УДК 513.88

В. П. ОДИНЕЦ

МИНИМАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D — дополняемое подпространство* банахова пространства B над полем R вещественных чисел; P — проекция (т. е. идемпотентный линейный ограниченный оператор) из B на D. Говорят, что проекция P — минимальная, если для любой другой проекции $P_1 : B \to D$ справедливо $\| P_1 \| \geqslant \| P \|$.

Наиболее полно среди минимальных проекций к настоящему времени изучены проекции с единичной нормой. У минимальных проекций с произвольной нормой подробнее изучены лишь вопросы существования. Укажем, например, на работы [2—6]. В последней работе отметим следующий результат: если дополняемое подпространство D изометрически изоморфно сопряженному пространству Z^* некоторого линейного нормированного пространства Z (в частности, [5], если D — рефлексивное), например, равномерно выпуклое (дополняемое подпространство в B), то существует минимальная проекция из B на D.

Что касается вопроса единственности минимальных проекций с неединичной нормой (без каких-либо дополнительных ограничений на проекцию), то единственность была установлена лишь для проекции Фурье и ее аналогов (см. [7, 8], а также [9])**.

§ 1. Терминология и обозначения

Пусть D — подпространство в B. Если существует минимальная проекция P из B на D, и $\|P\| = p > 1$, то подпространство D будем называть p-правильным (если $p = 1$, то — просто правильным). Обозначим через $\Delta^{p(B,\,D)}(B,\ D)$ — или, кратко, $\Delta^p(B,\ D)$ — множество всех минимальных проекций из B на D. Если при этом множество $\Delta^p(B,\ D)$ состоит лишь из одного элемента, то будем говорить, что пара $(B,\ D)$ обладает свойством (γ_p), или единственности. Пусть $S = \{x \in B : \|x\| = 1\}$, θ — нулевой элемент в B, $U(\theta,\ p) = \{x \in B : \|x\| \leqslant p\}$, $\operatorname{ext} U(\theta,\ p)$ — множество экстремальных точек шара $U(\theta,\ p)$. Для произвольной проекции $P \in \Delta^p(B,\ D)$ обозначим через $\operatorname{crit} P = \{z \in S : \|P(z)\| = \|P\|\}$.

Для произвольных подпространств X и Y из B будем обозначать через $(\widehat{X,\ Y}) = \inf\limits_{x \in X \setminus [\theta],\ y \in Y} \|x + y\| / \|x\|$ наклон [10] подпространства X к Y. Если $B = X + Y$, $X \cap Y = [\theta]$, то будем писать $B = X \bigoplus Y$. При этом, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ справедливо $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, то будем писать $B = X \overset{1}{\bigoplus} Y$.

Через B^* — обозначим пространство всех линейных непрерывных функционалов на B. Пусть $S_{B^*} = \{y \in B^* : \|y\| = 1\}$. Если элемент $x \in B \setminus [\theta]$, то пусть $A(x) = \{f \in S_{B^*} : f(x) = \|x\|\}$. Через G_x будем обозначать подпространство гладкости в точке x, т. е. $G_x = \{y \in B$: существует $g(x,\ y) = \operatorname{Lim}\limits_{t \to 0} t^{-1}(\|x + ty\| - \|x\|)\}$.

Пусть N — множество натуральных чисел. Множества вида $\{1,\ 2,\ \ldots,\ r\}$, где $r \in N$, а также само множество N (в этом случае полагаем $r = \infty$) будем обозначать через $\Gamma(r)$. Для произвольной последовательности элементов $\{x_i\}_{i \in \Gamma(r)}$ из B будем обозначать через $[x_1, x_2, \ldots]$ наименьшее подпространство, содержащее $\{x_i\}_{i \in \Gamma(r)}$.

---

* Подпространства везде предполагаются замкнутыми. Термины, встречающиеся в работе, следуют [1].

** Часть результатов настоящей работы анонсирована автором в [15].

§ 2. О некоторых свойствах минимальных проекций

Теорема 2.1. *Пусть D — p-правильное ($p > 1$) равномерно выпуклое*) подпространство банахова пространства B ($\dim B = \infty$). Тогда для любых двух проекций P_1, $P_2 \in \Delta^p(B, D)$ справедливо*

$$(P_1^{-1}(\theta)^\wedge,\ P_2^{-1}(\theta)) = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существуют $P_1, P_2 \in \Delta^p(B, D)$, $(P_1^{-1}(\theta)^\wedge, P_2^{-1}(\theta)) = \beta \neq 0$. Рассмотрим проекцию $P_3 = (1/2)(P_1 + P_2)$. В силу p-правильности D, очевидно, $\| P_3 \| = p$.

Но тогда существует последовательность $\{z_n\}_{n \in \Gamma(\infty)} \subset S : \operatorname{Lim} \| P_3(z_n) \| = p$. Так как $0 \leqslant p - \| P_1(z_n) \| + p - \| P_2(z_n) \leqslant | 2p - \| P_1(z_n) + P_2(z_n) \| | = 2p - \| 2P_3(z_n) \|$, то

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \| P_i(z_n) \| = p,\ (i = 1,\ 2). \tag{2}$$

Пусть

$$\| P_i(z_n) \| = p - \varepsilon_n^{(i)},\ \text{где } \varepsilon_n^{(i)} \geqslant 0,\ (i = 1,\ 2;\ n \in \Gamma(\infty)). \tag{3}$$

Положим $z_n^{(i)} = P_i(z_n) / \| P_i(z_n) \|$, $(i = 1, 2)$. Тогда $P_i(z_n) = z_n^{(i)} p - \varepsilon_n^{(i)} z_n^{(i)}$, $(i = 1, 2)$. Так как $\| z_n^{(i)} \| = 1$, $(i = 1, 2)$ и значит, $2 \geqslant \| z_n^{(1)} + z_n^{(2)} \| = \| (1/p)(P_1(z_n) + P_2(z_n) + \varepsilon_n^{(1)} z_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)} z_n^{(2)}) \| \geqslant | \| (2/p) P_3(z_n) \| - (1/p) \| \varepsilon_n^{(1)} z_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)} z_n^{(2)} \| |$, и $\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} 2P_3(z_n) = 2p$, $\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \| \varepsilon_n^{(1)} z_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)} z_n^{(2)} \| \leqslant \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} (\varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)}) = 0$, то $\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \| z_n^{(1)} + z_n^{(2)} \| = 2$. В силу равномерной выпуклости подпространства D мы получим, что $\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \| z_n^{(1)} - z_n^{(2)} \| = 2$. Ввиду того, что $\| P_1(z_n) - P_2(z_n) \| = \| pz_n^{(1)} - \varepsilon_n^{(1)} z_n^{(1)} - pz_n^{(2)} + \varepsilon_n^{(2)} z_n^{(2)} \| \leqslant p \| z_n^{(1)} - z_n^{(2)} \| + \varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)}$, то, очевидно,

$$\| P_1(z_n) - P_2(z_n) \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{4}$$

С другой стороны, для любого элемента $z \in S$ справедливо: $P_i(z) = z + t_z^{(i)} y_z^{(i)}$, где

$$y_z^{(i)} \in P_i^{-1}(\theta),\ \| y_z^{(i)} \| = 1,\ (t_z^{(i)} \in P;\ i = 1,\ 2) \tag{5}$$

---

*) Подпространство D называется равномерно выпуклым, если из условия $\| x_n \| = \| y_n \| = 1$ и $\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \| x_n + y_n \| = 2$ следует, что $\| x_n - y_n \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

и, значит, при $t_z^{(1)} \neq 0 \; \| P_1(z) - P_2(z) \| = \| t_z^{(1)} y_z^{(1)} - t_z^{(2)} y_z^{(2)} \| =$ $| t_z^{(1)} | \times \left\| \frac{t_z^{(2)} y_z^{(1)}}{(t_z^{(1)}} + \frac{(-t_z^{(2)}) \, y_z^{(2)}}{|t_z^{(1)}} \right\| \geqslant | t_z^{(1)} | \cdot (P_1^{-1}(\theta)^\wedge, \; P_2^{-1}(\theta)).$

Пусть $p = 1 + t_0$, где $t_0 > 0$. Возьмем $\varepsilon = t_0/2$. В силу (2) и (3) существует номер n_0: при всех $n > n_0$ $\varepsilon_n^{(i)} < \varepsilon \, (i = 1, 2)$. Следовательно, при $n > n_0$, $\| P_i(z_n) \| = 1 + t_0 - \varepsilon_n^{(i)} > 1 + (t_0/2)$, и потому из (5) получаем: $| t_{zn}^{(i)} | > (1/2) \, t_0$, $(i = 1, 2)$. В итоге, при всех $n > n_0$ $\| P_1(z_n) - P_2(z_n) \| > (1/2) \, t_0 \beta > 0$, что противоречит (4).

Замечание 2.1. Условие (1) еще не означает, что существует элемент $x \neq \theta$, $x \in P_1^{-1}(\theta) \cap P_2^{-1}(\theta)$. Однако при некоторых условиях это так. Точнее справедливо.

Предложение 2.1. *Пусть D — p-правильное $(p \geqslant 1)$ подпространство банахова пространства B. Пусть (i): $\mathrm{crit}\, P \neq \varnothing$ для любой проекции $P \in \Delta^p(B, D)$. Тогда для любых двух проекций из $\Delta^p(B, D)$ существует точка из S, на которой обе проекции*

1) *достигают нормы;*

2) *совпадают, если (ii): $P(z) \in \mathrm{ext}\,(D \cap U(\theta, \; p))$ для любого $z \in \mathrm{crit}\, P$ и любой проекции $P \in \Delta^p(B, D)$.*

Отметим, что для выполнения условия (i) достаточно, например, чтобы $\dim B < \infty$, а для (ii) — чтобы D было строго нормировано (в частности, равномерно выпукло).

Доказательство. Для $p = 1$ утверждение очевидно. Пусть $p > 1$. Если бы теорема была неверна, то существовали бы P_1, $P_2 \in \Delta^p(B, \; D)$ такие, что $\mathrm{crit}\, P_1 \cap \mathrm{crit}\, P_2 = \varnothing$. Положим $P_3 = (1/2)(P_1 + P_2)$. В силу p-правильности ясно, что $\| P_3 \| = p$. По условию теоремы существует точка $z_0 \in S$: $\| P_3(z_0) \| = p$, а, значит, $\| P_i(z_0) \| = p$ $(i = 1, \; 2)$. Если $P_1(z_0) \neq P_2(z_0)$, то точка $P_3(z_0)$ не есть экстремальная точка шара $D \cap U(\theta, \; p)$, вопреки условию предложения.

Замечание 2.2. Если P — минимальная проекция банахова пространства B на подпространство D, то далеко не обязательно, чтобы $\mathrm{crit}\, P \neq \varnothing$, даже если известно, что пара (B, D) обладает свойством (γp), $p > 1$, и D конечномерно. Действительно, пусть $\tilde{\mathbf{C}}([0, \; 2\pi])$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций; Π_n — подпространство в $\tilde{\mathbf{C}}([0, \; 2\pi])$, состоящее из тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n$, $(n \geqslant 1)$; F_n — проекция Фурье из $\tilde{\mathbf{C}}([0, \; 2\pi]) \to \Pi_n$, (т. е. $F_n(f(t)) = \sum\limits_{k=0}^{2n} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \, g_k(t) \, dt$, где $\{g_k\}_{k=0}^{2n}$ — произвольный ортонормированный базис в Π_n, $\left(\int\limits_0^{2\pi} g_i(t) \, g_j(t) \, dt = \delta_{ij} \right) \Big)$. Тогда, как легко проверяется, проекция $F_n (n \geqslant 1)$ не достигает своей нормы на единичной сфере в $\tilde{\mathbf{C}}([0, \; 2\pi])$. При этом проекция F_n минимальная и при том единственная [7, 8].

Следствие 2.1. *Пусть D — p- правильное ($p > 1$) равномерно выпуклое подпространство банахова пространства B ($\dim B \leqslant \infty$), такое что $\operatorname{codim} D = 1$. Тогда пара (B, D) обладает свойством (γ_p).*

Доказательство. Так как $\operatorname{codim} D = 1$, то для любой проекции P: $B \to D$, $\dim(P^{-1}(\theta)) = 1$. Поэтому условие (1) означает, в силу теоремы 12 из [10], что $\overset{-1}{P_1}(\theta) = \overset{-1}{P_2}(\theta)$, т. е. что $P_1 = P_2$ для любых $P_1, P_2 \in \Delta^p(B, D)$.

Замечание 2.3. При $p = 1$ утверждение следствия 2.1 (как, впрочем, и формула (1)) не выполняется. Действительно, рассмотрим пространство, получающееся из евклидова пространства E^3 с координатами (ξ_1; ξ_2; ξ_3) перенормировкой с помощью метрики Минковского относительно поверхности вращения равнобедренного треугольника с вершинами (0; 0; 1), (0; 0; —1), (1; 0; 0) вокруг оси $[\xi_3]$. Если в этом пространстве (назовем его B) взять в качестве D подпространство, соответствующее плоскости $\xi_3 = 0$, то очевидно, что D будет строго нормированным (что в конечномерном случае эквивалентно равномерной выпуклости) правильным подпространством. Очевидно также, что пара (B, D) не обладает свойством (γ_1). Отметим, что так как две различные проекции из B на D с единичной нормой аннулируются на разных одномерных подпространствах, то для этих подпространств не выполняется формула (1).

§ 3. О единственности и неединственности минимальных проекций

Основной конструкцией, применяемой в этом параграфе для изучения свойства единственности пары (B, D), будет следующая. Предположим, что $(\operatorname{codim} D \mid B) \geqslant 2$ и существует правильное подпространство K: $D \subset K \subset B$. Тогда, зная свойства пар (K, D) и (B, K), сделаем заключение о свойстве пары (B, D). Непосредственно проверяется следующее

Предложение 3.1. *Пусть D и K — подпространства банахова пространства B, $D \subset K \subset B$. Пусть K — правильное подпространство в B. Тогда*

1°) *если D — p-правильное ($p \geqslant 1$) в B, то D — p-правильное и в K. При этом, если $P \in \Delta^p(B, D)$, то $P \mid K \in \Delta^p(B, D)$;*

2°) *если D — p-правильное ($p \geqslant 1$) в K, то D — p-правильное и в B. При этом, если $P \in \Delta^p(K, D)$, $P_1 \in \Delta^1(B, K)$, то $P_2 = PP_1 \in \Delta^p(B, D)$;*

3°) *если пара (B, D) обладает свойством (γ_p), $p \geqslant 1$, то и пара (K, D) обладает свойством (γ_p);*

4°) *если пара (K, D) обладает свойством (γ_p), $p \geqslant 1$, а пара (B, K) не обладает свойством (γ_1) и при этом хотя бы две проекции $P_1, P_2 \in \Delta^1(B, K)$, $P_1 \neq P_2$ таковы, что $\overset{-1}{P_2}(\theta) \not\subset$*

$\not\subset P^{-1}(\theta) \bigoplus P_1^{-1}(\theta)$, *где* $P \in \Delta^p(K, D)$, *то пара* (B, D) *не обладает свойством* (γ_p).

Замечание 3.1. Конструкцию, данную в начале § 3, можно использовать не только для изучения свойства единственности, но и для доказательства отсутствия правильных подпространств, содержащих данное. Рассмотрим следующий

Пример 3.1. Для любого $n \geqslant 1$ в $\tilde{C}([0, 2\pi])$ не существует конечномерного правильного подпространства, содержащего Π_n.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существует правильное подпространство $K \supset \Pi_n$ и $\dim K < \infty$. В силу предложения 3.1., учитывая минимальность проекции Фурье F_n, ее сужение $\tilde{F}_n = F_n | K$ будет иметь ту же норму, что и F_n. В силу компактности сферы $S \cap K$ проекция $\tilde{F}_n$ достигает своей нормы на $S \cap K$. Значит, и проекция F_n будет достигать своей нормы на $S \cap K$, что противоречит утверждению замечания 2.2.

Предложение 3.2. *Пусть* D — *p-правильное* $(p > 1)$ *сепарабельное* $(\dim D = \infty)$ *подпространство рефлексивного банахова пространства* B, *такое что* $(\operatorname{codim} D | B) = n$, $(n \geqslant 2)$. *Тогда:* (i^0) — *существует подпространство* K, $D \subset K \subset B$, $(\operatorname{codim} D | K) = 1$ *и* D — *p-правильное в* K; (i^{00}) — *если* D *равномерно выпуклое, то пара* (K, D) *обладает свойством* (γ_p).

Доказательство. При наших предположениях в силу предложения Линденштраусса из [11] следует, что существует правильное подпространство $Y \subset B : D \subset Y$. Если $(\operatorname{codim} D | Y) > 1$, то предположение Линденштраусса применимо к паре (Y, D) и т. д. Так как $(\operatorname{codim} D | B) < \infty$, то в итоге получим правильное подпространство $K \supset D$, $(\operatorname{codim} D | K) = 1$. В силу предложения 3.1 (п. 1^0) подпространство D будет p-правильным в K. Справедливость п. (i^{00}) вытекает из следствия 2.1.

Замечание 3.2. Для условий неединственности минимальных проекций нам понадобятся следующие два предложения (3.3 и 3.4), фактически доказанные соответственно в теореме 3.4 и следствии 3.1 в [12].

Предложение 3.3. *Пусть банахово пространство* $B = D \overset{1}{\bigoplus} [y]$, $y \notin D$. *Тогда для любого* $x_0 \in D$, $0 \leqslant \| x_0 \| \leqslant 1$ *оператор* $W_{x_0} : B \to$ $\to D$ *такой, что*

$$W_{x_0}(x + cy) = x + c \| y \| x_0, \ (x \in D, \ c \in R) \tag{6}$$

есть проекция на D *с нормой, равной 1.*

Предложение 3.4. *Пусть банахово пространство* $B = D \overset{1}{\bigoplus} K$, $(D \neq [\theta], \ K \neq [\theta])$. *Тогда для любого* $y \in K$ *(в том числе и для* $y = \theta$) *подпространство* $D \overset{1}{\bigoplus} [y]$ *будет правильным в* B, *но пара* (B, D) *не будет обладать свойством* (γ_1).

Следствие 3.2. *Пусть банахово пространство* $B = K \overset{1}{\bigoplus} M$ $(M \neq [\theta])$. *Пусть* D — *подпространство в* B, $D \subset K$ *такое, что* *пара (K, D) обладает свойством (γ_p), где $p \geqslant 1$. Тогда подпространство D будет p-правильным в B, но пара (B, D) не будет обладать свойством (γ_p).*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $y \in M$, $y \neq \theta$. В силу предложения 3.4, подпространства K и $M_1 = K \overset{1}{\bigoplus} [y]$ будут правильными в B. Пусть P_1 — проекция из B на $M_1 : \| P_1 \| = 1$, а P — проекция из K на $D : \| P \| = p$. Возьмем $x_0 \in D \subset K$, $x_0 \neq \theta$. Рассмотрим проекции $P_2 = W_{x_0}$ и $P_3 = W_\theta$ из M_1 на K, определяемые формулой (6). Очевидно, $P_2 \neq P_3$. Так как $P_2(-\| y \| x_0 + y) = \theta$, а $PP_3(-\| y \| x_0 + y) = -\| y \| x_0$, т. е. $P_2^{-1}(\theta) \ni (-\| y \| x_0 + y) \notin P^{-1}(\theta) \bigoplus P_3^{-1}(\theta)$, то $P_2^{-1}(\theta) \not\subset P^{-1}(\theta) \bigoplus \bigoplus P_3^{-1}(\theta)$. В силу предложения 3.1 пара (M_1, D) не обладает тогда свойством (γ_p), а значит, и пара (B, D) не обладает свойством (γ_p), хотя подпространство D и будет p-правильным в B (п. 2^0).

Теорема 3.1. *Пусть D и K — соответственно p-правильное $(p \geqslant 1)$ и правильное подпространство банахова пространства B, $D \subset K \subset B$. Пусть пара (K, D) обладает свойством (γ_p). Если проекция $P \in \Delta^p(K, D)$ такова, что существуют $T \subseteq \operatorname{crit} P$, $(T \neq \varnothing)$ и $M \subseteq \bigcup_{y \in P(T)} (A(y) \mid D)$: 1^{00}) M тотально на D;*

2^{00}) *для любого $f \in M$ функционал вида fP имеет единственное расширение на B, сохраняющее норму, то пара (B, D) обладает свойством (γ_p). Отметим, что для выполнения условия 2^{00} достаточно* [13, 14], *чтобы для каждого $z \in T$ выполнялось*

$$K + G_z = B. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $P \in \Delta^p(K, D)$, $P_1 \in \Delta^1(B, K)$. В силу предложения 3.1 (п. 2^0) подпространство D — p-правильное в B и $P_2 = PP_1 \in \Delta^p(B, D)$. Предположим, что существует $P_3 \neq P_2$, $P_3 \in \Delta^p(B, D)$. Положим $P_3^0 = P_3 \mid K$. В силу предложения 3.1 (п. 1^{00}) $P_3^0 \in \Delta^p(K, D)$. Но тогда по условию теоремы $P_3^0 = P$. Пусть $f \in M$. Тогда существуют $y_0 \in P(T)$ и $z_0 \in T : y_0 = P(z_0)$ и $f \in A(y_0) \mid D$.

Рассмотрим функционалы $fP \in K^*$, $fP_i \in B^*$ $(i = 2, 3)$. Очевидно, $\| fP \| = \| fP_i \| = p$, $(i = 2, 3)$. Значит, функционалы fP_i $(i = 2, 3)$ являются расширениями функционала fP с сохранением нормы с подпространства K на все B. В силу условия теоремы $fP_2 = fP_3$. Положим $f_1 = fP_3$. Так как $f_1^{-1}(0) = f^{-1}(0) \bigoplus P_3^{-1}(\theta) = f^{-1}(0) \bigoplus P_2^{-1}(\theta)$, то $P_2^{-1}(\theta) \subseteq f^{-1}(0) \bigoplus P_3^{-1}(\theta)$ и $P_3^{-1}(\theta) \subseteq f^{-1}(0) \bigoplus \bigoplus P_2^{-1}(\theta)$. Учитывая, что функционал f выбирался в M произвольно, получаем, что

$$P_i^{-1}(\theta) \subseteq [\bigcap_{f \in M} f^{-1}(0)] \bigoplus P_j^{-1}(\theta), \ (i, j \in \{2, 3\}, \ i \neq j). \tag{8}$$

В силу тотальности M из (8) заключаем, что $P_3^{-1}(\theta) = P_2^{-1}(\theta)$, т. е. $P_3 = P_2$ вопреки предположению.

Пример 3.2. Пусть D — двумерное строго нормированное подпространство гладкого банахова пространства B, и пусть существует трехмерное правильное подпространство $K \supset D$. Тогда в силу следствия 2.1 и теоремы 3.1 пара (B, D) обладает свойством (γ_p) $(p \geqslant 1$; при $p = 1$ см. [13]).

В заключение автор благодарит проф. М. И. Кадеца за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., ИЛ, 1961. 232 с.
2. Morris P. D. and Cheney E. W. On the existence and characterization of minimal projections. — „J. für die reine und angewandte Mathematik", 1974, Bd. 270, S. 61—76.
3. Кадец М. И., Митягин Б. С. Дополняемые подпространства в банаховых пространствах.— УМН, 1973, т. 28, № 6, с. 77—94.
4. Лозинский С. М. Об одном классе линейных операций. — ДАН СССР, 1948, т. 61, № 2, с. 193—196.
5. Isbell J. R. and Semadeni Z. Projection constants and spaces of continuous functions. — „Trans. Amer. Math. Soc"., 1963, vol, 107, № 1, p. 38—48.
6. Blatter J. and Cheney E. W. On the Existence of Extremal Projections. — „J. of Appr. Theory", 1972, vol. 6, № 1, p. 72—79.
7. Cheney E. W., Hobbi C. R., Moris P. D., Schurer F. and Wulbert D. E. On the minimal property of the Fourier projections. — „Bull. Amer. Math. Soc.", 1969, vol. 75, № 1, p. 51—52.
8. Lambert P. V. Minimum norm property of the Fourier projection in spaces of continuous function. — „Bull. Soc. Math. Belg.", 1969, vol. 21, № 4, p. 359—369.
9. Cheney E. W. and Price K. H. „Minimal projections" in Approximation Theory (A. Talbot Ed.). — „Academic Press", New-York, 1970, p. 261—289.
10. Гурарий В. И. О растворах и наклонах подпространств банахова пространства. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 1, Харьков, 1965, с. 194—204.
11. Lindenstrauss J. On nonseparable reflexive Banach spaces. — „Bull. Amer. Math. Soc.", 1966, vol. 72, p. 967—970.
12. Одинец В. П. Дифференциал Гато и единственность расширения линейных операторов с сохранением нормы. — «Изв. вузов. Математика», 1973, № 4, с. 77—86.
13. Одинец В. П. О единственности проекций с нормой, равной 1, в банаховом пространстве. — «Изв. вузов. Математика», 1974, № 1, с. 82—89.
14. Poulsen E. T. Eindeutige Hahn-Banach-Erweiterungen. — „Math. Annalen.", 1966, Bd. 162, S. 225—227.
15. Одинец В. П. О единственности минимальных проекций в банаховых пространствах. — ДАН СССР, 1975, т. 220, № 4, с. 779—781.

Поступила 20 января 1975 г.