ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

Н. И. Ахиезер и Б. Я. Левин

(Харьков)

1. Введение. Настоящая статья посвящена некоторому обобщению результатов двух наших заметок*, относящихся к интерполированию целых трансцендентных функций конечной степени и его применению к изучению вопроса о том, как поведение целой функции конечной степени на вещественной оси зависит от роста функции вдоль некоторой бесконечной последовательности точек (узлов).

Можно назвать классическим тот случай, когда последовательностью узлов является последовательность всех целочисленных точек вещественной оси.

Для этого случая хорошо известна следующая интерполяционная формула (аналог формулы Лагранжа):

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{\pi}\left\{\frac{P_q(z)}{z}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k f(k)}{z-k}\left(\frac{z}{k}\right)^q\right\},$$

где q — целое неотрицательное число, а $P_q(z)$ — сумма первых $q+1$ членов ряда Маклорена

$$f(z)\frac{\pi z}{\sin \pi z}=f(0)+f'(0)z+\left\{\frac{f''(0)}{2!}+\frac{\pi^2 f(0)}{3!}\right\}z^2+\dots,$$

причем штрих означает пропуск члена, отвечающего значению $k=0$.

Написанная формула справедлива для всякой целой функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям:

$$\frac{f(z)\,e^{-\pi|z|}}{z^q}=O(1) \qquad (z\to\infty),$$

$$\lim_{\pm y\to\infty}\frac{f(iy)\,e^{-\pi|y|}}{y^q}=0,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left|\frac{f(k)}{k^{q+1}}\right|<\infty.$$

* Б. Я. Левин. ДАН СССР, 1949, том LXV, № 3.
Н. И. Ахиезер. ДАН СССР, 1949, Том LXV, № 5.
В дальнейшем, цитируя эти статьи, мы будем называть их соответственно I, II.

Равным образом хорошо известна следующая теорема М. Картрайт*: *если* $f(z)$ *есть целая функция степени* $\sigma < \pi$, *то есть*

$$\sigma = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln |f(z)|}{|z|} < \pi,$$

то из неравенств

$$|f(k)| \leqslant M \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

следует, что

$$|f(x)| \leqslant CM \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где C зависит** лишь от σ.

Ряд исследований, появившихся после работы М. Картрайт, посвящен обобщению приведенных результатов на некоторые случаи „неправильного" расположения узлов. Так, например, в работах Левинсона и Боаса фигурирует последовательность вещественных нецелочисленных узлов, достаточно близких к целочисленным, а в статье I впервые отброшено также и требование вещественности узлов, а именно узлы $\lambda_k (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$, рассматриваемые в этой статье, должны удовлетворять лишь двум неравенствам

$$|k - \lambda_k| \leqslant L \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

$$|\lambda_n - \lambda_m| > 2\delta \qquad (\text{при } m \neq n), \tag{2}$$

где L и δ какие-нибудь положительные числа***. Кроме того, в статьях I и II условие М. Картрайт

$$\sigma < \pi$$

заменено некоторыми менее ограничительными условиями. В настоящей статье мы обобщим наши результаты и на тот случай когда величина δ в неравенстве (2) равна нулю.

Условимся во всем дальнейшем говорить, что числовая (вообще

---

*Q u a r t. J. of Math. (Oxf. ser.) **7**, **46**, 1936.

** Точное значение коэффициента $C = C(\sigma)$ найдено лишь для некоторых частных значений аргумента σ. С другой стороны, для $C(\sigma)$ известны некоторые общие оценки, а именно С. Н. Бернштейн (Изв. АН СССР, сер. мат., 1948, **12**) показал, что

$$L_{N-1} < C(\sigma) \leqslant L_N,$$

где

$$N = \left[\frac{\pi}{\pi - \sigma}\right]$$

и

$$L_n = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2\pi}} + \ldots + \frac{1}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}}\right\}.$$

А так как при $n \to \infty$

$$L_n \sim \frac{2}{\pi} \ln n,$$

то при $\sigma \to \pi$ имеет место асимптотическое равенство

$$C(\sigma) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi}{\pi - \sigma}.$$

*** С работой Дюффина и Шэффера [Americ. J. Math., 67, 141—154 (1945)], о которой мы узнали из одной рецензии Боаса в Math. Rev. и которая имеет непосредственное отношение к рассматриваемым нами вопросам, мы ознакомиться не имели возможности.

говоря, комплексная) последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу (L, δ), и писать

$$\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L, \delta),$$

где L и δ неотрицательные числа, если имеют место неравенства (1), (2).

Таким образом, в настоящей работе вместо классов (L, δ) $(\delta > 0)$ будет фигурировать более общий класс $(L, 0)$.

В классическом случае узлами были нули функции $\sin \pi z$, которая явно входит в интерполяционную формулу. Теперь вместо функции $\sin \pi z$ появится некоторая целая трансцендентная функция с произвольными нулями λ_k $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$. Для наших построений понадобятся оценки этой функции и некоторых от нее производных функций. Этим оценкам, которые оказываются полезными и в других вопросах и поэтому представляют самостоятельный интерес, мы посвятим первые параграфы настоящей статьи.

2. Разбиение узлов на группы. Пусть дана некоторая последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$, принадлежащая классу $(L, 0)$ и не принадлежащая классу (L, δ) ни при каком $\delta > 0$. Обозначим через r наименьшее целое число, превосходящее $2L$. Далее возьмем какое-нибудь положительное число ρ, удовлетворяющее неравенству

$$\rho < 1 - \frac{2L}{r}. \tag{3}$$

Разобьем теперь все узлы λ_k $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$ на группы, условившись к некоторой группе узлов Λ вместе с узлом λ_i относить всякий узел λ_j, для которого

$$|\operatorname{Re}(\lambda_j - \lambda_i)| \leqslant \rho. \tag{4}$$

Таким образом, если для некоторого узла λ_i нет таких узлов λ_j $(j \neq i)$, которые удовлетворяют неравенству (4), то указанный узел λ_i образует группу, состоящую из одного лишь элемента. Если два узла λ_p и λ_q принадлежат различным группам, то в силу определения

$$|\operatorname{Re}(\lambda_q - \lambda_p)| > \rho,$$

а значит и подавно

$$|\lambda_q - \lambda_p| > \rho.$$

Максимальным числом элементов одной группы является r. Действительно, если в некоторую группу входит n узлов, то среди этих узлов найдутся по крайней мере два, скажем λ_p, λ_q, номера которых удовлетворяют неравенству

$$q - p \geqslant n - 1.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}(n-1)\rho \geqslant |\operatorname{Re}(\lambda_q - \lambda_p)| &= |(\operatorname{Re}\lambda_q - q) - (\operatorname{Re}\lambda_p - p) + (q - p)| \\ &\geqslant q - p - |\lambda_q - q| - |\lambda_p - p| \geqslant n - 1 - 2L\end{aligned}$$

и в силу (3)

$$(n-1)\left(1 - \frac{2L}{r}\right) > n - 1 - 2L,$$

то есть

$$n - 1 < r.$$

Обозначим образованные нами группы через Λ_i $(\pm i = 0, 1, 2, \ldots)$, перенумеровавши их в порядке возрастания минимального номера узла λ_k, входящего в группу. Далее обозначим через Π_i наименьший выпуклый полигон, содержащий группу Λ_i. Заметим, что полигоны Π_i разделяются друг от друга параллельными мнимой оси полосами ширины $\geqslant \rho$, не содержащими наших узлов. Это позволяет нам ввести выпуклые полигоны $\Pi_i(\rho)$, которые также разделяются свободными от узлов и параллельными мнимой оси полосами ширины $\geqslant \frac{\rho}{2}$, таким образом, чтобы полигон $\Pi_i(\rho)$ содержал полигон Π внутри и чтобы расстояние от границы полигона $\Pi_i(\rho)$ до любой точки полигона Π_i было не меньше, чем $\frac{\rho}{4}$. Например, в качестве полигонов $\Pi_i(\rho)$ можно взять прямоугольники, две стороны которых представляют отрезки прямых

$$y = \pm (2L + 1).$$

Если последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу (L, δ) при каком-нибудь $\delta > 0$, разбиение на группы излишне. В этом случае каждый узел λ_i можно отождествить с полигоном Π_i, а вместо полигона $\Pi_i(\rho)$ можно взять круг радиуса $\frac{\delta}{4}$ с центром λ_i. Мы получаем таким образом естественное отделение каждого узла вместе с некоторой его окрестностью от остальных узлов. Наше разбиение узлов на группы и построение полигонов $\Pi_i(\rho)$ преследовало подобное отделение уже не каждого единичного узла*, а каждой группы узлов Λ_i, окрестностью которой и является полигон $\Pi_i(\rho)$.

В дальнейшем нам придется подвергать последовательность узлов λ_i некоторым вещественным сдвигам. Узлы $\lambda_i + \tau\, (\pm i = 0, 1, 2, \ldots)$, очевидно, будут принадлежать классу $(L + 1, \delta)$, если последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ принадлежала классу (L, δ). При этом придется лишь полагать

$$\lambda_i + \tau = \lambda'_{i \pm m},$$

то-есть как-то изменять нумерацию. Указанная трансляция не изменит ни групп, ни полигонов, и числа r, ρ, при определении которых мы учитывали величину L, изменению не подлежат.

В силу сказанного выше, для любых двух узлов λ_p, λ_q, принадлежащих одной группе, имеет место неравенство

$$|\operatorname{Re}(\lambda_q - \lambda_p)| < r\rho.$$

Поэтому расстояние между двумя соседними полосами ширины ρ, параллельными мнимой оси и не содержащими узлов, меньше чем $r\rho$.

Следовательно, в каждом интервале длины $r\rho$ можно найти такое τ, что после сдвига узлов λ_i на τ полоса

$$-\frac{\rho}{2} < \operatorname{Re} z \leqslant \frac{\rho}{2} \tag{5}$$

будет свободна от узлов.

Примем для некоторого упрощения дальнейших построений, что это свойство [пустоты полосы (5)] выполняется уже для исходной последовательности $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$. Это предположение о „нормировке“ после-

* что уже невозможно, если $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ не принадлежит классу (L, δ) при $\delta > 0$.

довательности узлов, очевидно, не нарушает общности наших рассмотрений.

3. Оценки для основных функций интерполирования. Пусть дана последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L,\ 0)$, нормированная указанным в конце предыдущего n° образом и разбитая на группы Λ_i. Построим функцию

$$\psi(z) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Кроме того, построим для каждой группы Λ функцию $\psi_\Lambda(z)$, получающуюся из $\psi(z)$ удалением всех тех множителей, которые отвечают узлам группы Λ. Наконец, для каждой группы Λ построим некоторую систему функций $R_k(z;\ \Lambda)$ следующим образом: если группа Λ состоит из узлов

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_s \qquad (s+1 \leqslant r),$$

то

$$R_0(z;\ \Lambda) = \sum_{k=0}^{s} \frac{\psi(z)}{\psi'(\mu_k)(z-\mu_k)} \left(\frac{z-\alpha}{\mu_k-\alpha}\right)^q$$

$$R_1(z;\ \Lambda) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\psi(z)}{\psi'(\mu_k)(z-\mu_k)} \left(\frac{z-\alpha}{\mu_k-\alpha}\right)^q (\mu_k-\mu_0)$$

$$R_2(z;\ \Lambda) = \sum_{k=2}^{s} \frac{\psi(z)}{\psi'(\mu_k)(z-\mu_k)} \left(\frac{z-\alpha}{\mu_k-\alpha}\right)^q (\mu_k-\mu_0)(\mu_k-\mu_1)$$

. . . .

$$R_s(z;\ \Lambda) = \frac{\psi(z)}{\psi'(\mu_s)(z-\mu_s)} \left(\frac{z-\alpha}{\mu_s-\alpha}\right)^q (\mu_s-\mu_0)(\mu_s-\mu_1)\ \ldots\ (\mu_s-\mu_{s-1}).$$

Здесь q — целое неотрицательное число, которым мы позже распорядимся, а α должно быть отличным от узлов.

Функции $\psi(z)$ и $R_k(z;\ \Lambda)$ назовем основными функциями интерполирования.

В первую очередь покажем, что

$$R_k(z;\ \Lambda) = (-1)^{s+1}\mu_0\mu_1\ \ldots\ \mu_s(z-\alpha)^q\,\psi(z)\,\frac{\vartheta}{(s-k)!}\,\frac{d^{s-k}}{d\zeta^{s-k}}\,\frac{1}{(z-\zeta)(\zeta-\alpha)^q\psi_\Lambda(\zeta)} \tag{6}$$

где ζ означает некоторую зависящую от функции $R_k(z;\ \Lambda)$ точку полигона Π, а ϑ — комплексное число, по модулю $\leqslant 1$, которое также зависит от функции $R_k(z,\ \Lambda)$. Таким образом, расстояние от точки ζ до любого из узлов λ_k, не принадлежащих группе Λ, превосходит число ρ. Доказательство формулы (6) вытекает из общей формулы*

$$\frac{f(z_0)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)\ \ldots\ (z_0-z_n)} + \frac{f(z_1)}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)\ \ldots\ (z_1-z_n)} + \ \ldots =$$

$$= \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\ \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}((1-t_1)z_0 + (t_1-t_2)z_1 + \ldots$$

$$+ (t_{n-1}-t_n)z_{n-1} + t_n z_n)\,dt_n,$$

* См. Нерлунд, Differenzenrechnung, стр. 16,

где $f(z)$ аналитическая функция внутри и на границе наименьшего выпуклого полигона, содержащего точки $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$. Действительно, если применить к правой части теорему о среднем значении Дарбу, то мы получим, что правая часть равна

$$\vartheta f^{(n)}(\tau_0 z_0 + \tau_1 z_1 + \ldots + \tau_n z_n)\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n,$$

где ϑ — комплексное число по модулю $\leqslant 1$, а $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ — неотрицательные числа, в сумме дающие 1, или

$$\frac{\vartheta}{n!} f^{(n)}(\tau_0 z_0 + \tau_1 z_1 + \ \ldots \ + \tau_n z_n).$$

Теорема 1. Функция $\psi(z)$ удовлетворяет при $|y| \geqslant 2L+1$ неравенствам

$$|\psi(z)| \geqslant A e^{\pi|y|}|z|\left|\frac{y}{z^2}\right|^{2L+1}, \tag{7}$$

$$|\psi(z)| \leqslant B e^{\pi|y|}|z|\left|\frac{z^2}{y}\right|^{2L+1}, \tag{8}$$

где положительные величины A, B зависят только от L, а $y = \operatorname{Im} z$.

Доказательство. Модуль отношения

$$\prod_{k=-p}^{p}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right) : z \prod_{k=-p}^{p}{}'\left(1-\frac{z}{k}\right),$$

где $p = [L+1]$, имеет при $|y| \geqslant 2L+1$ некоторую конечную верхнюю грань и некоторую положительную нижнюю грань, зависящие лишь от L, так как все $|\lambda_k|\,(\pm k = 0, 1, 2, \ldots, p)$ не меньше $\frac{\rho}{2}$, а ρ зависит только от L. Поэтому достаточно доказать теорему для функции

$$z\omega(z) = z\prod_{k=-p}^{p}{}'\left(1-\frac{z}{k}\right)\prod_{n=p+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{z}{\lambda_{-n}}\right)$$

вместо $\psi(z)$.

Введем функцию $n(t)$, которая при $t > 0$ представляет число корней функции $\omega(z)$, лежащих в полосе

$$0 < \operatorname{Re} z < t,$$

а при $t < 0$ представляет со знаком минус число корней функции $\omega(z)$, лежащих в полосе

$$t < \operatorname{Re} z < 0,$$

наконец, положим $n(0) = 0$. Таким образом $n(t) = 0$ при $-1 < t < 1$, а при любом t

$$n(t) = t - \frac{1}{2} + \varphi(t),$$

где

$$|\varphi(t)| < L + \frac{1}{2}.$$

Будем доказывать теорему при $y > 0$. Так как при $y \geqslant 2L+1$

$$\left|1-\frac{z}{\lambda_k}\right| \geqslant \left|1-\frac{z}{\operatorname{Re}\lambda_k + iL}\right|$$

и

$$\left|1-\frac{z}{\lambda_k}\right| \leqslant \left|1-\frac{z+iL}{\operatorname{Re}\lambda_k}\right|,$$

то при $y \geqslant 2L+1$ с одной стороны

$$\ln|\omega(z)| \geqslant \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int_{-N}^{N} \ln \frac{t+iL-z}{t+iL}\, dn(t)$$

$$\geqslant \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int_{-N}^{N} \ln \frac{t+iL-z}{t-i}\, dn(t) + \ln A_0(L),$$

а с другой стороны

$$\ln|\omega(z)| \leqslant \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int_{-N}^{N} \ln \frac{t-iL-z}{t}\, dn(t)$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int_{-N}^{N} \ln \frac{t-iL-z}{t-i}\, dn(t) + \ln B_0(L).$$

Нам остается оценить величину

$$K(\zeta) = \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int_{-N}^{N} \ln \frac{t-\zeta}{t-i}\, dn(t),$$

где ζ один раз равно $z-iL$, а другой раз равно $z+iL$ и $y = \operatorname{Im} z \geqslant 2L+1$. Имеем

$$K(\zeta) = \pi \operatorname{Im}(\zeta - i) - \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left(\frac{1}{t-\zeta} - \frac{1}{t-i} \right) dt,$$

откуда

$$|K(\zeta) - \pi \operatorname{Im}(\zeta - i)| < \left(L + \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \operatorname{Re}\left(\frac{1}{t-\zeta} - \frac{1}{t-i} \right) \right| dt.$$

Но интеграл

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \operatorname{Re}\left(\frac{1}{t-z_1} - \frac{1}{t-z_2} \right) \right| dt = \rho(z_1, z_2),$$

где z_1, z_2 — две точки верхней полуплоскости, равен расстоянию между этими точками в метрике Лобачевского*, то есть равен

$$\ln \frac{|z_2 - \bar{z}_1| + |z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1| - |z_2 - z_1|}.$$

* Действительно, подвергая z преобразованиям

$$z = \zeta + \zeta_0, \quad z = \alpha\zeta \quad (\alpha > 0), \quad z = -\frac{1}{\zeta},$$

легко находим, что

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(\zeta_1, \zeta_2).$$

Следовательно, $\rho(z_1, z_2)$ инвариантно относительно всех движений плоскости Лобачевского. Остается рассмотреть частный случай, когда

$$z_1 = \alpha i, \quad z_2 = \beta i \quad (\beta > \alpha > 0).$$

А в этом случае простое вычисление дает

$$\rho(i\alpha, i\beta) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|(\beta^2-\alpha^2)}{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}\, dt = \int_{0}^{\infty} \frac{(\beta^2-\alpha^2)\, t\, dt}{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)} = \ln \frac{\beta}{\alpha} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y}.$$

Таким образом
$$|K(\zeta) - \pi \operatorname{Im}(\zeta - i)| < (2L+1)\ln\frac{|\zeta+i|+|\zeta-i|}{|\zeta+i|-|\zeta-i|}$$
$$< (2L+1)\ln\frac{|\zeta|^2+1}{\operatorname{Im}\zeta}.$$

Учитывая эту оценку, мы и получаем, что
$$\ln|\omega(z)| \geqslant \ln A_1(L) + \pi|y| - (2L+1)\ln\left|\frac{z^2}{y}\right|$$
и значит
$$|\psi(z)| \geqslant A(L)e^{\pi|y|}|z|\left|\frac{y}{z^2}\right|^{2L+1},$$
а с другой стороны
$$\ln|\omega(z)| \leqslant \ln B_1(L) + \pi|y| + (2L+1)\ln\left|\frac{z^2}{y}\right|,$$
откуда
$$|\psi(z)| \leqslant B(L)e^{\pi|y|}|z|\left|\frac{z^2}{y}\right|^{2L+1}.$$
Тем самым теорема доказана.

Следствие. Для всех комплексных z справедливо неравенство
$$|\psi(z)| \leqslant C\{|z|+1\}^{4L+3}e^{\pi|y|}, \tag{9}$$
а для всех вещественных y имеет место также неравенство
$$|\psi(iy)| \leqslant C\{|y|+1\}^{2(L+1)}e^{\pi|y|}, \tag{10}$$
где C зависит только от L.

Доказательство. При $y = 2L+1$ в силу теоремы 1
$$|\psi(z)| \leqslant B(L)e^{\pi(2L+1)}|z|^{4L+3}.$$
Отсюда неравенство (9) с $C = C(L)$ вытекает на основании теоремы Фрагмен — Линделёфа. В частности, при
$$-(2L+1) \leqslant y \leqslant (2L+1)$$
имеет место неравенство
$$|\psi(iy)| \leqslant C(L)e^{\pi(2L+1)}(2L+2)^{4L+3}.$$
Отсюда и вытекающего из теоремы 1 неравенства
$$|\psi(iy)| \leqslant B(L)e^{\pi|y|}|y|^{2L+2} \qquad (|y| \geqslant 2L+1)$$
непосредственно следует неравенство (10).

Лемма. Имеют место неравенства
$$|\psi_\Lambda(\zeta)| \geqslant D\frac{1}{\{1+|\zeta|\}^{4p-s}}$$
с зависящим лишь от L коэффициентом $D > 0$, где ζ есть любая точка полигона $\Pi(\rho)$, принадлежащего группе Λ из $s+1$ узлов, а Λ пробегает совокупность всех групп, на которые разбита нормированная последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty} \in (L, 0)$, и $p = [L+1]$.

Доказательство. Примем для определенности, что $\xi = \operatorname{Re}\zeta \geqslant 2p+1$ и положим $t = [\xi]$. Затем представим $\psi_\Lambda(\zeta)$ в виде
$$\psi_\Lambda(\zeta) = \Phi_1(\zeta)\Phi_2(\zeta)\Phi_3(\zeta),$$

где

$$\Phi_1(\zeta)=\prod_{k=t+p+2}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_k}\right)\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_{-k}}\right),$$

$$\Phi_2(\zeta)=\prod_{k=-t-p-1}^{t-p-1}\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_k}\right),$$

$$\Phi_3(\zeta)=\prod_{k=t-p}^{t+p+1}{}^{*}\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_k}\right),$$

причем * у знака произведения означает, что из произведения удалено $s+1$ множителей, отвечающих узлам группы Λ. Полагая $\alpha_k = \mathrm{Re}\lambda_k$, будем при $|k|>t+p+1$ иметь неравенство

$$\left|\frac{\xi-\alpha}{\alpha_k}\right|\geqslant\left|\frac{\xi-(k-p)}{k-p}\right|.$$

Следовательно, при $|k|>t+p+1$

$$\frac{|\zeta-\lambda_k|}{|\lambda_k|}\geqslant\frac{|\xi-\alpha_k|}{|\alpha_k|}\,|\cos\arg\lambda_k|\geqslant\left|1-\frac{\xi}{k-p}\right|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{L^2}{(|k|-p)^2}}}.$$

Поэтому

$$|\Phi_1(\zeta)|\geqslant\prod_{k=t+p+2}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{L^2}{(k-p)^2}}\left(1-\frac{\xi}{k-p}\right)\left(1+\frac{\xi}{k+p}\right)=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{m=t+2}^{\infty}\left(1+\frac{L^2}{m^2}\right)}\prod_{k=t+p+2}^{\infty}\frac{1-\frac{(\xi+p)^2}{k^2}}{1-\frac{p^2}{k^2}}\geqslant D_1(L)\frac{(t+1)!\,(t+2p+1)!}{(2t+2p+2)!}.$$

Далее,

$$|\Phi_2(\zeta)|\geqslant\frac{\prod\limits_{k=-t-p-1}^{t-p-1}(t-k-p)}{\prod\limits_{k=-t-p-1}^{t-p-1}(|k|+p)}\geqslant D_2(L)\frac{(2t+1)!}{(t+2p+1)!\,(t-1)!}.$$

Наконец,

$$|\Phi_3(\zeta)|\geqslant\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2p+1-s}\frac{1}{\prod\limits_{k=t-p}^{t+p+1}{}^{*}(k+p)}\geqslant D_3(L)\frac{1}{(t+2p+1)^{2p+1-s}}.$$

Собирая написанные неравенства, получаем

$$|\psi_\Lambda(\zeta)|\geqslant D_4(L)\frac{(t+1)!\,(t+2p+1)!\,(2t+1)!}{(2t+2p+2)!\,(t+2p+1)!\,(t-1)!\,(t+2p+1)^{2p+1-s}}$$

$$\geqslant D_5(L)\frac{1}{(t+p+1)^{4p-s}}$$

$$\geqslant D(L)\frac{1}{(1+|\zeta|)^{4p-s}}.$$

Следствие. Существует такая, зависящая лишь от L, величина E, что

$$|\psi(\zeta)|\geqslant E\frac{1}{(1+|\zeta|)^{4p+1}}$$

для любой точки ζ периферии любого из полигонов $\Pi_i(\rho)$, принадлежащих группам, на которые разбита нормированная последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}\in(L,0)$.

Доказательство вытекает из того, что

$$\psi(\zeta) = \psi_\Lambda(\zeta) \prod_{k=0}^{s} \left(1 - \frac{\zeta}{\mu_k}\right),$$

а если ζ принадлежит периферии полигона $\Pi(\rho)$, то

$$\left| \prod_{k=0}^{s} \left(1 - \frac{\zeta}{\mu_k}\right) \right| > \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{s+1}}{(1 + |\zeta|)^{s+1}}.$$

Мы используем доказанную лемму для оценки сверху модулей функций $R_k(z;\ \Lambda)$. Так как $\frac{1}{(z-\alpha)^q} R_k(z;\ \Lambda)$ есть целая трансцендентная функция конечной степени, то достаточно оценить величину $\frac{1}{(z-\alpha)^q} R_k(z;\ \Lambda)$, например, при $|y| \geqslant 3L + 1$. При этом предположении относительно z величина

$$g(\zeta) = \frac{1}{(z-\zeta)(\zeta-\alpha)^q \psi_\Lambda(\zeta)}$$

является голоморфной функцией от ζ внутри и на границе полигона $\Pi(\rho)$, и в силу леммы

$$\max_{\zeta \in \Pi(\rho)} |g(\zeta)| \leqslant \frac{(1 + |\zeta^*|)^{4p-s}}{D_0(L) |\zeta^* - \alpha|^q \{|y| - 2L\}},$$

где ζ^* означает любую точку, лежащую внутри полигона Π. На основании неравенств Коши для производных от голоморфной функции при $\zeta \in \Pi$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{d^{s-k} g(\zeta)}{d\zeta^{s-k}} \right| \leqslant N_1(L) \frac{(1 + |\zeta^*|)^{4p-s}}{|\zeta^* - \alpha|^q \{|y| - 2L\}},$$

где $N_1(L)$ зависит также лишь от L, так как лишь от L зависит ρ. Принимая во внимание формулу (6), находим, что при $|y| \geqslant 3L + 1$

$$\left| \frac{1}{(z-\alpha)^q} R_k(z; \Lambda) \right| \leqslant N_2(L) \frac{(1 + |\zeta^*|)^{4p+1}}{|\zeta^* - \alpha|^q \{|y| - 2L\}} |\psi(z)|, \qquad (11)$$

откуда в силу следствия теоремы 1 и теоремы Фрагмен-Линделёфа, получается

Теорема 2. Основные функции интерполирования $R_k(z;\ \Lambda)$ удовлетворяют во всей плоскости неравенствам

$$|R_k(z;\ \Lambda)| \leqslant N \frac{(1 + |\zeta|)^{4p+1}}{|\zeta - \alpha|^q} |z - \alpha|^q (1 + |z|)^{4L+3} e^{\pi |y|}$$

с зависящим лишь от L коэффициентом N, где ζ означает любую точку полигона Π, принадлежащего группе Λ, а Λ пробегает совокупность всех групп, на которые разбита нормированная последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L,\ 0)$.

4. Построение одной интерполяционной формулы. Займемся решением следующей задачи: дана некоторая нормированная последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L,\ 0)$ и на ней некоторая функция $f(\lambda_k)(\pm k=0, 1, 2, \ldots)$; требуется построить целую трансцендентную функцию конечной степени $H(z)$, удовлетворяющую условиям

$$H(\lambda_k)=f(\lambda_k) \qquad (\pm k=0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

При этом предполагается, что рост функции $f(\lambda_k)=\varphi(k)$ при $\pm k\to\infty$ подчинен некоторым ограничениям. Конечно, наша задача является неопределенной, *и речь пока идет лишь о нахождении какого-нибудь* ее решения *.

Пусть Λ есть одна из групп, на которые разбита совокупность всех узлов. Обозначим через

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_s$$

все узлы, входящие в состав группы Λ, и положим

$$\left.\begin{aligned} F_0(\Lambda) &= f(\mu_0), \\ F_1(\Lambda) &= f(\mu_0, \mu_1)=\frac{f(\mu_1)-f(\mu_0)}{\mu_1-\mu_0} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_s(\Lambda) &= f(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_s)=\frac{f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)-f(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{s-1})}{\mu_s-\mu_0} \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Подобные величины

$$F_k(\Lambda_i) \quad (k=0, 1, \ldots, s_i; \quad \pm i=0, 1, 2, \ldots)$$

введем для всех групп и положим

$$\varphi_i=\max_{0\leqslant k\leqslant s_i}|F_k(\Lambda_i)| \qquad (\pm i=0, 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Ограничение, которое мы наложим на рост функции $\varphi(k)=f(\lambda_k)$ (при $\pm k\to\infty$), состоит в предположении, что величина φ_i при $\pm i\to\infty$ растет не быстрее чем некоторая степень модуля величины ζ_i, представляющей точку внутри полигона Π_i. Поэтому можно выбрать так число σ, чтобы ряд

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_i}{|\zeta_i|^\sigma} \tag{15}$$

сходился.

Теперь выберем показатель q, входящий в выражения основных функций интерполирования $R_k(z; \Lambda)$ так, чтобы имело место неравенство

$$q\geqslant\sigma+4p+1.$$

При таком выборе q ряд

$$H(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\{F_0(\Lambda_i)R_0(z; \Lambda_i)+\ldots+F_{s_i}(\Lambda_i)R_{s_i}(z; \Lambda_i)\} \tag{16}$$

на основании теоремы 2 сходится равномерно и абсолютно в каждой

---

* Полагая

$$H^*(z)=H(z)+g(z)\psi(z),$$

где $g(z)$ произвольная целая функция конечной степени, мы получим все решения. В дальнейшем мы встретимся с дополнительными условиями, позволяющими из совокупности всех решений выделить одно определенное.

конечной части плоскости, а сумма этого ряда $H(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|H(z)| \leqslant rN(L)|z-\alpha|^q (1+|z|)^{4L+3} e^{\pi|y|} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_i \frac{(1+|\zeta_i|)^{4p+1}}{|\zeta_i-\alpha|^q}$$

$$\leqslant \text{const}\cdot|z-\alpha|^q (1+|z|)^{4L+3} e^{\pi|y|},$$

то-есть представляет целую функцию степени $\leqslant \pi$.

Заметим еще, что в силу неравенства (11) величина

$$\frac{H(z)}{z^{q-\varepsilon}\psi(z)} \qquad (0 \leqslant \varepsilon < 1) \tag{17}$$

стремится к нулю, когда $|z| \to \infty$ и выполнено неравенство

$$\left|\arg z \mp \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \eta,$$

где η сколь угодно малое положительное число, меньшее $\frac{\pi}{2}$.

Что функция $H(z)$ удовлетворяет условиям (12), проверяется непосредственно.

Таким образом функция $H(z)$, определяемая формулой (16), удовлетворяет всем условиям рассматриваемой нами задачи. Заметим, что интерполяционную формулу (16) можно рассматривать как некоторое обобщение классической формулы Эрмита*.

5. **Первая интерполяционная формула для целых функций конечной степени.** В настоящем n° мы используем результат предыдущего n° для разложения в интерполяционный ряд заданной целой трансцендентной функции конечной степени.

Мы обозначим эту целую трансцендентную функцию через $f(z)$. Ее значения в точках заданной нормированной последовательности $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L,\ 0)$ будут $f(\lambda_k)$. Мы введем величины (13) и (14), как указано в $n^\circ 4$, и предположим, что при $\pm i \to \infty$ величина (14) растет не быстрее, чем некоторая степень модуля ζ_i, так что мы можем выбрать такое σ, для которого ряд (15) сходится.

Кроме этого мы предположим, что ширина по мнимой оси индикаторной диаграммы функции $f(z)$ меньше, чем 2π, то-есть

$$2\nu \equiv h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi.$$

Напомним, что

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r}.$$

Не нарушая общности, можем предположить, что

$$\nu = h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Теперь введем вспомогательную функцию

$$g(z;\ з) = f(z)\left[\frac{\sin\omega(z-з)}{\omega(z-з)}\right]^m,$$

* См., напр., В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. 1939.

где з комплексный параметр, m наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$m \geqslant \sigma + 4p + 1,$$

а ω какое-нибудь положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\omega < \frac{\pi - \gamma}{m}.$$

Когда параметр з зафиксирован, $g(z) = g(z;\ з)$ является целой функцией конечной степени от z и при этом

$$h_g\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \gamma + m\alpha < \pi.$$

Введем в рассмотрение значения $g(\lambda_k;\ з)$ и построим величины $G_k(\Lambda_i;\ з)$ точно так, как в $n^\circ 4$ по значениям $f(\lambda_k)$ были построены величины $F_k(\Lambda_i)$. Мы без труда найдем при этом, что

$$|G_k(\Lambda_i;\ з)| \leqslant N(з,\ m,\ L) \max_{0 \leqslant j \leqslant k} |F_j(\Lambda_i)| \cdot \frac{1}{(1 + |\zeta_i|)^m}. \tag{18}$$

Таким образом величины

$$\gamma_i = \max_{0 \leqslant k \leqslant s_i} |G_k(\Lambda_i;\ з)|$$

удовлетворяют неравенствам

$$\gamma_i \leqslant N \frac{\varphi_i}{(1 + |\zeta_i|)^m}.$$

Мы можем, следовательно, построить для функции $g(\lambda_k;\ з)$ интерполяционный ряд по формуле (16) при $q = 0$:

$$H(z;\ з) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{G_0 \Lambda_i;\ з) R_0(z;\ \Lambda_i) + \ldots + G_{s_i}(\Lambda_i;\ з) R_{s_i}(z;\ \Lambda_i)\}.$$

Мы докажем теперь, что

$$H(z;\ з) \equiv g(z;\ з). \tag{19}$$

С этой целью исследуем функцию

$$\Omega(z) = \frac{g(z;\ з) - H(z;\ з)}{\psi(z)} = \Omega_1(z) - \Omega_2(z).$$

Что $\Omega(z)$ есть целая функция, очевидно. Докажем, что она конечной степени. Числитель, как мы знаем, есть целая функция конечной степени. Поэтому в силу первого из утверждений теоремы 1 при $|y| \geqslant 2L + 1$ имеет место неравенство

$$|\Omega(z)| \leqslant Me^{k|z|}.$$

Нам остается доказать, что подобное неравенство выполняется и в полосе

$$|y| \leqslant 2L + 1.$$

Для этого достаточно использовать принцип максимума модуля в связи со следствием леммы $n^\circ 3$ относительно поведения $|\psi(z)|$ на периферии многоугольников $\Pi_i(\rho)$, беря в качестве этих многоугольников прямоугольники со сторонами, лежащими на прямых $y = \pm (2L + 1)$.

Заметим теперь, что, в силу неравенства

$$h_{g(z;\ з)}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) < \pi$$

и оценки (7) для функции $\psi(z)$, имеет место неравенство

$$h_{\Omega_1}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)<0.$$

А так как функция $h(\theta)$ непрерывна, то можно указать такое положительное $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, что

$$h_{\Omega_1}(\theta)<0$$

при

$$\left|\theta\pm\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.$$

Следовательно, в углах

$$\left|\arg z\pm\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$$

функция $\Omega_1(z)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Но в тех же углах при $|z|\to\infty$ стремится к нулю также $\Omega_2(z)$, как это вытекает из замечания относительно величины (17).

Таким образом в указанных углах $\Omega(z)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. На основании теоремы Фрагмен—Линделёфа поэтому

$$\Omega(z)\equiv 0,$$

то-есть равенство (19) доказано. Полагая в нем $\mathfrak{z}=z$ и замечая, что

$$g(z;\ z)=f(z),$$

получаем представление

$$f(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{G_0(\Lambda_i;\ z)R_0(z;\ \Lambda_i)+\ldots+G_{s_i}(\Lambda_i;\ z)R_{s_i}(z;\ \Lambda_i)\right\}. \qquad (A)$$

Это и есть интерполяционная формула для целых функций конечной степени, которую мы хотели установить. Если все группы Λ_i содержат по одному узлу, она принимает вид

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\psi(z)}{(z-\lambda_k)\psi'(\lambda_k)}\left[\frac{\sin\omega(z-\lambda_k)}{\omega(z-\lambda_k)}\right]^m f(\lambda_k)$$

и была установлена в I.

Как видим, целая функция $f(z)$ вполне определяется своими значениями на последовательности $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}\in(L,\ 0)$. Однако нужно иметь в виду, что этот результат мы получили при сильном ограничении, наложенном на рост функции $f(z)$, а именно ширина ее индикаторной диаграммы по мнимой оси предположена меньшей, чем 2π. Ниже мы покажем, что это условие можно существенно ослабить.

6. Обобщение теоремы М. Картрайт. С помощью интерполяционной формулы предыдущего n° получается следующее обобщение теоремы М. Картрайт.

Теорема 3. Пусть $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ какая-нибудь последовательность, принадлежащая классу $(L,\ 0)$, и пусть $f(z)$ какая-нибудь целая трансцендентная функция конечной степени, у которой ширина индикаторной диаграммы по мнимой оси меньше 2π. Если при этом функция $f(z)$ в том смысле ограничена на последовательности $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$, что существует такая константа M, что при любых различных $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_r$ имеют место неравенства

$$|f(\mu_1)| \leqslant M,$$
$$|f(\mu_1, \mu_2)| \leqslant M,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|f(\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_r)| \leqslant M,$$

то функция $f(z)$ ограничена на всей вещественной оси. При этом r определяется, как указано в n° 2.

Доказательство. В соответствии с замечанием, сделанным в n° 2, возьмем бесконечную последовательность сдвигов $\tau_i (\pm i = 0, 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{r\rho}{2} \leqslant \tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \frac{3r\rho}{2}$$

и таких, что, полагая

$$\lambda_k + \tau = \lambda^*_{k \pm m},$$

где τ любой из этих сдвигов τ_i, мы получим нормированную последовательность $\left\{\lambda^*_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$. Если мы положим при этом

$$f(z+\tau) = f^*(z),$$

то найдем, что функция $f^*(z)$ на последовательности $\left\{\lambda^*_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ будет ограничена в том же смысле и той же константой M, что и функция $f(z)$ на $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$. Кроме того, ширина индикаторной диаграммы функции $f^*(z)$ по мнимой оси будет та же, что и у функции $f(z)$. Если мы докажем, что в некотором фиксированном интервале длины $2r\rho$ прямой $y = 2L+1$ функция $f^*(z)$ ограничена при любом $\tau \in \{\tau_i\}$ одной и той же константой, то будет доказана ограниченность функции $f(z)$ на всей прямой $y = 2L+1$, а по теореме Фрагмен—Линделёфа и ограниченность ее на вещественной оси; тем самым будет доказана наша теорема.

Таким образом, нам остается оценить сверху $|f(x+(2L+1)i)|$ при $|x| \leqslant r\rho$ в предположении, что исходная последовательность нормирована. Эту оценку можно без труда получить с помощью интерполяционной формулы предыдущего n°. А именно, выше мы отметили неравенство (18). Из него теперь следует, что

$$|G_k(\Lambda_i;\ z)| \leqslant M\,\frac{N(z, m, L)}{(1+|\zeta_i|)^m}.$$

Поэтому в силу интерполяционной формулы предыдущего n° и теоремы 2

$$|f(z)| \leqslant rN(L)\,MN(z, m, L)(1+|z|)^{4L+3}e^{\pi|y|}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{(1+|\zeta_i|)^{4p+1}}{(1+|\zeta_i|)^m}.$$

А правая часть при $z = x+(2L+1)i$ и $-r\rho \leqslant x \leqslant r\rho$ меньше некоторой вполне определенной константы.

7. Вторая интерполяционная формула для целых трансцендентных функций конечной степени. Рассмотрения настоящего n° непосредственно примыкают к n° 4. Мы предположим лишь, что числа $f(\lambda_k)$ представляют значения целой трансцендентной функции конечной степени $f(z)$, для которой при некотором натуральном значении n (а значит и при всех больших значениях)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|y|}|f(iy)|^2 \frac{dy}{1+y^{2n}} < \infty \tag{20}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{u^2}\left\{\ln\int_u^{\infty} e^{-\pi y}|f(-iy)|\frac{dy}{y^{n+2}} + \ln\int_u^{\infty} e^{-\pi y}|f(iy)|\frac{dy}{y^{n+2}}\right\}dy = -\infty. \tag{21}$$

Эти соотношения представляют определенные ограничения, наложенные на рост функции $f(z)$ по мнимой оси. Они слабее ограничений n° 5 и не требуют, чтобы ширина индикаторной диаграммы по мнимой оси была меньше 2π. Последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L, 0)$ мы предполагаем нормированной. Равным образом, как и в n° 4, мы принимаем, что существует некоторое σ, для которого сходится ряд

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_i}{|\zeta_i|^\sigma}.$$

Наконец, мы выбираем натуральный показатель q так, чтобы

$$q \geqslant \max\{\sigma + 4p + 1, \quad n + 2L\}$$

и при построении функций $R_k(z; \Lambda)$ берем какое-нибудь отличное от нуля вещественное α, удовлетворяющее неравенству

$$|\alpha| < \frac{\rho}{4}.$$

Пусть

$$H(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{F_0(\Lambda_i)R_0(z; \Lambda_i) + \ldots + F_{s_i}(\Lambda_i)R_{s_i}(z; \Lambda_i)\}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z) = \frac{f(z) - H(z) - P(z)\psi(z)}{(z-\alpha)^q\psi(z)},$$

где $P(z)$ — многочлен $(q-1)$-ой степени, однозначно определяемый из условия, что числитель $\Omega(z)$ имеет в точке α корень кратности q. Таким образом $\Omega(z)$ есть целая трансцендентная функция. Как и выше (n° 5), мы убеждаемся легко, что $\Omega(z)$ есть функция конечной степени. Далее заметим, что $\Omega(iy)$ $(-\infty < y < \infty)$ принадлежит L^2. Действительно, принадлежность к L^2 функции

$$\frac{P(iy)\psi(iy)}{(iy-\alpha)^q\psi(iy)} = \frac{P(iy)}{(iy-\alpha)^q}$$

очевидна, функция

$$\frac{H(iy)}{(iy-\alpha)^q\psi(iy)}$$

принадлежит L^2 в силу замечания, относящегося к (17). Наконец,

$$\frac{f(iy)}{(iy-\alpha)^q\psi(iy)}=\Phi(y)$$

принадлежит L^2 на основании предположения (20) в силу теоремы 1 и выбора показателя q. Применяя к функции $\Omega(iy)$ теорему Палей-Винера, получаем представление

$$\Omega(iy)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ity}\omega(t)\,dt,$$

где $\omega(t)$ принадлежит L^2 и отлична от нуля лишь в некотором конечном интервале $(-b,\ b)$. Следовательно,

$$\Phi(y)=\frac{H(iy)}{(iy-\alpha)^q\psi(iy)}+\frac{P(iy)}{(iy-\alpha)^q}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{ity}\omega(t)\,dt. \tag{22}$$

Применим к обеим частям равенства (22) обратное преобразование Фурье. При этом положим

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\Phi(t)\,dt.$$

Результат можем представить в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}H_1(it)}{(it-\alpha)^q\psi(it)}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}H_2(it)}{(it-\alpha)^q\psi(it)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}P(t)}{(it-\alpha)^q}\,dt+\omega(x), \tag{23}$$

где $H_1(z)$ представляет ту часть суммы $H(z)$, которая распространена на все узлы λ_k, лежащие в правой полуплоскости, а $H_2(z)$ на остальные.

Примем вначале, что $x<0$. В этом случае первый и третий члены правой части формулы (23) равны нулю. Что же касается интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}H_2(it)}{(it-\alpha)^q\psi(it)}\,dt=g(x),$$

то, как легко видеть, он представляет аналитическую функцию на полуоси $x<0$. Но $\omega(x)=0$ при $x<-b$. Итак, мы имеем две функции

$$\varphi(x)\,(-\infty<x<\infty),\ g(x)\,(x<0),$$

из которых вторая аналитическая, и эти функции совпадают при $x<-b$. При этом, в силу (21), преобразование Фурье $\Phi(x)$ первой функции удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{\infty}\frac{du}{u^2}\ln\int_{u}^{\infty}e^{-\pi y}\,|\Phi(\pm y)|\,\frac{dy}{y^2}=-\infty$$

при одном из знаков по крайней мере.

Но в таком случае на основании одной теоремы Левинсона функции $\varphi(x)$, $g(x)$ совпадают не только при $x<-b$, но и при $x<0$, а это значит, что $\omega(x)=0$ при $x<0$.

Совершенно аналогично доказывается, что $\omega(x)=0$ при $x>0$. Значит $\omega(x)=0$ и поэтому $\Omega(z)=0$. Таким образом мы показали, что при сделанных в начале этого n° предположениях справедлива интерполяционная формула*

$$f(z)=P(z)\psi(z)+\sum_{i=-\infty}^{\infty}\{F_0(\Lambda_i)R_0(z;\ \Lambda_i)+\ldots+F_{s_i}(\Lambda_i)R_{s_i}(z;\ \Lambda_i)\}. \quad (B)$$

Заметим, что из доказанной формулы вытекает

Теорема 4. Если целая функция конечной степени $f(z)$ удовлетворяет условиям (20), (21) и если величина (14) растет при $\pm i\to\infty$ как некоторая степень $|\zeta_i|$, то $f(x)(\pm x\to\infty)$ также растет как некоторая степень x.

В заключение настоящего n° приведем формулировку использованной теоремы Н. Левинсона. Эта теорема гласит**:

Пусть функция $F(u)(-\infty<u<\infty)$ такова, что

$$\int_1^\infty \frac{du}{u^2}\ln\int_u^\infty |F(y)|\frac{dy}{y^2}=-\infty,$$

и пусть

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\,e^{-iux}du$$

ее преобразование Фурье. Если $g(z)$ есть аналитическая функция при $a\leqslant x\leqslant b$, $0<y\leqslant\gamma$ и непрерывная при $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant\gamma$ и если $f(x)=g(x)$ при $a<\alpha\leqslant x\leqslant\beta<b$, то $f(x)=g(x)$ при $a\leqslant x\leqslant b$.

8. Интерполяционные формулы с кратными узлами. До сих пор мы предполагали, что среди узлов нет равных. Отбросить это предположение это значит принять, что в качестве данных фигурируют не только значения функции, но и значения некоторых последовательных ее производных. Так, слияние узлов

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_s,$$

образующих группу Λ, означает, что относящимися к этой группе данными вместо разностных отношений (13) являются производные

$$f(\mu_0),\ f'(\mu_0),\ \ldots,\ f^{(s)}(\mu_0).$$

Соответствующие подобным схемам интерполяционные формулы легко получаются из построенных формул (A), (B) с помощью предельного перехода.

Мы используем эти соображения, чтобы получить еще одну теорему типа теоремы М. Картрайт. Для этого нам придется несколько остановиться на некоторых построениях, связанных с относительно плотными множествами. Как известно, множество вещественных чисел называется относительно плотным, если существует такое положительное число l, что всякий интервал длины l содержит число множества; число l называется включающим интервалом.

* При $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}\in(L,\delta)\ (\delta>0)$ впервые получена в II.

** См. Н. Левинсон. Gap and Density Theorems, 1940, стр. 74—81.

Пусть дана конечная система вложенных друг в друга относительно плотных множеств

$$\mathbf{M}_0 \supseteq \mathbf{M}_1 \supseteq \mathbf{M}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{M}_p \qquad (24)$$

с включающими интервалами соответственно $l_0, l_1, l_2 \ldots, l_p$. Очевидно, что можно считать* $l_0 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_p$. Мы будем называть кратностью числа λ по отношению к системе множеств (24) число множеств $\mathbf{M}_j$, в которые входит λ.

Лемма. При произвольно выбранном $\delta > 0$ из множества $\mathbf{M}_0$ можно выделить систему подмножеств $\mathbf{M}_j' \subseteq \mathbf{M}_j (j = 0, 1, \ldots, p)$, также вложенных друг в друга $(\mathbf{M}_0' \supseteq \mathbf{M}_1' \supseteq \mathbf{M}_2' \supseteq \ldots \supset \mathbf{M}_p')$, таким образом, что если перенумеровать числа λ', входящие в $\mathbf{M}_0'$ в порядке их возрастания, давая каждому числу столько номеров, какова его кратность по отношению к новым множествам, то при некотором $L > 0$ будет

1) $$|c\lambda_k' - k| < L \; (\pm k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$c = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{l_j'} \qquad \text{и} \qquad l_j' = l_j + 2\delta \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

2) $$|\lambda_k' - \lambda_i'| > \delta,$$

если

$$\lambda_k' \neq \lambda_i' .$$

Заметим, что кратность числа λ_k' по отношению к системе множеств $\mathbf{M}_j'$ не больше его кратности по отношению к системе множеств $\mathbf{M}_j$.

Доказательство будет состоять из нескольких этапов.

1°. Разобьем всю числовую ось на полуинтервалы

$$(kl_p', (k+1)l_p'] \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и в каждом из этих полуинтервалов выберем точку из $\mathbf{M}_p$, отстоящую не меньше чем на δ от концов полуинтервала. Эти точки образуют множество $\mathbf{M}_p'$. Очевидно, что любые две точки множества $\mathbf{M}_p'$ отстоят друг от друга на расстояние $\geqslant 2\delta$. Кроме того, если обозначить через $n_p(t)$ число точек множества $\mathbf{M}_p'$ на полуинтервале $(0, t]$ при $t > 0$ и через $-n_p(t)$ число точек этого множества на полуинтервале $[t, 0)$ при $t < 0$, то, как можно видеть непосредственно,

$$n_p(t) = \frac{t}{l_p'} + \varphi_p(t),$$

где

$$|\varphi_p(t)| < 1.$$

2°. Пусть уже построены множества $\mathbf{M}_p', \mathbf{M}_{p-1}', \ldots \mathbf{M}_j'$ так, что

$$\mathbf{M}_j' \subseteq \mathbf{M}_i (i = j, j+1, \ldots, p), \; \mathbf{M}_p' \subseteq \mathbf{M}_{p-1}' \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{M}_j'$$

причем расстояние между любыми двумя различными точками из

* Можно при этом также считать, что величины l_j сколь угодно близки к точным нижним границам включающих интервалов соответствующих множеств.

M'_j не меньше δ. Пусть, кроме того, введены функции $n_i(t)$ $(i = j, j+1, \ldots, p)$, аналогичные функции $n_p(t)$, и пусть

$$n_i(t) = \frac{t}{l'_i} + \varphi_i(t) \qquad (i = j, j+1, \ldots, p), \tag{25}$$

где $|\varphi_i(t)| < L_i$ и L_i — некоторая постоянная.

Построим множество M'_{j-1}. Для этого разобьем всю числовую ось на полуинтервалы

$$(kl'_{j-1}, \quad (k+1)\, l'_{j-1}] \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

и отметим те из этих полуинтервалов, которые содержат точки множества M'_j. Пусть $(k_1 l'_{j-1}, (k_1+1)\, l'_{j-1}]$ первый (считая вправо от нуля) полуинтервал, содержащий больше одной точки из M'_j, скажем, $s_1 > 1$ точек. Тогда отмечаем первые $s_1 - 1$ из неотмеченных еще полуинтервалов, следующих за полуинтервалом $(k_1 l'_j, (k_1+1)\, l'_{j-1}]$. Далее выбираем второй из полуинтервалов, содержащий более одной точки из M'_j, и отмечаем аналогично следующие за ним полуинтервалы и т. д. Аналогично отмечаются полуинтервалы на отрицательной полуоси.

3°. После проведенного построения на оси остаются неотмеченные полуинтервалы. В самом деле, число отмеченных полуинтервалов на отрезке $[0, kl'_{j-1}]$ не превосходит числа точек множества M'_j на этом отрезке, то есть согласно (25) не превосходит величины

$$k \frac{l'_{j-1}}{l'_j} + L_j.$$

Так как здесь коэффициент при k меньше 1, то при достаточно большом k написанное выражение будет меньше, чем k, и, следовательно, на отрезке $[0, kl'_{j-1}]$ найдутся неотмеченные полуинтервалы.

4°. Пусть полуинтервал $(ql'_{j-1}, (q+1)\, l'_{j-1}]$ неотмеченный. Тогда любой полуинтервал вида $(ql'_{j-1}, (q+m)\, l'_{j-1}]$ содержит не больше отмеченных полуинтервалов, чем в нем содержится точек из множества M'_j. Рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся в том, что при

$$m > 2L_j \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{l'_j}{l'_{j-1}}} \equiv m_j$$

указанный полуинтервал содержит неотмеченный полуинтервал.

5°. В каждом из неотмеченных полуинтервалов выберем точку множества M_{j-1}, отстоящую от концов полуинтервала не меньше, чем на δ. Эти точки вместе с точками множества M'_j образуют множество M'_{j-1}.

6°. Из проведенного построения непосредственно видно, что расстояние между любыми двумя различными точками множества M'_{j-1} не меньше δ. Кроме того, если точка $t > 0$ совпадает с левым концом неотмеченного полуинтервала, то число точек множества M'_{j-1} на полуинтервале $(0, t]$ в точности совпадает с числом полуинтервалов вида (26), попавших в этот полуинтервал. Иначе говоря, при этих значениях t

$$n_{j-1}(t)=\frac{t}{l'_{j-1}}.$$

По 5° такие значения t расположены на оси относительно плотно с включающим интервалом $\Delta_j=m_j l'_{j-1}$. Очевидно, что при произвольном $t>0$

$$n_{j-1}(t)=\frac{t}{l'_{j-1}}+\varphi_{j-1}(t),$$

где

$$|\varphi_{j-1}(t)|<m_j.$$

Таким образом, имея множество M'_p, мы строим последовательно

$$\mathbf{M}'_{p-1},\quad \mathbf{M}'_{p-2},\ \ldots,\ \mathbf{M}'_0.$$

Обозначая через $n(t)$ число точек из $\mathbf{M}'_0$ при условии (в отличие от $n_0(t)$, что каждая точка считается столько раз, какова ее кратность, мы будем иметь

$$n(t)=\sum_{j=0}^{p} n_j(t)$$

или

$$n(t)=ct+\varphi(t),\quad c=\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{l'_j},\tag{27}$$

где $|\varphi(t)|<L$ при некотором $L>0$. Подставив в соотношение (27) вместо t точку $\lambda'_k\in\mathbf{M}'_0$, мы получим

$$|k-c\lambda'_k|<L\qquad(\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Сформулируем теперь теорему *:

Теорема 5. Пусть $\mathbf{M}_0\supseteq\mathbf{M}_1\supseteq\ldots\supseteq\mathbf{M}_p$ — система вложенных друг в друга относительно плотных множеств вещественных** узлов с включающими интервалами $l_0\leqslant l_1\leqslant,\ldots\leqslant l_p$.

Пусть $f(z)$ — целая функция конечной степени, которая в каждой точке $\lambda\in\mathbf{M}_j$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(\lambda)|\leqslant\mathbf{M},\quad |f'(\lambda)|\leqslant\mathbf{M},\ \ldots,\quad |f^{(j)}(\lambda)|\leqslant\mathbf{M}.\tag{28}$$

Если при этом

$$h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)+h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{l_j},\tag{29}$$

то $f(x)$ ограничена на вещественной оси.

Доказательство. Выберем $\delta>0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)+h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{l'_j}$$

и выделим подмножества

$$M'_0\supseteq M'_1\supseteq\ \ldots\ \supseteq M'_p.$$

---

* Эта теорема является обобщением теоремы 2 из II.

** Теорема обобщается без труда и на случай комплексных узлов с ограниченными мнимыми частями, но мы на этом не остановимся.

Умножим все точки множества $\mathbf{M}_0'$ на число c. Мы получим последовательность узлов $c\lambda_k'$, которые снова обозначим через λ_k. При разбиении этих узлов на группы Λ_i каждая группа будет состоять из одной точки (кратной), а последовательность групп будет принадлежать классу (L, δ). Введем функцию $\varphi(z) = f(c^{-1}z)$. Если узел $\mu = \lambda_k$ имеет кратность $s+1$ относительно системы множеств $\mathbf{M}_j'$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$, то будут иметь место неравенства

$$|\varphi(\mu)| < \mathbf{M}, \quad |\varphi'(\mu)| < \mathbf{M}c^{-1}. \ \ldots, \ |\varphi^{(s)}(\mu)| < \mathbf{M}c^{-s}.$$

Кроме того, в силу (29) ширина по мнимой оси индикаторной диаграммы функции $\varphi(z)$ меньше, чем 2π. Поэтому функция $\varphi(z)$ допускает представление, которое получается из формулы (А) путем упомянутого в начале настоящего n° предельного перехода. Из этого представления и вытекает утверждение теоремы.