lambda_s}{e^{2\pi\lambda_s}-1}\sqrt{1 - 2e^{2\pi\lambda_s}\cos 2\pi\mu_s + e^{4\pi\lambda_s}},$$

разумѣя подъ λ_s, μ_s вещественныя числа и считая радикалъ въ выраженіи ϱ_s положительнымъ. Въ случаѣ $\lambda_s = 0$ подъ ϱ_s будемъ разумѣть предѣлъ

$$\frac{|\sin\pi\mu_s|}{\pi},$$

къ которому приближается его выраженіе при λ_s, стремящемся къ нулю.

При нашихъ предположеніяхъ всѣ ϱ_s будутъ во всякомъ случаѣ отличными отъ нуля.

Означимъ затѣмъ черезъ $v^{(l)}$, $v_s^{(l)}$ высшіе предѣлы модулей функцій $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ, а черезъ a_s такіе же предѣлы модулей функцій φ_s.

Тогда, если подъ $V_s^{(l)}$ будемъ разумѣть постоянныя, выводящіяся изъ функцій $U_s^{(l)}$, какъ было указано въ параграфѣ $35^{\text{омъ}}$, то согласно нашимъ формуламъ можно будетъ принять

$$v^{(l)} = 2\pi V^{(l)},$$

$$v_1^{(l)} = \frac{e^{\lambda_1\vartheta}}{|e^{-2\pi\varkappa_1}-1|}\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\lambda_1\vartheta}(a_1 v^{(l)} + V_1^{(l)})\, d\vartheta,$$

$$v_j^{(l)} = \frac{e^{\lambda_j\vartheta}}{|e^{-2\pi\varkappa_j}-1|}\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\lambda_j\vartheta}(|\sigma_{j-1}| v_{j-1}^{(l)} + a_j v^{(l)} + V_j^{(l)})\, d\vartheta.$$

$$(j = 2, 3, \ldots, n)$$

Такимъ образомъ получимъ уравненія

$$v^{(l)} = 2\pi V^{(l)}, \qquad \varrho_1 v_1^{(l)} = a_1 v^{(l)} + V_1^{(l)},$$

$$\varrho_j v_j^{(l)} = |\sigma_{j-1}| v_{j-1}^{(l)} + a_j v^{(l)} + V_j^{(l)}, \qquad (j=2,\,3,\,\ldots,\,n)$$

въ которыхъ $V^{(l)}$, $V_s^{(l)}$ будутъ зависѣть только отъ тѣхъ $v^{(i)}$, $v_s^{(i)}$, для которыхъ $i < l$. Уравненіями этими можно будетъ пользоваться для всякаго l, бóльшаго 1. При томъ можно будетъ принять

$$\varrho_1 v_1^{(1)} = a_1, \quad \varrho_j v_j^{(1)} = |\sigma_{j-1}| v_{j-1}^{(1)} + a_j, \qquad (j=2,\,3,\,\ldots,\,n)$$

и тогда они дадутъ возможность найти всякую изъ постоянныхъ v.

Дальнѣйшій ходъ разсужденій будетъ тотъ же, какъ и въ параграфѣ 35$^{\underline{\text{омъ}}}$.

Такимъ образомъ докажемъ, что при сдѣланныхъ предположеніяхъ и при $|c|$ достаточно маломъ ряды (101) будутъ абсолютно сходящимися, каково бы ни было вещественное ϑ, и что ряды модулей ихъ членовъ будутъ сходящимися въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній послѣдняго.

Предыдущій анализъ съ соотвѣтствующими измѣненіями легко распространяется и на комплексныя значенія ϑ, для которыхъ числовыя величины коэффиціента при $\sqrt{-1}$ не превосходятъ какого либо даннаго предѣла.

Мы можемъ поэтому воспользоваться разсужденіями параграфа 36$^{\underline{\text{ого}}}$ для того, чтобы изъ періодическаго рѣшенія системы (100), опредѣляемаго разсмотрѣнными сейчасъ рядами, вывести такое же рѣшеніе для системы (99).

Послѣднее представится рядами вида (61) и будетъ заключать въ себѣ двѣ постоянныхъ произвольныхъ: c, которую мы разсматривали выше, и t_0, которая войдетъ вмѣстѣ съ t въ комбинаціи $t - t_0$. Первая изъ этихъ постоянныхъ войдетъ также и въ выраженіе

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}\,(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots)$$

его періода (соотвѣтствующаго перемѣнной t), который будетъ голоморфною функціей c.

Для непосредственнаго составленія рядовъ, выражающихъ это періодическое рѣшеніе, если угодно, можно воспользоваться методой, изложенной въ примѣчаніи въ параграфѣ 36$^{\underline{\text{омъ}}}$.

Укажемъ нѣкоторыя обстоятельства, характеризующія это рѣшеніе.

43. Разсмотримъ систему уравненій въ частныхъ производныхъ

$$\left.(-\lambda y + X)\,\frac{\partial x_s}{\partial x} + (\lambda x + Y)\,\frac{\partial x_s}{\partial y} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \cdots + p_{sn} x_n + X_s, \quad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)\right\} \quad (103)$$

подобную той, съ которою мы имѣли дѣло въ параграфѣ 39$^{\underline{\text{омъ}}}$.

Легко убѣдиться, что при нашихъ предположеніяхъ относительно коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$, какъ и въ случаѣ, разсмотрѣнномъ въ указанномъ сейчасъ параграфѣ, этой системѣ всегда можно формально удовлетворить рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x и y, безъ постоянныхъ членовъ *), и что такіе ряды будутъ единственными.

Если же остановимся на предположеніи, что для системы (99) можетъ быть найдено указанное выше періодическое рѣшеніе, то такъ же, какъ и въ параграфѣ 39$^{\text{омъ}}$, докажемъ, что эти ряды при достаточно малыхъ $|x|$ и $|y|$ будутъ абсолютно сходящимися, представляя голоморфныя функціи перемѣнныхъ x и y, дѣйствительно удовлетворяющія системѣ (103), и что приравнивая величины x_s этимъ функціямъ, получимъ результатъ исключенія постоянныхъ c и t_0 изъ уравненій, выражающихъ періодическое рѣшеніе.

Это рѣшеніе характеризуется, слѣдовательно, тѣмъ, что для него величины x_s суть вполнѣ опредѣленныя голоморфныя функціи величинъ x и y.

Что же касается этихъ послѣднихъ, какъ функцій перемѣнной t, то онѣ находятся, какъ общія величины x и y, удовлетворяющія системѣ

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + (X), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + (Y), \tag{104}$$

выводимой изъ двухъ первыхъ уравненій системы (99) замѣною величинъ x_s названными голоморфными функціями.

Поэтому, если пожелаемъ разсматривать начальныя значенія функцій $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n$, то называя ихъ соотвѣтственно черезъ $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n$, можемъ вполнѣ охарактеризовать наше періодическое рѣшеніе условіемъ, чтобы всѣ a_s были голоморфными функціями величинъ a и b, уничтожающимися при $a = b = 0$ и удовлетворяющими системѣ частныхъ дифференціальныхъ уравненій, выводимой изъ (103) замѣною величинъ $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ величинами $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Посмотримъ, къ какому виду приведутся ряды, представляющіе это рѣшеніе, если вмѣсто постоянныхъ c и t_0 въ нихъ ввести постоянныя a и b.

Прежде всего покажемъ, что періодъ T будетъ голоморфною функціей a и b.

Съ этою цѣлью воспользуемся уже извѣстнымъ намъ предложеніемъ, въ силу котораго, при разсматриваемыхъ здѣсь условіяхъ, система (104) будетъ обладать независящимъ отъ t голоморфнымъ интеграломъ.

Такъ какъ послѣдній всегда можетъ быть выбранъ такъ, чтобы въ немъ совокупность членовъ наинизшаго порядка приводилась къ виду $x^2 + y^2$, то разсматривая такой интегралъ и означая черезъ C постоянную произвольную, получимъ уравненіе

$$x^2 + y^2 + F(x, y) = C^2,$$

*) Въ разсматриваемомъ случаѣ въ этихъ рядахъ, очевидно, не будетъ и членовъ перваго порядка.

въ которомъ F будетъ голоморфною функціей x и y, не заключающею въ себѣ членовъ ниже третьяго порядка.

Дѣлая въ этомъ уравненіи $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, выведемъ изъ него слѣдующее:

$$r^2 + F(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta) = C^2. \tag{105}$$

А послѣднее, если въ немъ r будемъ разсматривать, какъ неизвѣстную, а ϑ, какъ данную величину, будетъ обладать двумя только рѣшеніями, удовлетворяющими требованію, чтобы выборомъ достаточно малаго $|C|$ модуль r можно было сдѣлать насколько угодно малымъ, и рѣшенія эти, голоморфныя относительно C, при разложеніи по восходящимъ степенямъ его представятся общей формулой вида:

$$r = \pm C + u^{(2)} C^2 \pm u^{(3)} C^3 + \dots .$$

Здѣсь всѣ коэффиціенты u будутъ періодическими функціями ϑ, при томъ—такими, что при замѣнѣ ϑ черезъ $\vartheta + \pi$ всѣ $u^{(m)}$, соотвѣтствующіе четнымъ m, будутъ пріобрѣтать прежнія значенія съ противоположными знаками, а соотвѣтствующіе нечетнымъ вовсе не будутъ мѣняться. Въ этомъ убѣдимся, замѣчая, что уравненіе (105) при замѣнѣ r черезъ $-r$ и ϑ черезъ $\vartheta + \pi$ не мѣняется.

Вслѣдствіе этого каждое изъ разсматриваемыхъ рѣшеній послѣ замѣны C черезъ $-C$ и ϑ черезъ $\vartheta + \pi$ будетъ давать для r прежнее значеніе съ противоположнымъ знакомъ. А отсюда слѣдуетъ, что, если, пользуясь которымъ либо изъ нихъ, вторую часть уравненія

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{r}{\lambda r + (Y)\cos\vartheta - (X)\sin\vartheta}$$

выразимъ въ функціи ϑ, то послѣдняя при указанной замѣнѣ не будетъ мѣняться.

Поэтому интегралъ

$$\int_0^{2\pi} \frac{r\,d\vartheta}{\lambda r + (Y)\cos\vartheta - (X)\sin\vartheta},$$

выражающій періодъ T, не будетъ мѣняться при замѣнѣ C черезъ $-C$, и слѣдовательно періодъ T, который будетъ голоморфною функціей C, представится рядомъ

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2 C^2 + h_4 C^4 + \dots),$$

содержащимъ только четныя степени послѣдней.

Но квадратъ постоянной C, въ силу самаго ея значенія, представляетъ голоморфную функцію a и b. Поэтому таковъ же будетъ по отношенію къ нимъ и періодъ T.

Установивши это, мы замѣчаемъ теперь, что, если $T(a, b)$ есть означеніе періода T, какъ функціи a и b, то $T(x, y)$ необходимо будетъ интеграломъ системы (104).

Поэтому, если сдѣлаемъ

$$dt = T(x, y)\,\frac{d\tau}{2\pi}$$

и величины x и y, удовлетворяющія системѣ (104), будемъ разсматривать, какъ функціи перемѣнной τ, то функціи эти при всякихъ начальныхъ значеніяхъ, модули которыхъ достаточно малы, будутъ относительно τ періодическими съ періодомъ 2π.

Эти функціи будутъ удовлетворять при томъ уравненіямъ

$$\frac{dx}{d\tau} = \{-\lambda y + (X)\}\,\frac{T(x, y)}{2\pi}, \qquad \frac{dy}{d\tau} = \{\lambda x + (Y)\}\,\frac{T(x, y)}{2\pi}, \tag{106}$$

вторыя части которыхъ относительно x и y голоморфны.

Вслѣдствіе этого, если модули ихъ начальныхъ значеній a и b достаточно малы, функціи эти будутъ представляться рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ a и b, для всѣхъ значеній τ, не выходящихъ изъ заранѣе поставленныхъ границъ. А такъ какъ названные ряды при всякихъ a и b, модули которыхъ достаточно малы, должны давать періодическія функціи τ съ періодомъ, не зависящимъ отъ a и b, то коэффиціенты въ нихъ необходимо сами должны быть періодическими. По свойству же уравненій (106), эти коэффиціенты должны быть для этого конечными рядами синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей τ.

Такимъ образомъ, совершенно независимо отъ первоначальныхъ выраженій функцій x и y черезъ постоянныя c и t_0, можемъ установить, что, если въ наше періодическое рѣшеніе въ качествѣ постоянныхъ произвольныхъ ввести a и b, то оно представится рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ послѣднихъ, въ которыхъ коэффиціенты будутъ суммами конечнаго числа періодическихъ членовъ, представляющихъ произведенія постоянныхъ на синусы и косинусы цѣлыхъ кратностей

$$\tau = \frac{2\pi t}{T(a, b)},$$

и что рядами этими, если въ нихъ разсматривать τ, какъ независящій отъ a и b параметръ, будутъ опредѣляться голоморфныя функціи a и b въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній τ.

Едва-ли нужно прибавлять, что, когда коэффиціенты въ уравненіяхъ (99) и постоянныя a, b суть вещественныя величины, періодъ T будетъ такимъ же, и что при тѣхъ же условіяхъ указанные сейчасъ ряды будутъ давать вещественныя значенія для искомыхъ функцій для всякаго вещественнаго t, если таково начальное значеніе послѣдняго.

Примѣчаніе. — Если для постоянныхъ a и b разсматривать и мнимыя значенія, то въ нашемъ періодическомъ рѣшеніи будутъ заключаться два, зависящія каждое только отъ одной постоянной произвольной и замѣчательныя тѣмъ, что для нихъ періодомъ служитъ неизмѣнная величина $\frac{2\pi}{\lambda}$. Рѣшенія эти получимъ, если между величинами a и b установимъ зависимость

$$C^2 = a^2 + b^2 + F(a, b) = 0,$$

которая даетъ возможность каждую изъ нихъ выразить двоякимъ образомъ, какъ голоморфную функцію другой.

Эти рѣшенія можно опредѣлить, конечно, и независимо отъ нашего. При томъ даже существованіе послѣдняго для нихъ не необходимо, ибо они могутъ быть найдены всякій разъ, когда уравненія (99) удовлетворяютъ предположеніямъ, сдѣланнымъ въ началѣ предыдущаго параграфа.

Говоря далѣе о періодическихъ рѣшеніяхъ, будемъ подразумѣвать, что рѣчь идетъ о рѣшеніяхъ разсмотрѣннаго выше типа съ двумя постоянными произвольными.

44. Возьмемъ опять систему (99) при прежнихъ предположеніяхъ относительно коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$.

Допустимъ, что для этой системы найденъ независящій отъ t голоморфный интегралъ, и что въ немъ совокупность членовъ второго порядка зависитъ отъ x и y.

Принимая въ разсчетъ, что послѣднія въ члены перваго порядка входятъ только въ двухъ первыхъ уравненіяхъ системы (99), при нашихъ предположеніяхъ легко докажемъ, что въ эту совокупность они могутъ войти только подъ видомъ комбинаціи $x^2 + y^2$.

Мы должны поэтому допустить, что интегралъ нашъ умноженіемъ на постоянную приводится къ слѣдующему виду:

$$x^2 + y^2 + F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, y),$$

гдѣ F означаетъ голоморфную функцію перемѣнныхъ x_s, x, y, разложеніе которой не содержитъ членовъ ниже второго порядка, а въ членахъ второго порядка, если таковые входятъ въ нее, не заключаетъ ни x, ни y. *)

Покажемъ, что при этихъ условіяхъ система (99) всегда будетъ обладать періодическимъ рѣшеніемъ.

Съ этою цѣлью вводимъ въ нашъ интегралъ вмѣсто перемѣнныхъ x, y, x_s перемѣнныя r, ϑ, z_s при помощи подстановки, которою уже пользовались раньше.

Тогда извлеченіемъ квадратнаго корня изъ интеграла этого можно будетъ вывести слѣдующій:

$$r + r\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n, r, \vartheta), \tag{107}$$

гдѣ φ означаетъ голоморфную функцію величинъ z_s, r, уничтожающуюся при одновременномъ равенствѣ ихъ нулю и обладающую въ своемъ разложеніи періодическими относительно ϑ коэффиціентами.

*) При нашихъ предположеніяхъ этотъ интегралъ не можетъ содержать членовъ перваго порядка.

Допустимъ теперь, что періодическаго рѣшенія не существуетъ, и что при составленіи рядовъ (101) это обнаруживается въ первый разъ въ членахъ $m^{\text{аго}}$ порядка. Допустимъ, слѣдовательно, что въ этихъ рядахъ коэффиціенты

$$u^{(2)}, \quad u^{(3)}, \dots, \quad u^{(m-1)},$$
$$u_s^{(1)}, \quad u_s^{(2)}, \dots \quad u_s^{(m-1)} \qquad (s=1, 2, \dots, n)$$

представляютъ періодическія функціи, а коэффиціентъ $u^{(m)}$ имѣетъ видъ:

$$u^{(m)} = g\vartheta + v,$$

гдѣ g отличная отъ нуля постоянная, а v періодическая функція ϑ.

Въ этомъ предположеніи, дѣлаемъ въ выраженіе (107) подстановку

$$r = c + u^{(2)} c^2 + \dots + u^{(m-1)} c^{m-1} + u^{(m)} c^m,$$
$$z_s = u_s^{(1)} c + u_s^{(2)} c^2 + \dots + u_s^{(m-1)} c^{m-1}, \qquad (s=1, 2, \dots, n)$$

и результатъ располагаемъ по восходящимъ степенямъ c.

Такъ какъ выраженіе это есть интегралъ системы (100), то по самому опредѣленію величинъ u, въ результатѣ должны выйти постоянными всѣ члены, содержащіе c въ степеняхъ ниже $m + 1^{\text{ой}}$.

Но это, по крайней мѣрѣ для члена съ $m^{\text{ой}}$ степенью c, очевидно, невозможно, ибо для функціи $r\varphi$ такой членъ необходимо будетъ періодическимъ, и слѣдовательно навѣрно не дастъ постоянной величины въ суммѣ съ членомъ

$$(g\vartheta + v)\, c^m$$

функціи r.

Мы должны поэтому заключить, что наше допущеніе невозможно, и что слѣдовательно, какъ бы далеко ни были продолжаемы ряды (101), всѣ члены въ нихъ можно предполагать періодическими. А при этомъ условіи существованіе періодическаго рѣшенія, какъ мы видѣли, несомнѣнно.

Примѣчаніе. — Мы предполагали, что опредѣляющее уравненіе не имѣетъ равныхъ нулю корней. Но мы не встрѣтили бы затрудненій и при существованіи послѣднихъ, если бы наша система дифференціальныхъ уравненій допускала достаточное число независящихъ отъ t голоморфныхъ интеграловъ, содержащихъ члены перваго порядка, совокупности которыхъ были бы между собою независимыми.

Мы разумѣемъ случай, когда число такихъ интеграловъ достигаетъ своего высшаго предѣла, которымъ всегда служитъ кратность m равнаго нулю корня.

Дѣйствительно, если имѣемъ дѣло съ этимъ случаемъ, то приравнивая найденные интегралы (которые пусть не содержатъ постоянныхъ членовъ) произвольнымъ постояннымъ $c_1, c_2, \dots, c_m$, и пользуясь получаемыми такимъ образомъ интегральными уравненіями, можемъ понизить порядокъ нашей системы на m единицъ. При томъ вычисленіями всегда можемъ распорядиться такъ, чтобы окончательно получилась система дифференціальныхъ уравненій обычнаго въ нашемъ изслѣдованіи вида, для которой опредѣляющее уравненіе при достаточно малыхъ $|c|$ не имѣло бы равныхъ нулю корней, приводясь, когда всѣ c дѣлаются нулями, къ опредѣляющему уравненію первоначальной системы, сокращенному на $m^{\text{ую}}$ степень неизвѣстной.

45. Предыдущіе выводы могутъ найти приложенія во многихъ задачахъ механики.

Укажемъ для примѣра на вопросъ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, или опирающагося своею поверхностью на гладкую горизонтальную плоскость. Въ томъ и въ другомъ случаѣ всегда будутъ существовать извѣстныя періодическія движенія, въ которыхъ проэкціи угловой скорости на оси, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, и косинусы угловъ направленія вертикали съ этими осями будутъ измѣняться періодически съ теченіемъ времени.

Чтобы указать приложенія болѣе общаго характера, допустимъ, что наша система дифференціальныхъ уравненій имѣетъ каноническую форму:

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_s}. \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,k)$$

Здѣсь H предполагается голоморфною функціей величинъ $x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_k$, въ которой члены наинизшаго порядка образуютъ квадратичную форму H_2.

Всякій разъ, когда эта система будетъ удовлетворять предположеніямъ, сдѣланнымъ въ началѣ параграфа $42^{\text{го}}$, для нея найдется по крайней мѣрѣ одно періодическое рѣшеніе съ двумя постоянными произвольными.

Для доказательства (по замѣченному въ началѣ предыдущаго параграфа) достаточно только показать, что послѣ преобразованія нашей системы къ виду (99), перемѣнныя, которыя будутъ играть роль x и y, непремѣнно войдутъ въ функцію H_2.

Но при разсматриваемыхъ предположеніяхъ, когда опредѣляющее уравненіе не имѣетъ равныхъ нулю корней, послѣднее ясно уже изъ того, что опредѣлитель Hesse для функціи H_2 не можетъ быть нулемъ.

При томъ, если опредѣляющее уравненіе имѣетъ только чисто мнимые корни

$$\pm\lambda_1\sqrt{-1}, \quad \pm\lambda_2\sqrt{-1}, \ldots, \quad \pm\lambda_k\sqrt{-1},$$

то всякій разъ, когда числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ таковы, что ни одно изъ отношеній, которыя можно изъ нихъ составить, комбинируя ихъ по два, не представляетъ цѣлаго числа, для нашей канонической системы найдется k періодическихъ рѣшеній, содержащихъ по двѣ постоянныхъ произвольныхъ каждое.

Предполагая это, допустимъ, что въ функціи H совокупность членовъ второго порядка имѣетъ видъ:

$$\frac{\lambda_1}{2}(x_1^2+y_1^2) + \frac{\lambda_2}{2}(x_2^2+y_2^2) + \cdots + \frac{\lambda_k}{2}(x_k^2+y_k^2).$$

Мы знаемъ (пар. 21), что если подъ каждымъ λ_s разумѣть число съ надлежащимъ знакомъ, то такое допущеніе приводится къ выполненію нѣкотораго линейнаго преобразованія нашей канонической системы.

Въ этихъ предположеніяхъ, разсматривая величины

$$x_1, \quad x_2, \ \dots, \ x_{j-1}, \quad x_{j+1}, \ \dots, \ x_k,$$

$$y_1, \quad y_2, \ \dots, \ y_{j-1}, \quad y_{j+1}, \ \dots, \ y_k,$$

какъ функціи перемѣнныхъ x_j и y_j, составляемъ слѣдующую систему частныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial x_s}{\partial y_j} - \frac{\partial H}{\partial y_j}\frac{\partial x_s}{\partial x_j} = -\frac{\partial H}{\partial y_s},$$

$$(s = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, k)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial y_s}{\partial y_j} - \frac{\partial H}{\partial y_j}\frac{\partial y_s}{\partial x_j} = \frac{\partial H}{\partial x_s},$$

и для послѣдней ищемъ рѣшеніе, въ которомъ всѣ x_s, y_s были бы голоморфными относительно x_j и y_j и уничтожались при $x_j = y_j = 0$. Такое рѣшеніе, какъ мы знаемъ, найдется всегда и будетъ только одно.

Разсматривая его, составляемъ выраженіе

$$1 + \sum_s \left(\frac{\partial x_s}{\partial x_j}\frac{\partial y_s}{\partial y_j} - \frac{\partial x_s}{\partial y_j}\frac{\partial y_s}{\partial x_j} \right) = [x_j, y_j]$$

(предполагая, что при суммированіи исключается значеніе $s = j$), и называемъ черезъ $H_j(x_j, y_j)$ функцію, въ которую обращается H вслѣдствіе замѣны величинъ x_s, y_s найденными для нихъ выраженіями.

Затѣмъ интегрируемъ уравненія

$$[x_j, y_j]\,\frac{dx_j}{dt} = -\frac{\partial H_j}{\partial y_j}, \qquad [x_j, y_j]\,\frac{dy_j}{dt} = \frac{\partial H_j}{\partial x_j}$$

и въ качествѣ постоянныхъ произвольныхъ вводимъ начальныя значенія a_j и b_j функцій x_j и y_j.

Тогда, если всѣ x, y выразимъ въ функціяхъ t, то при всякихъ a_j и b_j, модули которыхъ достаточно малы, будемъ имѣть одно изъ періодическихъ рѣшеній нашей канонической системы.

Въ этомъ рѣшеніи, которое можно назвать соотвѣтствующимъ числу λ_j, періодъ T_j, относящійся къ перемѣнной t, при достаточно малыхъ $|a_j|$ и $|b_j|$ будетъ опредѣляться формулой вида

$$T_j = \frac{2\pi}{\lambda_j}\left\{ 1 + h_j^{(1)} H_j(a_j, b_j) + h_j^{(2)} [H_j(a_j, b_j)]^2 + \dots \right\},$$

въ которой всѣ h означаютъ числа, не зависящія отъ постоянныхъ произвольныхъ.

Поступая, какъ сейчасъ указано, для всѣхъ значеній j отъ 1 до k включительно, получимъ всѣ k періодическихъ рѣшеній.

Каждое изъ этихъ рѣшеній можемъ опредѣлить, если угодно, условіями для начальныхъ значеній неизвѣстныхъ функцій. Эти условія получаются изъ изложеннаго непосредственно.

Такимъ образомъ въ случаѣ канонической системы, удовлетворяющей разсмотрѣннымъ сейчасъ предположеніямъ, если мы не можемъ вполнѣ рѣшить вопроса объ устойчивости, то по крайней мѣрѣ можемъ указать для возмущеній рядъ условій, при которыхъ невозмущенное движеніе несомнѣнно будетъ устойчивымъ.

Примѣчаніе. — Когда для предложенной канонической системы числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ удовлетворяютъ разсмотрѣнному сейчасъ условію, то для полученія всѣхъ соотвѣтствующихъ имъ періодическихъ рѣшеній, согласно изложенному правилу, мы должны предварительно выполнить нѣкоторое линейное преобразованіе нашей системы. А именно, за новыя неизвѣстныя функціи u_s, v_s мы должны принять такія линейныя формы прежнихъ x_s, y_s, для которыхъ совокупность членовъ второго измѣренія въ функціи H приводилась бы къ виду

$$\frac{\lambda_1}{2}(u_1^2+v_1^2)+\frac{\lambda_2}{2}(u_2^2+v_2^2)+\cdots+\frac{\lambda_k}{2}(u_k^2+v_k^2),$$

а дифференціальныя уравненія сохраняли бы каноническую форму.

Теперь покажемъ, какъ можно избѣжать этого преобразованія.

Для этого замѣчаемъ, что въ періодическомъ рѣшеніи, соотвѣтствующемъ числу λ_j, всѣ u_s, v_s, для которыхъ s не равно j, суть такія голоморфныя функціи u_j и v_j, въ которыхъ не заключается членовъ ниже второго измѣренія. Поэтому, если разсмотримъ двѣ какія-либо линейныя формы

$$p=\alpha_1u_1+\beta_1v_1+\alpha_2u_2+\beta_2v_2+\cdots+\alpha_ku_k+\beta_kv_k,$$
$$q=\gamma_1u_1+\delta_1v_1+\gamma_2u_2+\delta_2v_2+\cdots+\gamma_ku_k+\delta_kv_k$$

величинъ u_s, v_s, то для того же періодическаго рѣшенія онѣ обратятся въ голоморфныя функціи u_j и v_j, въ которыхъ совокупности членовъ перваго измѣренія будутъ

$$\alpha_ju_j+\beta_jv_j, \qquad \gamma_ju_j+\delta_jv_j.$$

Отсюда слѣдуетъ, что, если

$$\alpha_j\delta_j-\beta_j\gamma_j \tag{108}$$

не нуль, то въ этомъ рѣшеніи всѣ неизвѣстныя функціи будутъ голоморфными относительно p и q.

Допустимъ, что указанное сейчасъ условіе выполняется для всѣхъ значеній j отъ 1 до k включительно. Тогда всѣ x_s, y_s будутъ голоморфными функціями p и q для каждаго изъ k періодическихъ рѣшеній.

Вопросъ приведется такимъ образомъ къ разысканію этихъ голоморфныхъ функцій и къ интегрированію уравненій

$$\frac{dp}{dt} = P, \qquad \frac{dq}{dt} = Q, \tag{109}$$

которыя получатся послѣ этого для опредѣленія p и q.

Разыскивая названныя голоморфныя функціи, мы должны будемъ прежде всего удовлетворить нѣкоторой системѣ нелинейныхъ алгебраическихъ уравненій, отъ которой будутъ зависѣть коэффиціенты въ ихъ членахъ перваго измѣренія. Система эта будетъ допускать болѣе k рѣшеній. Но чтобы оріентироваться въ выборѣ тѣхъ изъ нихъ, которыя соотвѣтствуютъ нашей задачѣ, достаточно будетъ принять въ разсчетъ условіе, что для каждаго изъ искомыхъ *періодическихъ* рѣшеній величины P и Q, какъ функціи p и q, должны быть таковы, чтобы выраженіе

$$\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial q}$$

при $p = q = 0$ дѣлалось нулемъ. Это условіе, выражающее, что сумма корней опредѣляющаго уравненія системы (109) равна нулю, будетъ выполняться только для k рѣшеній. Останавливаясь на какомъ-либо изъ нихъ и переходя затѣмъ къ опредѣленію коэффиціентовъ для членовъ высшихъ измѣреній, будемъ получать системы линейныхъ уравненій, при рѣшеніи которыхъ не встрѣтится затрудненій.

Такимъ образомъ найдемъ k системъ голоморфныхъ функцій, изъ которыхъ каждая приведетъ къ одному изъ искомыхъ періодическихъ рѣшеній.

Остается указать правило, которымъ можно было бы руководствоваться при выборѣ линейныхъ формъ p и q, какъ функцій перемѣнныхъ x_s, y_s, не прибѣгая къ составленію формъ u_s, v_s.

Съ этою цѣлью одновременно съ p и q разсматриваемъ еще $2k-2$ линейныхъ формъ

$$p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_{k-1}, \qquad q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_{k-1},$$

представляющихъ совокупности членовъ перваго измѣренія въ выраженіяхъ производныхъ

$$\frac{d^2p}{dt^2}, \; \frac{d^4p}{dt^4}, \ldots, \; \frac{d^{2k-2}p}{dt^{2k-2}}, \qquad \frac{d^2q}{dt^2}, \; \frac{d^4q}{dt^4}, \ldots, \; \frac{d^{2k-2}q}{dt^{2k-2}},$$

составленныхъ при посредствѣ нашихъ дифференціальныхъ уравненій.

Выражая эти формы въ перемѣнныхъ u_s, v_s, по свойству послѣднихъ найдемъ:

$$(-1)^m p_m = \lambda_1^{2m}(\alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1) + \lambda_2^{2m}(\alpha_2 u_2 + \beta_2 v_2) + \ldots + \lambda_k^{2m}(\alpha_k u_k + \beta_k v_k),$$

$$(-1)^m q_m = \lambda_1^{2m}(\gamma_1 u_1 + \delta_1 v_1) + \lambda_2^{2m}(\gamma_2 u_2 + \delta_2 v_2) + \ldots + \lambda_2^{2m}(\gamma_k u_k + \delta_k v_k).$$

Отсюда, принимая въ разсчетъ, что числа $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_k^2$, при нашихъ предположеніяхъ, всѣ различны, заключаемъ, что, если изъ величинъ (108) ни одна не нуль, формы

$$\left.\begin{array}{l} p\,,\quad p_1\,,\quad p_2\,,\ \cdots\ ,\quad p_{k-1}\,, \\ q\,,\quad q_1\,,\quad q_2\,,\ \cdots\ ,\quad q_{k-1} \end{array}\right\} \tag{110}$$

будутъ между собою независимыми, и обратно — если это послѣднее условіе выполнено, то изъ величинъ (108) навѣрно ни одна не будетъ нулемъ.

Поэтому единственное условіе, которому мы должны будемъ удовлетворить при выборѣ формъ p и q, приведется къ тому, чтобы $2k$ формъ (110) представляли независимыя между собою функціи перемѣнныхъ x_s, y_s,

Примѣръ. — Пусть предложена система четвертаго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\,\frac{dy}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\,, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\frac{dx}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y}\,,$$

въ которой U означаетъ нѣкоторую данную голоморфную функцію перемѣнныхъ x и y, не содержащую членовъ ниже второго измѣренія.

Систему эту, если угодно, можно преобразовать въ каноническую

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}\,, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}\,, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}\,,$$

полагая

$$\xi = \frac{dx}{dt} - y\,, \qquad \eta = \frac{dy}{dt} + x\,,$$

$$H = U - \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2) + x\eta - y\xi - \frac{1}{2}\,(\xi^2 + \eta^2)\,.$$

Допустимъ, что соотвѣтствующее ей опредѣляющее уравненіе имѣетъ только чисто мнимые корни

$$\pm\lambda_1\sqrt{-1}\,, \qquad \pm\lambda_2\sqrt{-1}\,,$$

которые при томъ пусть таковы, что ни одно изъ отношеній

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,, \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

не представляетъ цѣлаго числа.

Предложенная система уравненій будетъ при этомъ обладать двумя періодическими рѣшеніями, и для опредѣленія послѣднихъ по указанному сейчасъ способу за величины p и q можно будетъ принять x и y.

Дѣйствительно, если допустимъ, что совокупность членовъ второго измѣренія въ функціи U представляется выраженіемъ

$$\frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2),$$

то дѣлая $p = x$, $q = y$, будемъ имѣть:

$$p_1 = Ax + By + 2\frac{dy}{dt} = (A-2)x + By + 2\eta,$$

$$q_1 = Bx + Cy - 2\frac{dx}{dt} = Bx + (C-2)y - 2\xi,$$

и слѣдовательно формы p, q, p_1, q_1 будутъ независимыми, каковы бы ни были постоянныя A, B, C.

Названныя періодическія рѣшенія найдутся поэтому интегрированіемъ уравненій

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \varphi(x, y),$$

вторыя части которыхъ опредѣлятся, какъ голоморфныя функціи перемѣнныхъ x и y, удовлетворяющія системѣ уравненій

$$f\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y} - 2\varphi = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad f\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2f = \frac{\partial U}{\partial y}$$

при двухъ слѣдующихъ условіяхъ: чтобы функціи эти уничтожались при $x = y = 0$, и чтобы въ членахъ перваго измѣренія ихъ разложеній

$$f = ax + by + \dots, \qquad \varphi = \alpha x + \beta y + \dots$$

для коэффиціентовъ a и β выполнялось соотношеніе $a + \beta = 0$.

Если-же обратимся къ вычисленію коэффиціентовъ a, b, α, β, то получимъ для этой цѣли систему уравненій

$$a^2 + b\alpha - 2\alpha = A, \qquad ab + b\beta - 2\beta = B,$$
$$b\alpha + \beta^2 + 2b = C, \qquad a\alpha + \alpha\beta + 2a = B,$$

которая будетъ обладать двумя рѣшеніями, удовлетворяющими условію $a + \beta = 0$. Рѣшенія эти найдемъ по формуламъ

$$a = \frac{B}{2}, \quad b = \frac{\lambda^2 + C}{2}, \quad \alpha = -\frac{\lambda^2 + A}{2}, \quad \beta = -\frac{B}{2},$$

замѣняя λ^2 послѣдовательно каждымъ изъ корней уравненія

$$z^2 - (4 - A - C)z + AC - B^2 = 0,$$

которые суть λ_1^2 и λ_2^2.

Каждому изъ этихъ рѣшеній будетъ соотвѣтствовать по одной парѣ функцій f и φ и слѣдовательно — по одному періодическому рѣшенію предложенной системы дифференціальныхъ уравненій.

Если перемѣнныя x и y будемъ разсматривать, какъ координаты точки, движущейся въ плоскости, то получимъ такимъ образомъ два періодическихъ движенія. Траекторія въ каждомъ изъ нихъ будетъ опредѣляться уравненіемъ

$$2U - f^2 - \varphi^2 = \text{Const.}\ *)$$

---

*) Вопросъ о періодическихъ рѣшеніяхъ нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій разсматривается также, хотя и съ другой точки зрѣнія, въ послѣднемъ мемуарѣ M. Poincaré *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* (Acta mathematica, t. 13).