УДК 517.54

В. К. ДУБОВОЙ, С. Н. ЗИНЕНКО

О СВЯЗИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАРНЫМ КРАТНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ НЕПОЛНОГО РАНГА И ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧЕЙ ШУРА

В работе [1] показано, что вырожденной задаче Шура соответствует семейство элементарных кратных множителей неполного ранга, при помощи каждого из которых она решается. Напомним, что каждый такой множитель строится по матрице данных задачи C_n и некоторому подпространству типа K. Рассмотрим теперь обратную задачу. А именно, пусть задан элементарный кратный множитель неполного ранга. Спрашивается, имеется ли такая вырожденная задача Шура, решение которой приводит к данному множителю. Для двучленных множителей ответ на этот вопрос дан в работе [2] и выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Для того чтобы двучленный множитель*

$$\tilde{b}(\zeta) = I + (1-\zeta)\begin{bmatrix} P \\ C^* \end{bmatrix}(P - CC^*)^{[-1]}[P,\ C]\tilde{j},\quad \tilde{j} = \begin{bmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

порождался некоторой задачей Шура, необходимо и достаточно выполнение условия $q \geqslant p - \operatorname{rang} P$.

В данной работе поставленный вопрос выясняется для случая произвольного элементарного кратного множителя.

Пусть $\tilde{B}(\zeta) = \tilde{d}_0\zeta^{n+1} + \tilde{d}_1\zeta^n + \ldots + d_{n+1}$, $\tilde{B}(1) = I$, $\tilde{j}$ — элементарный кратный множитель. Как показано в [3], $\tilde{B}(\zeta)$ допускает представление

$$\tilde{B}(\zeta) = I + (1-\zeta)\begin{bmatrix} \Lambda_{p,n}(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{q,n}(\zeta) \end{bmatrix}\tilde{H}\begin{bmatrix} \Lambda^*_{p,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{q,n}(1) \end{bmatrix}\tilde{j},$$

где

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} P \\ C^* \end{bmatrix}(P - CC^*)^{[-1]}[P,\ C];$$

$$\Lambda_{p,n}(\zeta) = [I_p,\ \zeta I_p,\ \ldots,\ \zeta^n I_p].$$

При этом выполнены соотношения

$$P^* = P,\ P^2 = P; \tag{1}$$

$$V^*_{p,n} P = PV^*_{p,n} P; \tag{2}$$

$$CV_{q,n} = PV_{p,n} C; \tag{3}$$

$$P - CC^* \geqslant 0,\ \operatorname{rang}(P - CC^*) = \operatorname{rang} P; \tag{4}$$

$$V_{p,n} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ I_p & 0 & & & \\ & I_p & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы доказать, что множитель $\tilde{B}(\zeta)$ связан с решением некоторой задачи Шура, надо установить существование матрицы C_n: $E^{(n)}_- \to E^{(n)}_+$, удовлетворяющей условиям

$$PC_n = C; \tag{5}$$

$$C_n V_{q,n} = V_{p,n} C_n; \tag{6}$$

$$I - C_n C_n^* \geqslant 0,\ \operatorname{rang}(I - C_n C_n^*) = \operatorname{rang} P. \tag{7}$$

В этом случае C_n допускает представление

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & & & \\ c_1 c_0 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ c_n & & c_1 & c_0 \end{bmatrix},$$

подпространство Δ_P является для C_n подпространством типа K и множитель $\tilde{B}(\zeta)$ порождается матрицей C_n и подпространством Δ_P.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{B}(\zeta)$ — элементарный кратный множитель. Если*

$$q \geqslant (n+1)\,p - \operatorname{rang} P, \tag{8}$$

то существует матрица C_n, удовлетворяющая условиям (5)—(7), т. е. множитель $\tilde{B}(\zeta)$ порождается некоторой задачей Шура

Доказательство. Пусть $E^{(n)}_+ = \Delta_P \oplus \Delta_P^\perp$. В силу (2) под пространства Δ_P и $\Delta_P^\perp$ инвариантны соответственно относительно $V^*_{p,n}$ и $V_{p,n}$. Введем в рассмотрение подпространства

$$\tilde{L}_k = \{f \in \Delta_P,\ V^{*k+1}_{p,n} f = 0\};$$

$$\tilde{G}_k = \{g \in \Delta_P^\perp,\ V^{k+1}_{p,n} g = 0\},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Пусть

$$L_k = \tilde{L}_k \ominus \tilde{L}_{k-1},\ L_0 = \tilde{L}_0,$$

$$G_k = \tilde{G}_k \ominus \tilde{G}_{k-1},\ G_0 = \tilde{G}_0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда $\Delta_P = L_0 \oplus L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$; $\Delta_P^\perp = G_n \oplus G_{n-1} \oplus \ldots \oplus G_0$. Отметим, что $V^*_{p,n} L_k \subset L_{k-1}$, $V_{p,n} G_k \subset G_{k-1}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

На $C_n: E_-^{(n)} \to E_+^{(n)}$ будем смотреть, как на расширение $C: E_-^{(n)} \to \Delta_P$. Расширять C до C_n будем пошагово. Сначала расширим C до оператора

$$R_0 = C \oplus Q_0,\ Q_0: E_-^{(n)} \to G_n. \tag{9}$$

При этом потребуем, чтобы R_0 удовлетворял условиям

$$R_0 V_{q,n} = P_0 V_{p,n} R_0; \tag{10}$$

$$P_0 - R_0 R_0^* \geqslant 0,\ \operatorname{rang}(P_0 - R_0 R_0^*) = \operatorname{rang} P, \tag{11}$$

где* $P_0 = P_{\Delta_P \oplus G_n}$, которые являются аналогами условий (3), (4). Отметим, что непосредственно из определения ортопроектора P_0 следуют соотношения $P_0^* = P_0$, $P_0^2 = P_0$; $V_{p,n}^* P_0 = P_0 V_{p,n}^* P_0$, являющиеся аналогами условий (1), (2).

Займемся условием (10). Перепишем его в развернутом виде: $(C + Q_0) V_{q,n} = (P + P_{G_n}) V_{p,n} (C + Q_0)$. Так как $\Delta_{Q_0} \subset G_n$ и $V_{p,n} G_n \subset G_{n-1}$, то $(P + P_{G_n}) V_{p,n} Q_0 = 0$. Учитывая (3), получаем, что (10) можно переписать следующим образом:

$$Q_0 V_{q,n} = P_{G_n} V_{p,n} C. \tag{10}$$

Перейдем к условию (11). При разложении $E_+^{(n)} = (\Delta_P^\perp \ominus G_n) \oplus G_n \oplus \Delta_P$ имеем

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix},\quad R_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_0 \\ c \end{bmatrix},\quad P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$P_0 - R_0 R_0^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & x \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & x^* & I \end{bmatrix},$$

где $x = -Q_0 c^* (I - cc^*)^{-1}$; $r_1 = I - Q_0 Q_0^* + x c^* Q_0^*$; $r_2 = I - cc^* > 0$. Поэтому (11) равносильно условию $r_1 = 0$. После простых преобразований перепишем его в виде $Q_0 (I - c^* c)^{-1} Q_0^* = I$, а это эквивалентно тому, что $Q_0 = V_0 (I - C^* C)^{\frac{1}{2}}$ (12), где V_0 — некоторое отображение из $E_-^{(n)}$ в G_n, удовлетворяющее условию $V_0 V_0^* = I_{G_n}$ (13).

Согласование (10) и (12) приводит к дополнительному условию на V_0:

$$V_0 (I - C^* C)^{\frac{1}{2}} V \quad = P_{G_n} V_{p,n} C. \tag{14}$$

---

* P_L обозначает ортопроектор на подпространство L.

Покажем, что оператор V_0 определяется уравнением (14) на подпространстве $H_0 = \Delta_{(I-C^*C)^{\frac{1}{2}}V_{q,n}}$ как некоторое сжатие T_0. Для этого докажем, что для любого $f \in E_-^{(n)}$ выполняется

$$\|(I - C^*C)^{\frac{1}{2}} V_{q,n} f\| \geqslant \| P_{G_n} V_{p,n} Cf \|. \tag{15}$$

Это условие равносильно неравенству

$$V_{q,n}^* V_{q,n} - V_{q,n}^* C^*CV_{q,n} \geqslant C^*V_{p,n}^* P_{G_n} V_{p,n} C. \tag{16}$$

Из (3) следует $V_{q,n}^* C^*C V_{q,n} = C^* V_{p,n}^* P V_{p,n} C$. Далее, $V_{q,n}^* V_{q,n} = P_{E_-^{(n-1)}}$. Поэтому (16) можно переписать в виде

$$P_{E_-^{(n-1)}} \geqslant C^* V_{p,n}^* (P + P_{G_n}) V_{p,n} C. \tag{17}$$

Справа в этом неравенстве стоит сжатие. Поэтому достаточно доказать, что его образ лежит в $E_-^{(n-1)}$, т. е. в $\operatorname{Ker} V_{q,n}^{*n}$. Но для оператора $C^* V_{p,n}^* P V_{p,n} C$ это очевидно. Поэтому остается проверить, что $V_{q,n}^{*n} C^* V_{p,n}^* P_{G_n} V_{p,n} C = 0$. Для этого достаточно убедиться в том, что $P_{G_n} V_{p,n} C V_{q,n}^n = 0$. Из (2) и (3) следует $CV_{n,qn}^n = PV_{p,n}^n C$. Значит,

$$P_{G_n} V_{p,n} CV_{q,n}^n = P_{G_n} V_{p,n} PV_{p,n}^n C =$$
$$= P_{G_n} V_{p,n} (P + P_{\Delta_P^\perp}) V_{p,n} C = P_{G_n} V_{p,n}^{n+1} C = 0.$$

Здесь воспользовались тем, что $P_{G_n} V_{p,n} P_{\Delta_P^\perp} = 0$ и $P + P_{\Delta_P^\perp} = I$.

Итак, неравенство (15) доказано. Из этого неравенства следует, что соотношение

$$T_0 (I - C^*C)^{\frac{1}{2}} V_{q,n} = P_{G_n} V_{p,n} C \tag{18}$$

определяет на подпространстве H_0 сжатие T_0. Сравнивая (14) и (18), получаем $V_0|_{H_0} = T_0$ (19). Теперь необходимо показать, что сжатие T_0 можно продолжить до оператора V_0, удовлетворяющего условиям (13) и (19).

Пусть $E_-^{(n)} = H_0 \oplus H_0^\perp$ (20) и в соответствии с этим разложением $V_0 = [T_0, D_0]$ (21), т. е. $D_0 : H_0^\perp \to G_n$. Тогда условие (19) следует из (21), а условие (13) приобретает вид $T_0T_0^* + D_0D_0^* = I_{G_n}$, откуда находим $D_0 = (I_{G_n} - T_0T_0^*)^{\frac{1}{2}} U_0$, где U_0 отображает $H_0^\perp$ в G_n, при этом $U_0U_0^*$ является ортопроектором в G_n на $\Delta_{I-T_0T_0^*}$.

Итак, расширение $R_0 = C \oplus Q_0$ определяется оператором $Q_0 = V_0(I_{E_-^{(n)}} - C^*C)^{\frac{1}{2}}$, при этом V_0 имеет вид $V_0 = [T_0, (I_{G_n} -$

$-T_0T_0^*)^{\frac{1}{2}}U_0]$, где T_0 — сжатие, определяемое равенством (18), а $U_0: H_0^{\perp} \to G_n$ обладает тем свойством, что $U_0U_0^*$ является ортопроектором на $\Delta_{I-T_0T_0^*}$.

Очевидно, указанное расширение существует, если $\dim H_0^{\perp} \geqslant \dim G_n$ (22). Из вида H_0 следует, что $\dim H_0^{\perp} = \dim E_- = q$. Согласно условию теоремы $q \geqslant (n+1)p - \operatorname{rang} P = \dim E_+^{(n)} - \dim \Delta_P = \dim \Delta_P^{\perp} \geqslant \dim G_n$. Таким образом, условие (22) заведомо выполнено и соответствующее расширение R_0 построено.

Следующий шаг состоит в построении расширения $R_1 = R_0 \oplus Q_1$, $Q_1: E_-^{(n)} \to G_{n-1}$, удовлетворяющего условиям $R_1 V_{q,n} = P_1 V_{p,n} R_1$, $P_1 = P_0 \oplus P_{G_{n-1}}$, $P_1 - R_1R_1^* \geqslant 0$, $\operatorname{rang}(P_1 - R_1R_1^*) = \operatorname{rang} P$. Это расширение описывается аналогично, а из условия (8) следует возможность подобного расширения.

Повторяя этот процесс на $(n+1)$ шаге, получим оператор $R_n = R_{n-1} \oplus Q_n$, $Q_n: E_-^{(n)} \to G_0$, удовлетворяющий условиям $R_nV_{q,n} = V_{p,n}R_n$, $P_n = I_{E_+^{(n)}}$, $I_{E_+^{(n)}} - R_n R_n^* \geqslant 0$, $\operatorname{rang}(I_{E_+^{(n)}} - R_n R_n^*) = \operatorname{rang} P$, и для завершения доказательства теоремы остается положить $C_n = R_n$.

Следствие. *Если операторы P и C удовлетворяют условиям (1) — (3), при этом $P - CC \geqslant 0$, то существует оператор C_n, удовлетворяющий условиям (5), (6) и являющийся сжатием $I - CC^* \geqslant 0$.*

Доказательство. Положим на первом шаге произведенных выше рассуждений $D_0 = 0$, т. е. $V_0 = [T_0, 0]$. Поступая аналогичным образом на каждом из последующих шагов, получим необходимый результат.

Замечание 1. Доказанная теорема является точной, а именно, приведем пример, когда $q = (n+1)p - \operatorname{rang} P - 1$ (23) и указанного расширения матрицы C до соответствующей матрицы C_n не существует.

Пусть $q = \dim E_- = 1$, $p = \dim E_+ = 2$, $n = 1$, т. е. в данном случае $E_+^{(n)} = E_+^{(1)} = E_+ \oplus E_+$. Подпространство Δ_P зададим соответствующим ортопроектором

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right].$$

Таким образом, условие (23) выполняется. Матрица C в силу условий (1) — (4) имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

где числа α и β выберем настолько малыми по абсолютной величине, чтобы C было строгим сжатием.

Предположим теперь, что существует матрица C_1 (сейчас $n=1$), удовлетворяющая условиям (5)—(7). Условие (6) означает, что C_1 имеет вид

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{00} & 0 \\ c_{10} & 0 \\ c_{20} & c_{00} \\ c_{30} & c_{10} \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что $q=1$, $p=2$, находим, что условие (7) выполняется в том и только в том случае, если $C_1^* C_1 = I$. Отсюда следует $c_{20} = c_{30} = 0$, $|c_{00}|^2 + |c_{10}|^2 = 1$. Условие (5) означает, что $\alpha = c_{10}$, $\beta = c_{30}$. В случае, если $\beta \neq 0$, это приводит к противоречию, так как $c_{30} = 0$.

Замечание 2. Можно показать, что ранг r элементарного кратного множителя, порождаемого некоторой задачей Шура, удовлетворяет условию $q \geqslant p - r$ (24). Построенный в рассмотренном выше примере по матрицам P и C элементарный кратный множитель условию (24) удовлетворяет, однако не может порождаться ни одной из задач Шура. Таким образом, условие (24), будучи необходимым, достаточным не является.

Следует отметить, что при $n=0$ условие (8) переходит в условие (24) и в этом случае условие (24) является и достаточным. Достаточность этого условия при $n=0$ следует и из теоремы 1.

При $n \geqslant 1$ условие (24) является достаточным для элементарных кратных множителей специального вида, играющих важную роль при изучении задачи Шура.

Замечание 3. Аналогичные результаты можно получить и для j-элементарных кратных множителей с полюсом в точке 0.

Наконец, отметим, что рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2, навеяны связью с теоремой о дилатации коммутантов ([4], с. 79—81).

Список литературы: 1. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. IV // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1984. Вып. 42. С. 46—57. 2. *Галстян Л. А., Дубовой В. К.* О пошаговом процессе в вырожденной проблеме Шура. Ереван, 1985. 42 с. Деп. в АрмНИИНТИ 22.03.85, № 27Ар—85. 3. *Дубовой В. К.* Параметризация элементарного кратного множителя неполного ранга. Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. К., 1983. С. 54—68. 4. *Секельфальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., 1970. 325 с.

Поступила в редколлегию 14.04.86