Проф. Н. І. АХІЄЗЕР

Інж. В. І. ПУТЯТА

АЕРОДИНАМІКА

ОНТВУ • ТРАНСПОРТ І ЗВ'ЯЗОК

Проф. Н. І. АХІЄЗЕР та інж. В. І. ПУТЯТА

АЕРОДИНАМІКА

МЕТОДСЕКТОР НКО УСРР ДОЗВОЛИВ ДО ВЖИТКУ,
ЯК ПОСІБНИК В ІНДУСТРІЯЛЬНИХ ВИШАХ

ОНТВУ/ТРАНСПОРТ і ЗВ'ЯЗОК
Харків *1932* *Київ*

CЛ

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літопису Укр. Друку“, „Картковому реперт.“ та інших покажчиках Укр. Книжк. Палати.

Друкарня Об'єднання науково-технічних видавництв України, Київ, вул. Воровського 42

Київ. Міськліт № 2261. Зам. № 758. Тираж 2000—9¼ арк.

ПЕРЕДМОВА

Складаючи цей курс, в основу якому покладено лекції, що їх читав Н. І. Ахієзер на механічному факультеті Київського політехнічного інституту, а потім на авіяційному відділі Київського машинобудівного інституту, ми мали на увазі подати основні відомості з аеродинаміки, потрібні студентові для аеродинамічного розрахунку літака й для вивчення спеціяльних праць з аеродинаміки.

Цим пояснюється і добір матеріялу, і характер викладу окремих розділів. Подавши, як нам здається, досить повно основні відомості з клясичної гідродинаміки, теорію крила в плоско-рівнобіжному потокові та вихрову теорію моноплянного крила, ми вважали за можливе, викладаючи Karman'ову теорію й теорію розривних течій, обмежитись на основних поняттях, зазначивши остаточні наслідки цих теорій.

За первісним пляном ми гадали вмістити в цій книжці вихрову теорію пропелера та теорію аеродинамічного розрахунку поліплянної коробки. Проте, через систематичний виклад вихрової теорії пропелера дуже збільшилася б сама книжка й до того ж це затримало б вихід її в світ. Щождо поліплянів, то ті наближені способи розраховувати їх, що їх застосовують тепер і що їх можна знайти в працях аеродинамічних інститутів[1], здаються нам з багатьох поглядів за незадовільні.

Удосконаленню цих метод і викладанню теорії пропелера ми гадаємо присвятити дві окремі монографії.

Щодо розподілу роботи, то перші чотири розділи та додатки написав Н. І. Ахієзер, п'ятий розділ В. І. Путята, а шостий розділ обидва автори разом.

За старанно виконані рисунки дякуємо Г. І. Церерiну.

10. III. 1931.

Автори

В той час коли цю книжку було закінчено, в Москві відбулася І Всесоюзна конференція з аеродинаміки, на якій між іншим було ухвалено прийняти єдину (відмінну від до того вживаної в СРСР) систему позначень для основних величин.

На великий жаль, остаточних матеріялів ще не опубліковано, а тому в цій книзі вживається стара система позначень.

2. IX. 1931.

Автори

[1] Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 2 Lieferung, 1923 (*I. Prandtl*, Der induzierte Widerstand von Mehrdeckern). *Б. Н. Юрьев*, „Индуктивное сопротивление крыльев аэроплана" (Праці ЦАГІ, вип. 20, 1926).

ВСТУП

На кожне тверде тіло, що рухається в повітрі чи іншому якому течному середовищі, впливають певні сили опору від цього середовища; ці сили й дають змогу літати на тяжких машинах.

Через те, що ці сили залежать від розміру та форми рухомого тіла, то, конструюючи літак, треба надавати частинам літака такої форми й розміру, щоб величина й розподіл сил опору були найвигідніші. Наука аеродинаміка, що зросла на базі загальної науки про рух течива (гідродинаміка), і ставить перед собою одно з основних завдань — вивчати сили, що впливають на вживані в авіяції тіла, коли вони рухаються в повітрі.

В аеродинаміці широко користуються наслідками численних спостережень над явищами, що бувають під час літання. Ці спостереження дають числовий матеріял, потрібний у різних розрахунках.

Збиранням такого числового матеріялу та обробленням його в СРСР на першому місці стоїть ЦАГІ у Москві, що його заснував проф. М. Є. Жуковський; це один із найбільших у світі аеродинамічних інститутів.

РОЗДІЛ І

НАЙПОТРІБНІШІ ВІДОМОСТІ З ГІДРОДИНАМІКИ

§ 1. Основні поняття

Розгляньмо якийнебудь повний рухомого течива простір з певною прямокутньою системою координат і візьмімо в ньому якунебудь точку M з координатами x, y, z. Стежмо за частками течива, що проходять через точку M. Позначмо через $\mathfrak{v}$ вектор-швидкість частки течива, що в момент t є в точці M, і назвімо u, v, w проєкції вектора $\mathfrak{v}$ на координатні осі. Величини u, v, w — це якісь функції від незалежних змінних x, y, z, t, бо в даному місці простору швидкість течної частки, що проходить через нього, міняється, загалом кажучи, з часом, тоді як у даний момент у різних точках простору швидкість течних часток різна.

Припустімо, що для якоїнебудь течії пощастило визначити величини u, v, w у функції від незалежних змінних. Постає питання, як знайти траєкторії окремих часток течива. Щоб відповісти на це питання, візьмімо якийсь елемент течива. Для нього незалежною змінною буде тільки t, бо положення елемента, тобто координати його x, y, z будуть певними функціями від t. Величини $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ є проєкції на осі координат швидкости цієї частки в момент t. А що в момент t взята частка течива має координати x, y, z, то подані раніш похідні мають відповідно дорівнювати величинам u, v, w.

Ми маємо отже рівняння:

$$\frac{dx}{dt}=u, \quad \frac{dy}{dt}=v, \quad \frac{dz}{dt}=w. \tag{1}$$

Коли, як ми раніш припустили, розподіл швидкостей у просторі відомий для кожного моменту, то праві частини рівнянь (1) є відомі функції від x, y, z, t. Тоді, інтегруючи систему (1), матимемо:

$$x=\varphi(t, a, b, c), \; y=\psi(t, a, b, c), \; z=\chi(t, a, b, c). \tag{2}$$

Це й будуть рівняння траєкторій окремих часток, при чому a, b, c є довільні сталі, що їх для кожної окремої частки знаходять із початкових умов, тобто з початкового положення частки.

Приклад. Хай розподіл швидкости дається формулами:

$$u=\frac{tx-y}{t^2+1}; \; v=\frac{x+ty}{t^2+1}; \; w=-\frac{2tz}{t^2+1}.$$

Щоб визначити траєкторії, маємо систему рівнянь:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{tx-y}{t^2+1}, \; \frac{dy}{dt}=\frac{x+ty}{t^2+1}, \; \frac{dz}{dt}=-\frac{2tz}{t^2+1}.$$

З останнього рівняння видно, що $z = \frac{c}{1+t^2}$, а перші два рівняння дають:[1]

$$x = a - bt, \quad y = b + at.$$

Ми помічаємо, що сталі інтеґрування a, b, c — це в даному разі просто координати рухомої точки в початковий момент $t = 0$.

Ці величини часто позначають через x_0, y_0, z_0.

Візьмімо якусь функцію $f(x, y, z, t)$ від змінних x, y, z, t.

Якщо нас цікавить, як для даної точки простору ця функція міняється з часом, то ми повинні вважати x, y, z у ній за сталі, звертаючи увагу на її залежність тільки від четвертого арґумента. Тоді похідну від цієї функції по t позначають через $\frac{\partial f}{\partial t}$ і називають льокальною похідною. Проте, може трапитись, що функція $f(x, y, z, t)$ виявляє якусь властивість рухомої частки. Тоді ми повинні мати на увазі, що x, y, z певним способом залежать від t і міняються, коли точка описує траєкторію. Подивімось, як визначити похідну від нашої функції по t в цьому припущенні. Її ми позначатимемо через $\frac{df}{dt}$ і називатимемо індивідуальною похідною. Даймо величині t приріст Δt. Тоді x, y, z матимуть прирости Δx, Δy, Δz. Ці прирости відповідають рухові точки по траєкторії, а тому

$$\Delta x = u \,.\, \Delta t, \ \Delta y = v \,.\, \Delta t, \ \Delta z = w \,.\, \Delta t.$$

Приріст функції буде такий:

$$\Delta f = f(x + u\Delta t, \ y + v\Delta t, \ z + w\Delta t, \ t + \Delta t) - f(x, y, z, t).$$

За Taylor'овою теоремою його можна подати так:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial f}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial f}{\partial z} w\Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \ldots,$$

де в пропущених членах Δt зустрічається тільки у вищих степенях.

Звідси для індивідуальної похідної маємо вираз:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w.$$

Як приклад, знайдімо проєкції на координатні осі пришвидшення течної частки. Для цього треба знайти похідні від величин u, v, w по t. Визначаючи пришвидшення частки, ми стежимо за зміною у швидкості частки, коли вона переміщається по траєкторії, тому похідні треба взяти індивідуальні. Отож, позначаючи проєкції пришвидшення через j_x, j_y, j_z, побачимо, що

$$j_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w,$$

$$j_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w,$$

$$j_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w.$$

§ 2. Рівняння нестисливости (нерозривности)

Мало не в усіх питаннях з аеродинаміки повітря можна вважати за нестисливе течиво, тож, значить, уважати, що густина його є стала величина[2]. Позначають її звичайно через ρ.

---

[1] У цьому можна переконатися простою перевіркою.

[2] Тільки при швидкостях, близьких до швидкости звуку, треба вважати на стисливість повітря. З такими швидкостями доводиться мати діло, наприклад, у балістиці й у теорії парових турбін.

Візьмімо в течиві прямокутній рівнобіжностінник (паралелепіпед) з рівнобіжними з осями координат ребрами δx, δy, δz.

На підставі сказаного маса течива, що заповнює цей рівнобіжностінник, повинна бути стала за ввесь час руху, що призводить до певного співвідношення між компонентами u, v, w швидкости $\mathfrak{v}$. Щоб мати це співвідношення, так зване рівняння нестисливости, обчислімо масу течива, що входить у наш рівнобіжностінник через кожну з його стінок за час Δt, і напишім, що сума цих мас дорівнює нулеві. Легко бачити, що через площинку $ABCD$ за час Δt входить маса

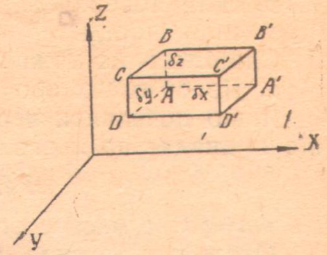

Рис. 1.

$$\rho u \delta y . \delta z . \Delta t,$$

де через u позначено швидкість по осі x-ів у точці A (варто було б узяти замість швидкости в точці A пересічну швидкість на площинці $ABCD$, але це при безконечно малих розмірах не має значення). Так само через площину $A'B'C'D'$ входить маса

$$-\rho\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\delta y . \delta z . \Delta t,$$

бо швидкість u в точці A' дорівнює за формулою приростів

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x,$$

а знак мінус відповідає тому фактові, що при додатному u, а значить, при додатному u_1, через площинку $A'B'C'D'$ течиво фактично не входить, а виходить.

Так, через дві такі площинки входить кількість

$$-\rho\frac{\partial u}{\partial x}\delta x . \delta y . \delta z . \Delta t.$$

Роблячи це саме з рештою площинок і беручи на увагу сказане раніш, ми маємо рівняння нестисливости в формі [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (3)$$

Зауважмо, що в багатьох питаннях математики й теоретичної фізики трапляється такий вираз:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (4)$$

де A_x, A_y, A_z є проекції на координатні осі якогось (залежного від координат) вектора $\mathfrak{A}$. Ліва частина рівняння (3) теж є окремий випадок виразу (4), а саме ми одержимо її при $\mathfrak{A}=\mathfrak{v}$.

У зв'язку з гідродинамічним сенсом лівої частини рівняння (3) вираз (4) має назву — розходження або дивергенції вектора $\mathfrak{A}$. При цьому стало загальновживаним позначення виразу (4) символом $\operatorname{div}\mathfrak{A}$.

Отже, умову нестисливости можна подати так:

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}=0.$$

[1] Це рівняння належить Euler'ові, і звуть його рівняння нестисливости в Euler'овій формі.

§ 3. Про сили, що чинять на виділений у течиві елемент об'єму

Ці сили можна поділити на три категорії:

1) сили об'ємні або масові,
2) сили поверхневі,
3) сили інерції.

Спинімось на кожній із цих категорій окремо.

1. До об'ємних або масових сил належить, приміром, сила ваги.

Якщо позначити через $d\tau = dx.dy.dz$ елемент об'єму течива, то силу, що припадає на нього, можна подати так:

$$Fdm = F\rho d\tau \qquad (Xdm,\ Ydm,\ Zdm),$$

де $dm = \rho d\tau$ є маса розгляданого елементу.

Отож F є та сила, що припадає на одиницю маси, а X, Y, Z — проєкції цієї сили на осі.

В аеродинаміці звичайно нехтують вагою повітря і взагалі масовими силами, бо вони нікчемні, як порівняти їх з вагою літального апарату та його частин та з силами інших категорій.

2. Щоб мати уявлення про поверхневі сили, припустімо, що ми виділили якийсь об'єм течива й спустили решту течива.

Рис. 2.

Спочатку течиво було в певному стані, що, очевидно, зміниться, коли спустимо течиво, що було поза виділеним об'ємом. Щоб не дати змінитись первісному станові, варто було б по поверхні об'єму розподілити якісь сили, що всі разом давали б той самий ефект, як і спущене течиво. Ці сили й звуть поверхневі.

Поверхнева сила, що припадає на якунебудь площину, пропорційна до величини цієї площинки і, взагалі кажучи, залежить від її орієнтування. Як і кожну силу, поверхневу силу $П$ можна розкласти на дві складові: N — нормальну до площинки й T — танґенціяльну до неї.

Далі ми вважатимемо на танґенціяльну силу T, а покищо нехтуватимемо нею, вважаючи, що поверхнева сила завжди нормальна до площинки. Нехтуючи величиною T, ми мовчки приймаємо, що в течиві цілком можливі ковзання одного шару по іншому, тобто, що в течиві немає внутрішнього тертя, або в'язкости. Таке течиво звуть ідеальним. Хоч його в природі й не буває (так само, як і абсолютно твердого тіла), проте ввести й вивчати його корисно, бо це призводить здебільшого до першого наближення в дослідженні реальних процесів.

Отже з поверхневих сил залишається тільки нормальна сила. Через властивість течива вона завжди спрямована до середини об'єму. Величину її, що припадає на одиницю площі, звуть тиск. Основний факт — це незалежність тиску від орієнтування елемента.

Тиск — це якась скалярна величина, що залежить від x, y, z і від t. Її позначають звичайно через p.

3. Перейдімо до сил інерції. Тому що пришвидшення точки має проєкції $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, то для елемента $dm = \rho d\tau$ з центром у цій точці сила інерції має проєкції

$$-\rho\frac{du}{dt}d\tau, \quad -\rho\frac{dv}{dt}d\tau, \quad -\rho\frac{dw}{dt}d\tau.$$

§ 4. Рівняння руху ідеального течива

Ці рівняння можна знайти, дорівнявши нулеві за d'Alembert'овим принципом суму всіх сил, що чинять на виділений у течиві об'єм у напрямі кожної з координатних осей. Щоб було простіше, припустімо, що виділений елемент об'єму є безконечно малий прямокутній рівнобіжностінник, поданий на рис. 1. Випишімо всі сили, що чинять на цей елемент у напрямі осі X-ів.

1. Об'ємна сила: $\rho X \delta x . \delta y . \delta z$.
2. Поверхнева сила (тиск)
   на площину $ABCD$: $p\, \delta y . \delta z$,
   на площину $A'B'C'D'$: $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x\right) \delta y . \delta z$.
3. Сила інерції: $-\rho \frac{du}{dt} \delta x . \delta y . \delta z$.

Склавши це все й спростивши, маємо перше рівняння (що відповідає осі X-ів):

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{du}{dt} = 0.$$

Так само матимемо й два рівняння для осі Y-ів та Z-ів.

Нехтуючи, як було сказано раніш, величинами X, Y, Z, можемо на підставі § 1 написати основні рівняння аеродинаміки так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ці рівняння вперше подав Euler і їх звуть його іменем.

З математичного погляду завдання вивчити рух течива полягає в тому щоб знайти чотири функції u, v, w, p. Для цього ми маємо чотири диференційні рівняння (3), (5), що їх повинні справджувати шукані функції в середині рухомого течива. З курсу математики відомо, що, коли інтегрувати диференційні рівняння, завжди постають довільні елементи, а саме довільні константи, або довільні функції. Тому, крім рівнянь (3), (5), треба мати ще певні умови, так звані початкові умови (що стосуються до початку руху) та граничні умови (що стосуються до вільної поверхні або поверхні, де течиво стикається з твердими тілами), за допомогою яких можна визначити згадані довільні елементи.

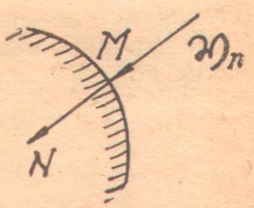

Рис. 3.

§ 5. Граничні та початкові умови

Припустімо, що в рухомому течиві є тверде тіло. Швидкість якоїнебудь точки цього тіла в будь-який момент можна розкласти в трьох взаємно-нормальних напрямах; за них ми беремо нормалю до поверхні тіла й два нормальні (сторчові) напрями в дотичній площині. В тих самих напрямах можна розкласти швидкість частки течива, що в даний момент є коло вибраної точки M поверхні тіла (рис. 3). Тому, що в ідеальному течиві ковзання течива по поверхні тіла можливе, танґенціяльні складові швидкості точки тіла й тої частки течива, що коло неї, можут бути різні. Проте, нормальні складові швидкості повинні бути однакові, бо течиво не може ні проходити в тіло, ні відставати від нього. Це і є основна гранична умова для ідеального течива.

Перейдімо тепер до другого питання, а саме до початкових умов. У багатьох завданнях, з якими нам доведеться обізнатись, ми обмежуватимемось вивченням так званих стаціонарних станів, тобто таких станів руху, коли швидкість, тиск та інші величини не залежать від часу t явно. Тут жадні початкові умови взагалі непстрібні.

Додаймо, що при стаціонарних течіях усі льокальні похідні по t дорівнюють нулеві; зокрема в рівняннях (5) треба відкинути члени

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}.$$

§ 6. Розкладання руху частки на найпростіші елементи

Візьмім якунебудь частку течива (течний елемент) з центром у точці P (x, y, z). Нехай P' якась точка цього елемента (рис. 4); позначмо її координати відносно точки P через δx, δy, δz. Складові швидкості точки P позначмо через u, v, w. Тоді складові швидкості точки P' у цей момент буде подано (в першому наближенні) такими формулами:

$$\begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z, \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z, \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z. \end{aligned} \tag{6}$$

Введімо позначення:

$$\alpha_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \alpha_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \alpha_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{7}$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \alpha_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \alpha_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{8}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{9}$$

Усі ці величини, так само як і u, v, w, для даного елемента течива є означені числа, бо вони залежать тільки від x, y, z, тобто від координат центру елемента.

Не трудно перевірити, що на підставі цих позначень рівняння (6) можна подати так:

$$\begin{aligned} u' &= u + (\eta\,\delta z - \zeta\,\delta y) + (\alpha_{11}\,\delta x + \alpha_{12}\,\delta y + \alpha_{13}\,\delta z), \\ v' &= v + (\zeta\,\delta x - \xi\,\delta z) + (\alpha_{21}\,\delta x + \alpha_{22}\,\delta y + \alpha_{23}\,\delta z) \\ w' &= w + (\xi\,\delta y - \eta\,\delta x) + (\alpha_{31}\,\delta x + \alpha_{32}\,\delta y + \alpha_{33}\,\delta z). \end{aligned} \tag{10}$$

Із (10) виходить, що рух течної частки в будь-який момент складається з трьох частин.

Насамперед, з поступного руху елемента, як цілого, із швидкостями u, v, w.

Потім, з обертового руху елемента, як цілого, навколо якоїсь миттьової осі, що проходить через точку P, з кутовою швидкістю ω, яка має, як складові по осях, відповідно: ξ (кутова швидкість обертання навколо осі X-ів), η (навколо осі Y-ів), ζ (навколо осі Z-ів).

Щоб у цьому переконатись, проведім через точку P осі рівнобіжні з осями координат. Відносно цих осей координати точки P' є числа δx, δy, δz.

Припустім, що цей елемент обертається із швидкістю ξ навколо осі X. Обчислімо проекції лінійної швидкости точки P^1 на осі.

Легко бачити, що проекції матимуть такі величини:

на вісь X-ів 0,

на вісь Y-ів $-\xi\,\delta z$,

на вісь Z-ів $-\xi\,\delta y$.

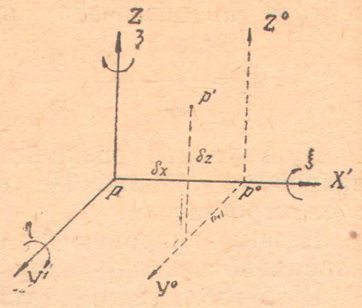

Рис. 4.

Щоб перевірити, досить розглянути нормальну до осі X-ів площину, що проходить через P' (рис. 5), Ми бачимо, що числова величина лінійної швидкости точки P' дорівнює $\xi\sqrt{(\delta z)^2+(\delta y)^2}$, а щоб знайти проекцію її на вісь Y-ів, треба цю величину помножити на $-\cos\alpha = -\dfrac{\delta z}{\sqrt{(\delta z)^2+(\delta y)^2}}$; так само, щоб знайти проекцію на вісь Z-ів, треба помножити величину швидкости на $\sin\alpha = \dfrac{\delta y}{\sqrt{(\delta z)^2+(\delta y)^2}}$.

Отож, так роблячи з величинами η та ζ і складаючи, побачимо, що другі члени формули справді відповідають зазначеному раніш обертанню елемента.

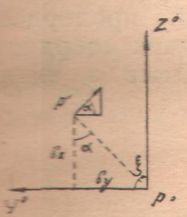

Рис. 5.

Як відомо з механіки, величина цієї кутової швидкости обертання елемента дорівнює

$$\omega = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

а саме обертання краще розглядати, як вектор, що спрямований по осі обертання й має величину ω. Цей вектор ми позначимо через $\overline{\omega}$.

Останньою частиною, з якої складається рух частки, є рух, що його можна подати в такій формі: розгляньмо поверхню другого порядку (в координатах δx, δy, δz)

$$\frac{1}{2}\alpha_{11}(\delta x)^2+\frac{1}{2}\alpha_{22}(\delta y)^2+\frac{1}{2}\alpha_{33}(\delta z)^2+$$

$$+\alpha_{12}\,\delta x\,.\,\delta y+\alpha_{13}\,\delta x\,.\,\delta z+\alpha_{23}\,\delta y\,.\,\delta z=\mathrm{const} \qquad (11)$$

Ми бачимо, що треті члени формул (10) є похідні від лівої частини рівняння (11) відповідно по δx, δy, δz, тобто по координатах; пам'ятаючи, що похідні від лівої частини рівняння поверхні по координатах пропорційні до косинусів кутів, які нормаля до поверхні утворює з координатними осями, і вибираючи в (11) const так, щоб поверхня (11) проходила через точку P^1, робимо висновок, що третім членам відповідає такий рух, коли кожна точка рухається по нормалі до якоїсь поверхні; цей рух спричиняє деформацію елемента.

§ 7. Вихри, вихрові лінії

В попередньому параграфі ми бачили, що в будь-якій точці течива є якесь певне величиною й напрямом (і, взагалі кажучи, відмінне від нуля) обертання. Це обертання характеризує якийсь вектор $\overline{\omega}$, що залежить від розподілу швидкостей. Його позначають так:

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{v}$$

(читається керль $\mathfrak{v}$).

Подвоєний вектор - обертання елемента течива, тобто curl $v=2\omega$ звуть вихор (по-англійському вихор — curl).

Поняття про вихор перенесено з гідродинаміки в інші математичні дисципліни, так що стало загальновживаним звати вектор $\mathfrak{B}$ вихром вектора $\mathfrak{A}$ і позначати його через $\mathfrak{B}=\text{curl}\,\mathfrak{A}$, якщо

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Щоб уявити розподіл вихрів у течиві, користуються так званими вихровими лініями. Це поняття аналогічне з поняттям про силові лінії з електростатики.

Назвімо вихровою лінією лінію, дотична до якої в кожній точці має напрям по вектору-вихру в цій точці.

Щоб наближено збудувати вихрову лінію, можна зробити так: узявши якунебудь точку, проводимо через неї в напрямі вихру невеликий відтинок, через його кінець проводимо новий відтинок в напрямі вихру, що є в цій другій точці, і т. д. (рис. 6).

Рис. 6.

Щоб вивести диференційне рівняння вихрових ліній, матимемо на увазі, що косинуси кутів дотичної до якоїсь лінії з осями пропорційні до диференціялів біжучих координат уздовж цієї лінії. Отже з визначення вихрової лінії матимемо таке їх рівняння:

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{\zeta}.$$

Введімо ще поняття про вихрову трубку. Так звуть поверхню, що утвориться, коли через усі точки якогось замкненого контуру провести вихрові лінії (для певного моменту часу).

§ 8. Лінії й трубки потоку

Щоб уявити собі розподіл швидкостей у течиві в якийсь момент, можна скористуватися з ліній і трубок потоку для цього моменту.

Лінією потоку (течії) звуть лінію, дотична до якої в будь-якій точці її йде в напрямі вектора-швидкости в цій точці для цього моменту.

Рівняння ліній потоку такі:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}. \tag{12}$$

Зауважмо, що рівняння (1) траєкторій течних часток можна подати так:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt. \tag{1}$$

Підкреслімо різницю між системою рівнянь (12) і системою (1).

Якщо течія нестаціонарна, тобто u, v, w залежать явно від t, то при інтеґруванні системи (12) t треба вважати за сталу. На кожний момент ми матимемо свою систему ліній течії. У рівняннях же (1) t є не стала, а незалежна змінна, у функції якої треба знайти x, y, z.

Додаймо, що для течії стаціонарної траєкторії будуть разом із тим і лініями потоку, що тут не залежать від часу.

§ 9. Рівняння в Lamb'овій формі

Основні рівнання аеродинаміки (5) можна легко звести до дуже корисної форми, що належить Lamb'ові (а також російському механікові Громеко).

Для цього введім вираз

$$\chi = \frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}. \tag{13}$$

Пам'ятаючи, що ρ є стала (на підставі нашого припущення) величина, перепишім перше з рівнянь (5) так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right).$$

Звідси на підставі (13) й (9) маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2(v\zeta - w\eta) = -\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Так само треба писати й останні два рівняння. Подаймо всі три Lamb'ові рівняння, припускаючи, що течія стаціонарна, бо далі вони нам будуть потрібні саме в цьому випадку:

$$2(v\zeta - w\eta) = \frac{\partial \chi}{\partial x},$$

$$2(w\xi - u\zeta) = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \tag{14}$$

$$2(u\eta - v\xi) = \frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

§ 10. Теорема D. Bernoulli

Розгляньмо стаціонарну течію й візьмім рівняння руху у формі (14).

Покажім, що вираз χ при цьому припущенні (про стаціонарність течії) має сталу вартість уздовж кожної лінії течії та кожної вихрової лінії.

При цьому стала вартість може мінятися з переходом від однієї лінії течії до іншої та з переходом від однієї вихрової лінії до іншої. У цьому й полягає теорема D. Bernoulli, яку він винайшов 1738 р. Досить довести теорему для лінії течії; для вихрових ліній довід цілком аналогічний.

Щоб довести сталість якоїсь функції вздовж якоїсь лінії, треба показати, що диференціял цієї функції, який відповідає переходові від однієї точки лінії до іншої, безконечно-близької до неї точки, дорівнює нулеві.

Позначаючи через dx, dy, dz прирости координат з переходом від однієї точки лінії течії до іншої її точки, на підставі рівнянь (12) для лінії течії матимемо:

$$dx = \lambda u, \; dy = \lambda v, \; dz = \lambda w,$$

де λ є спільна вартість відношень у формулі (12). Отже диференціял функції χ вздовж лінії течії можна подати так:

$$d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x}dx + \frac{\partial \chi}{\partial y}dy + \frac{\partial \chi}{\partial z}dz = \lambda\left\{\frac{\partial \chi}{\partial x}u + \frac{\partial \chi}{\partial y}v + \frac{\partial \chi}{\partial z}w\right\},$$

а цей вираз на підставі рівнянь (14) дорівнює:

$$d\lambda = 2\lambda\,\{(v\zeta - w\eta)\,u + (w\xi - u\zeta)\,v + (u\eta - v\xi)\,w\} = 0,$$

і теорему доведено.

Іноді трапляється, що вираз χ має сталу вартість для всього течива, а не тільки вздовж певних ліній.

Це буває, напр. тоді, коли в течиві немає вихрів.

Справді, коли $\xi = \eta = \zeta = 0$, то рівняння (14) набувають вигляду:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial z} = 0.$$

Це значить, що χ є стала величина. Отже, коли немає вихрів у стаціонарній течії, то для всього течива справедливе таке співвідношення:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = \text{const}. \qquad (15)$$

А що в рівнянні (15), справедливому для всього течива, немає похідних від невідомих функцій p, u, v, w, то воно є інтеграл рівнянь руху. Цей інтеґрал звуть інтеґрал D. Bernoulli. Він дуже багато важить, бо цим рівнянням установлюється залежність між швидкістю потоку в якійсь точці й тиском, що там існує.

Справді, величина $u^2 + v^2 + w^2$ дає квадрат швидкости частки. Величину швидкости ми позначатимемо через V; отже рівняння (15) можна подати так:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const} \qquad (15_1)$$

На теоремі Bernoulli основано виміряння швидкости літака приладом, що його звуть трубка Pitot.

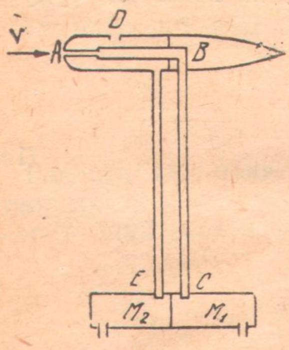

Рис. 7.

Трубка Pitot (рис. 7) — це тіло форми сиґари, що встановлюють у напрямі руху літака. Отвір A злучається з манометром M_1 трубкою ABC, яка в точці B зігнена під прямим кутом. Манометр M_1 показує, який тиск у точках B й A, де швидкість потоку очевидно дорівнює нулеві. З другого боку, манометр M_2 показує тиск у точці D, повз яку протікає повітря із швидкістю V, рівною із швидкістю літака й протилежною їй.

За теоремою Bernoulli (а простір поблизу трубки Pitot можна розглядати, як вузьку трубку течії) матимемо:

$$\frac{V_A{}^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} = \frac{V_D{}^2}{2} + \frac{p_D}{\rho} \quad \text{або} \quad \frac{p_1}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_2}{\rho},$$

де p_1 і p_2 — тиски, визначувані манометрами M_1 і M_2.

Отже для V маємо вираз

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}.$$

Додаймо, що в теорії авіяції часто трапляється вираз $\frac{\rho V^2}{2}$. Його прийнято звати швидкісний напір і позначати літерою q.

Подана далі таблиця допомагає обчислити цю величину для різних висот h над рівнем моря (цю таблицю взято з книжки R. Mises'а „Теорія авіяції").

Таблиця 1[1]

Швидкісний напір у кг/м² для різних швидкостей

Швидкість		Швидкісний напір на висоті h над рівнем моря, тобто при густині повітря ρ						
м/сек.	км/год.	$\rho = 0{,}128$ $h = 0$ м	0,115 1000 м	0,104 2000 м	0,093 3000 м	0.083 4000 м	0,074 5000 м	0,066 6000 м
0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	18	1,60	1,44	1,30	1,16	1,04	0,93	0,83
10	36	6,40	5,75	5,20	4,65	4,15	3,70	3,30
15	54	14,40	12,94	11,70	10,46	9,34	8,83	7,43
20	72	28,60	23,00	20,80	18,60	16,60	14,80	13,20
25	90	40,00	35,94	32,50	29,06	25,94	22,13	20,63
30	108	57,60	51,75	46,80	41,85	37,35	33,30	29,70
35	126	78,40	70,44	63,70	59,96	50,84	45,32	40,43
40	144	102,40	92,00	83,20	74,40	66,40	59,20	53,80
45	162	129,60	116,44	105,30	94,16	81,04	74,92	66,82
50	180	160,00	144,00	130,00	116,00	104,00	92,50	83,00
55	198	193,60	173,94	157,30	140,66	125,54	111,92	99,83
60	216	230,40	207,00	187,20	167,40	149.40	133,20	118,80
65	234	270,40	242,94	219,70	196,46	175,34	156,32	139,42
70	252	313,60	281,75	254,80	227,85	203,35	181,30	167.70

§ 11. Поняття про циркуляцію. Stokes'ова теорема

Введімо дуже важливе в дальшому поняття про циркуляцію по замкненому контурові. Хай дано замкнений контур C (рис. 8). Візьмім елемент цього контуру ds і помножмо його на проєкцію вектора швидкости v (в якійнебудь точці цього елемента) на дотичну до цього елемента (у вибраній точці). Добуток від цього можна подати так:

$$V . \cos \Theta . ds. \qquad (16)$$

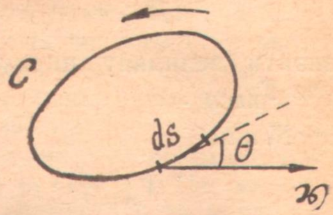

Рис. 8.

Циркуляцією по контурові C і звуть інтеграл від написаного виразу, взятий по контурові C, інакше кажучи, наслідок сумування виразу (16) по всіх елементах контуру. Позначаючи циркуляцію через Γ, маємо

$$\Gamma = \int_C V \cos \Theta \, ds = \oint V \cos \Theta \, ds \qquad (17)$$

де символом $\oint$ позначено інтеґрал, взятий по замкненому контурові.

Додаймо, що вирази (16) і (17) мають точно таку саму структуру, як і вираз роботи сили на елементі шляху ds (вираз 16) і по замкненому контурові (вираз 17).

[1] Висоти відповідають тискові 762 мм живосрібного стовпчика та 10° Ц коло землі, коли температура падає на 0,5° Ц на 100 м.

Якби v була сила, то роботу цієї сили, коли точка переміщається по контурові C, подав би інтеґрал (17).

Циркуляцію можна подати в такій формі:

$$\Gamma=\int_C(udx+vdy+wdz) \tag{17,}$$

що нагадує аналогічний вираз роботи сили, відомий із загального курсу механіки.

Покажім зв'язок між циркуляцією та вихрами. Для цього розгляньмо як контур C, безконечно малий прямокутник з боками δx і δy в площині XOY, поданий на рис. 9.

Величини u, v, w взажаймо за проекції швидкости для центру M у цьому прямокутнику. Позначмо через V_{AB}, V_{BC} проекції швидкости на AB, BC, при чому швидкість обчислятимемо для середини кожного з цих відтинків.

Легко бачити, що

$$V_{AB}=u-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2};\quad V_{CD}=-\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right);$$

$$V_{BC}=v+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2};\quad V_{DA}=-\left(v-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right).$$

Пояснімо, наприклад, першу формулу.

Для відтинка AB відмінну від нуля проекцію дасть тільки складова швидкости по осі X, яка проектується в натуральну величину. Щоб знайти складову швидкости по осі X для відтинка AB, звернімо увагу на те, що в середині відтинка AB та сама абсциса, що й у центрі прямокутника, а ординату матимемо, коли ординаті центру дати приріст $-\frac{\delta y}{2}$. Залишається скористуватись із теореми приростів, пам'ятаючи, що для відтинка AB вираз $V\cos\theta$ має той самий знак, що й $u_1=u-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2}$. З цих написаних для швидкостей виразів можна легко знайти величину циркуляції для контура $ABCD$, яку ми позначимо через Γ_{ABCD}.

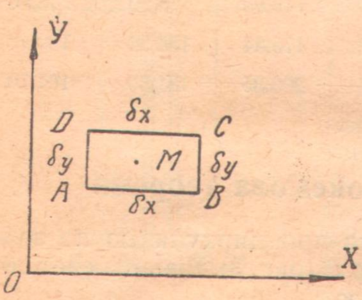

Рис. 9.

Маємо

$$\Gamma_{ABCD}=\left(u-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x+\left(v+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y-$$

$$-\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x-\left(v-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y=$$

$$=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta x.\delta y=2\zeta.\delta\sigma,$$

де ζ є проекція вихру на вісь Z (у центрі прямокутника), а $\delta\sigma$ — площа прямокутника.

Здогади, що лежать в основі цього міркування, приводять до загального наслідку, відомого під назвою Stokes'ової теореми.

Stokes'ову теорему доводять мало не по всіх курсах інтеґрального числення, бо встановлюване нею співвідношення має загальний, незалежний від понять гідродинаміки, характер.

Тому ми подаємо Stokes'ову теорему без доводів, пославши читача до прекрасного курсу Філіпса[1].

Припустімо, що контур C, безупинно стягаючи, можна звести в точку, не лишаючи разом із тим обсягу, занятого потоком. Уявімо собі, що контур C є межа якоїсь поверхні S, що вся лежить в обсягу, занятому потоком (рис. 10).

Тоді

$$\int_C \left(u dx + v dy + w dz \right) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(N, x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(N, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(N, z) \right] d\sigma, \tag{18}$$

де $d\sigma$ — елемент поверхні S, а N — нормаля до поверхні, спрямована так, що три прості:

MT — дотична до C в напрямі обходу контура,

Mn — нормаля до MTN, що йде всередину S,

MN — нормаля до S,

розміщені так, які осі OX, OY, OZ.

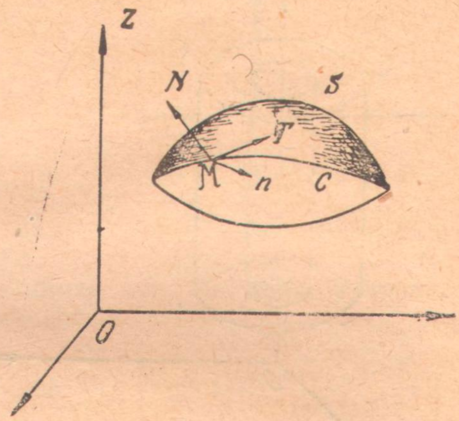

Рис. 10.

Спинімось трохи на формулі (18), що з математичного погляду зводить обчислення якогось криволінійного інтеґралу до знаходження якогось подвійного інтеґралу, і з'ясуймо гідродинамічний сенс членів, що входять у неї. Криволінійний інтеґрал, що в лівій частині,— це циркуляція по контурові C. Вираз праворуч складається з членів форми

$$\left[2\xi \cos(N, x) + 2\eta \cos(N, y) + 2\zeta \cos(N, z) \right] d\sigma,$$

які сумуються по поверхні, що спирається на контур C.

Легко бачити, що вираз у квадратових дужках є проєкція вектора-вихру на нормалю N до площинки $d\sigma$. Цей вираз множиться на величину площинки. Такий добуток часто трапляється в математичній фізиці; звуть його потік вектора (тут вектора-вихра) через площинку. Звуть його так тому, що написаний вираз дає потік течива, який проходить через дану площинку за одиницю часу, коли величини 2ξ, 2η, 2ζ замінити відповідно величинами u, v, w.

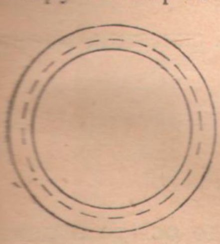

Рис. 11.

Отже права частина формули (18) є потік вектора-вихру через поверхню S, що спирається на контур C. Ми можемо таким чином зформулювати Stokes'ову теорему так:

Циркуляція по замкненому контурові дорівнює потокові вектора-вихру через поверхню, що спирається на цей контур.

При цьому припущено, що контур можна стягнути в точку, не залишаючи течива, а поверхня лежить уся в обсягу, занятому течивом.

Звернімо увагу, що ці умови в кожному разі виконуються тоді, коли обсяг, занятий потоком, односпійний.

Як на приклад неодноспійного обсягу, покажемо на обсяг у середині тора (кільця). Тут уже не можна стягнути в точку позначений крапчаком контур (рис. 11), що лежить у середині обсягу.

[1] *Філіпс*, „Интегральное исчисление", переклад з додатками проф. В. Ф. Кагана, 1927, стор. 175—181.

Із Stokes'ової теореми виходить між іншим такий результат: якщ в односпійному обсягу вихрів немає, то по будь-якому замкненому ко турові, що лежить у середині цього обсягу, циркуляція дорівнює нулев

Справді, як немає вихрів: $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ і, значить, дорівнює нулев права частина формули (18).

Для неодноспійних обсягів вихрів може не бути, а циркуляція прот може бути відмінна від нуля.

Роз'яснімо це на течії між двома сувісними циліндрами (рис. 12) (це простір є двоспійний обсяг). Спрямуймо вісь OZ по осі циліндрів і роз гляньмо течію, що визначається формулами

$$u=-c\frac{y}{r^2},\quad v=c\frac{x}{r^2},\quad w=0,\quad r^2=x^2+y^2,\quad (c=\text{const})$$

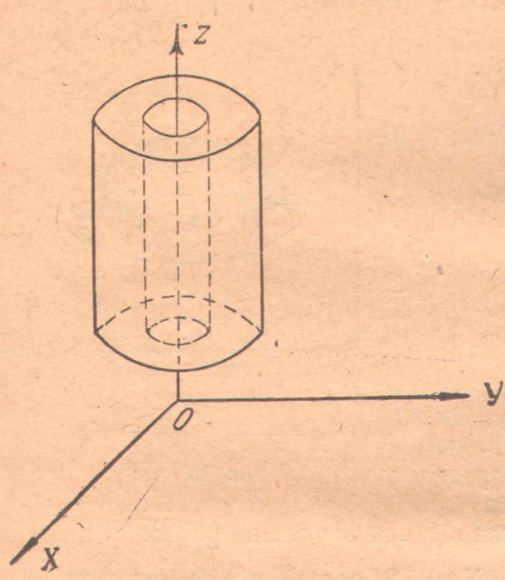

Рис. 12.

Покажмо, що ці рівняння визначають якусь течію між циліндрами.

Легко бачити, що рівняння нерозривности справджується, бо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2cyx}{r^4},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2cyx}{r^4}.$$

Граничні умови справджуються теж. Це буде ясно, коли ми покажемо, що в цій течії кожна частка течива рухається по обводові кола, нормального до осі та з центром на ній. Справді, звідси виходить, що частка, яка лежить коло поверхні одного з циліндрів, має тільки танґенціяльну швидкість.

Отже покажімо, що траєкторіями часток є згадані обводи.

Щоб визначити траєкторії, маємо рівняння:

$$\frac{dx}{dt}=-c\frac{y}{r^2},\quad \frac{dy}{dt}=c\frac{x}{r^2},\quad \frac{dz}{dt}=0,$$

звідки, помноживши перше рівняння на x, а друге на y і склавши, маємо, що

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0;\quad \frac{dz}{dt}=0,$$

отже

$$x^2+y^2=\text{const},\quad z=\text{const},$$

а ці рівняння визначають справді обводи кіл, нормальних до осі та з центрами на ній.

Нарешті, зауважмо, що в середині течива вихрів немає, бо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{c}{r^2}+\frac{2cy^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{c}{r^2}-\frac{2cx^2}{r^4}$$

і, значить,

$$-2\zeta=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2c}{r^2}+\frac{2c(x^2+y^2)}{r^4}=0$$

ζ і η теж дорівнюють нулеві.

Отже подані раніш формули справді визначають течію в досліджуваному двоспійному обсязі.

Обчислімо тепер для досліджуваної течії циркуляцію по замкненому контурові, що оточує вісь Z.

За визначенням циркуляції маємо:

$$\Gamma = \oint (udx + vdy) = c \oint \frac{xdy - ydx}{r^2}.$$

Щоб знайти цей інтеґрал, введімо полярні координати (рис. 13), покладаючи

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

маємо

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

і, значить,

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

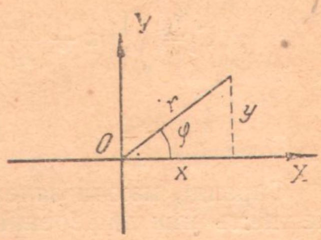

Рис. 13.

Отже наш інтеґрал матиме форму:

$$\Gamma = c \oint \frac{x^2 d\varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} = c \oint d\varphi.$$

Щоб мати замкнений контур, що обіймає вісь Z, треба змінювати φ від 0 до 2π. Таким чином ми матимемо, що

$$\Gamma = c \int_0^{2\pi} d\varphi = c \cdot 2\pi.$$

Отже, не зважаючи на те, що вихрів немає, циркуляція відмінна від нуля. Це пояснюється тим, що вибраний контур не можна стягнути в точку, не залишивши течива, через двоспійність обсягу, занятого потоком.

Тут двоспійність викликається тим, що є внутрішня циліндрична поверхня, яку можна вважати за межу зануреного в циліндричну посудину суцільного циліндричного стрижня.

§ 12. Thomson'ова теорема

Розгляньмо в якийсь момент t замкнений контур c, що лежить у середині течива; циркуляція по цьому контурові дорівнює:

$$\Gamma = \int_c (udx + vdy + wdz).$$

Звернімо увагу на частки течива, що лежать на контурі c у вибраний момент t.

Ці частки через якийсь відтинок часу δt матимуть нове положення. Позначмо через c_1 той контур, на якому в момент $t + \delta t$ вони лежатимуть. Нехай Γ_1 є циркуляція по контурові c_1 у момент $t + \delta t$, так що

$$\Gamma_1 = \int_{c_1} (u_1 dx_1 + v_1 dy_1 + w_1 dz_1).$$

Thomson'ова теорема встановлює, що з нашими припущеннями про те, що немає масових сил та в'язкости і що величина ρ стала, циркуляція Γ_1 дорівнюватиме циркуляції Γ; іншими словами циркуляція по течному контурові (тобто по контурові, що утворюють його ті самі частки течива) залишається стала на ввесь час руху.

Щоб довести Thomson'ову теорему, треба показати, що похідна по[...] від циркуляції по течному контурові дорівнює нулеві.

Для цього вважатимемо x_1, y_1, z_1 за координати тієї точки контура, куди переходить частка, що в момент t мала координати x, y, z.

Легко бачити, що

$$x_1=x+u\delta t,\ y_1=y+vdt,\ z_1=z+wdt,$$

так само

$$u_1=u+\frac{du}{dt}\delta t,\quad v_1=v+\frac{dv}{dt}\delta t,\quad w_1=w+\frac{dw}{dt}\delta t.$$

Ці формули дозволяють подати Γ_1 у формі

$$\Gamma_1=\int_c\left\{\left(u+\frac{du}{dt}\delta t\right)(dx+du\delta t)+\left(v+\frac{dv}{dt}\delta t\right)(dy+dv\delta t)+\right.$$
$$\left.+\left(w+\frac{dw}{dt}\delta t\right)(dz+dw\delta t)\right\}.$$

Справді, маючи залежність між x, y, z та x_1, y, z_1, ми матимемо з[...] лежність між диференціялами цих величин у формі

$$dx_1=dx+du\,.\,\delta t,\ \ dy_1=dy+dv\,.\,dt,\ \ dz_1=dz+du\,.\,dt.$$

І щоб точка (x_1, y_1, z_1) описала контур c_1, досить, щоб точка $(x, y, [...]$ описала старий контур c. Отже, можна сказати, що подавши Γ_1 у нов[...] формі, ми в цьому інтеґралі замінили змінні.

Розкладімо тепер вираз Γ_1 по степенях величини δt і обмежмо[...] членами нулевого й першого порядку щодо δt.

По простих перетвореннях маємо:

$$\Gamma_1=\Gamma+\delta t\int_c\left(\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz\right)+\delta t\int_c(udu+vdv+wdw)+(\ldots)(\delta t)^2.$$

Зауважмо тепер, що

$$udu+vdv+wdw=\frac{1}{2}d(u^2+v^2+w^2)=\frac{1}{2}d(V^2).$$

Тому інтеґрал $\int(udu+vdv+wdw)$ є приріст, що його набуває функці[...] $\frac{1}{2}V^2$ після обходу по контурові c. Через замкненість контура та одно[...] значність функції V ми прийдемо після обходу до початкової вартост[...] функції. Отже третій член правої частини дорівнює нулеві.

На підставі рівнянь (5) другий член правої частини можна подат[...] у формі:

$$-\delta t\int_c\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=-\frac{\delta t}{\rho}\int_c dp,$$

а це дорівнює нулеві на підставі тих самих міркувань про замкнутість контура.

Отже

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta t}=\frac{\Gamma_1-\Gamma}{\delta t}=(\ldots)(\delta t),$$

і наближаючи δt до нуля, ми матимемо

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\Gamma}{\delta t}=\frac{d\Gamma}{dt}=0,$$

і Thomson'ову теорему доведено.

§ 13. Helmholtz'ові теореми про вихри

Доведеною в попередньому параграфі Thomson'овою теоремою можна виявити деякі властивості вихрів в ідеальних течивах, властивості, що в реальних течивах вихри мають їх тільки наближено.

Ці властивості винайшов Helmholtz і формулюють їх у формі так званих Helmholtz'ових теорем про вихри.

Т е о р е м а 1. Потік вектора-вихру через будь-який перекрій вихрової трубки є величина стала для трубки.

На підставі Stokes'ової теореми досить показати, що циркуляція по замкненому контурові, який лежить на поверхні вихрової трубки й обіймає її один раз, є величина стала й не залежить від того, де та як вибрано цей контур на трубці.

Рис. 14.

Візьмімо два контури (рис. 14) й позначмо належні їм циркуляції через Γ_C і Γ_C'. Виберемо тепер на кожному з контурів по дві безконечно близькі точки: α, β на контурі C і α', β' на контурі C' і злучімо точки α, α', а також β, β' двома безконечно-близькими лініями $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, що лежать на поверхні вихрової трубки.

Цією побудовою ми приходимо до якогось нового контура $\beta\gamma\alpha\alpha'\gamma'\beta'\beta$; його можна стягнути в точку, не сходячи з поверхні вихрової трубки.

Стрілкою позначено напрям обходу цього контура.

На побудований контур спирається частина поверхні вихрової трубки. Застосуймо до цієї частини поверхні Stokes'ову теорему. Помічаючи, що в кожній точці поверхні напрям вихру утворює прямий кут з нормалею до поверхні (бо вихрову поверхню утворюють вихрові лінії), маємо, що потік вихру через цю поверхню дорівнює нулеві.

Складаючи цю циркуляцію відповідно до частин контура, одержимо:

$$\int\limits_{\beta\gamma\alpha} V\cos\Theta\, ds + \int\limits_{\alpha\alpha'} V\cos\Theta\, ds + \int\limits_{\alpha'\gamma'\beta'} V\cos\Theta\, ds + \int\limits_{\beta'\beta} V\cos\Theta\, ds = 0.$$

Наближаймо тепер лінію $\beta'\beta$ до лінії $\alpha'\alpha$. Тоді другий і четвертий інтеґрали правої частини в сумі прямують до нуля, бо їх у границі беруть по тій самій лінії в протилежних напрямах.

Перший член дасть у границі:

$$\int\limits_{\beta\gamma\alpha\beta} V\cos\Theta\, ds = \Gamma_C;$$

а другий дасть:

$$\int\limits_{\alpha'\gamma'\beta'\alpha'} V\cos\Theta\, ds = -\Gamma_C',$$

бо тут обхід контура йде в зворотному напрямі.

Отже маємо, що $\Gamma_C - \Gamma_C' = 0$, тобто $\Gamma_C = \Gamma_{C'}$, звідки й випливає теорема 1.

З теореми 1 виходить, що вихрові лінії не можуть починатись або кінчатись у середині течива.

Вони мусять або бути замкнені, або йти в безконечність або, нарешті, кінчатись на межі течної маси, тобто коло вільної поверхні течива, чи коло поверхні твердих тіл. Сталу для трубки величину, однакову з потоком вихру через якийнебудь її перекрій, звуть інтенсивністю вихрової трубки.

Т е о р е м а 2. Частки течива, що в якийнебудь момент лежать на вихровій лінії, за ввесь час руху лежатимуть на вихровій лінії.

Насамперед пояснімо цю теорему. Візьмімо в момент t вихрову лінію PQ, що проходить через якусь точку P. Через час Δt, тобто в момент

$t' = t + \Delta t$ точка P займе положення P', а решта часток, що перше були на лінії PQ, розташуються на якійсь лінії $P'Q'$. Теорема 2 доводить, що $P'Q'$ — це вихрова лінія, що проходить через точку P' для моменту t'. Отож теорема 2 встановлює, що вихрові лінії — це „матеріяльні лінії". Часто теорему 2 формулюють, кажучи, що вихрові лінії в рухові зберігаються.

Тому, що вихрову лінію можна розглядати, як перетин двох вихрових поверхень, то досить довести, що в рухові зберігаються вихрові трубки.

Отже, візьмімо в момент t безконечно тонку вихрову трубку, що проходить через якийсь контур C (рис. 15). У момент t' частки течива, що були на поверхні R, лежатимуть на якійсь поверхні R', що проходить через контур C', який буде новим положенням контура C.

За Thomson'овою теоремою циркуляція по контурові C в момент t дорівнюватиме циркуляції по контурові C' у момент t': значить, у момент t' контур C' обійматиме вихрові лінії. Вибираючи замість C інший контур, що обіймає трубку R, побачимо, що будь-який контур, який обіймає трубку R', оточуватиме вихрові лінії.

Тому, що це справедливо, хоч яка б тонка була трубка R, то в точках, що лежать на поверхні R', вектор-вихор буде відмінний від нуля.

Ми хочемо довести, що R' є вихрова трубка. Для цього досить показати, що, як сказано раніш, вихор у точках поверхні R' іде в усіх точках цієї поверхні вздовж по ній.

А для цього досить довести, що потік вихру через будь-яку частину бічної поверхні трубки R' дорівнює нулеві.

Це ж можна довести так. Візьмімо на R' якусь частину поверхні, обмежену контуром δ', що не обіймає R'. Нехай через цю частину поверхні потік вихру не дорівнює нулеві. Тоді по контурові δ' циркуляція не дорівнює нулеві. Значить, не дорівнює нулеві в момент t циркуляція по контурові δ, що в рухові перейшов в δ', але це неможливо, бо в момент t δ є контур, що лежить на поверхні вихрової трубки R і не обіймає її.

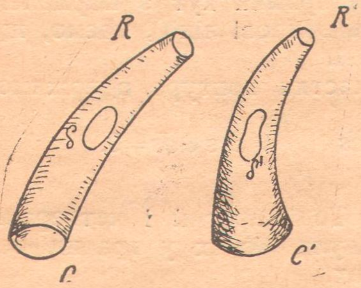

Рис. 15.

Отже теорему 2 доведено.

Нам залишається обізнатись із третьою та останньою теоремою.

Теорема 3. За ввесь час руху інтенсивність вихрової трубки стала.

Нехай R вихрова трубка, що проходить через C. R' — її нове положення, а C' нове положення контура C (рис. 15).

Циркуляція по C в момент t дорівнює циркуляції по C' у момент t'.

Але ці циркуляції і є інтенсивності цієї вихрової трубки в моменти t і t'.

Отже інтенсивності трубки в моменти t й t' однакові, що й треба було довести.

З другої й третьої Helmholtz'ових теорем між іншим виходить, що вихри не можуть ні утворитись, ні зникнути.

Цей висновок, як і дві останні Helmholtz'ові теореми, є наслідок наших основних припущень про те, що в течиві немає внутрішнього тертя або в'язкости й немає масових сил. Проте, як і є навіть масові сили, якщо тільки вони мають потенціял, Helmholtz'ові теореми справедливі. У течиві не ідеальному, а реальному у зв'язку з унутрішнім тертям, як ми бачимо далі, вихри можуть утворюватись і зникати з часом. Ми побачимо, що коли в'язкість невелика, а це якраз так і є для повітря, то через в'язкість вихри можуть утворюватись тільки поблизу твердих тіл, що рухаються в повітрі, в так званому поверхневому шарі[1]. З поверхневого шару вихри виносить потік у зовнішній простір, де вони з великим

[1] Теорію поверхневого шару опрацювали *L. Prandtl*, *T. Karman* та їхні учні.

наближенням поводяться так, як це відповідає Helmholtz'овим теоремам.

Отже, доповнюючи теорію про ідеальні течива так званою теорією поверхневого шару, ми маємо змогу дуже близько дійти до пояснення й дослідження явищ у реальних течивах.

§ 14. Приклад вихрового руху

Як приклад вихрового руху, дослідімо течію течива, що заповнює весь простір і визначається формулами:

$$u=-\omega y, \quad v=\omega x, \quad w=0$$

для $x^2+y^2 \leqslant a^2$, і формулами

$$u=-\frac{\omega y}{x^2+y^2}a^2, \; v=\frac{\omega x}{x^2+y^2}a^2, \; w=0$$

для $x^2+y^2>a^2$; при цьому ω означає якусь сталу величину.

Легко бачити, що величини u, v, w суцільні в усьому просторі.

До того, в усьому просторі умова нестисливости виконується.

А що $u=\frac{dx}{dt}$, $v=\frac{dy}{dt}$ і на підставі рівнянь для u та v

$$ux+vy=0, \; w=0,$$

то для кожної частки течива

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0, \; \frac{dz}{dt}=0,$$

тобто

$$x^2+y^2=\text{const}, \quad z=\text{const},$$

отже, кожна частка описує коло, нормальне до осі Z-ів і з центром на цій осі.

В обсягу $x^2+y^2>a^2$, тобто за циліндром, вісь якого є вісь Z-ів і радіюс дорівнює a, течію визначають формули, з якими ми вже обізналися в § 11. Різниця в тому, що величину ωa^2 перше ми означали через c. Тому по контурові, що обіймає циліндер $x^2+y^2=a^2$ циркуляція дорівнює

$$\Gamma=2\pi a^2\omega.$$

За циліндром $x^2+y^2=a^2$ вихрів немає, як виявлено в § 11. В середині циліндра $x^2+y^2=a^2$, тобто для $x^2+y^2 \leqslant a^2$, навпаки, вихри не дорівнюють нулеві, бо там

$$\xi=0, \; \eta=0, \; \zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\omega.$$

Через кожну точку, що лежить у середині циліндра, проходить вихор, рівнобіжний з віссю Z-ів. Цей циліндер є вихрова трубка з інтенсивністю

$$2\pi a^2 . \omega.$$

Незалежно від виразу Γ для циркуляції навколо цього циліндра в цьому можна переконатися з того, що площа перекрою вихрової трубки дорівнює πa^2, а інтенсивність вихру в кожній точці дорівнює 2ω.

Нетрудно зрозуміти, що таке течія в середині циліндра. Справді, ми вже бачили, що кожна точка рухається по обводові кола. Швидкість, з якою частка описує коло, дорівнює

$$\sqrt{u^2+v^2}=\omega\sqrt{x^2+y^2},$$

тобто дорівнює віддалі точки від осі, помноженій на ω.

Отже виходить, що в середині циліндра течиво обертається, як тверде тіло, з кутовою швидкістю ω навколо осі циліндра.

Ця картина корисна, коли досліджувати загальніші випадки вихрового руху.

Розглядаючи досить тонкі вихрові трубки можна прийняти, принаймні в першому наближенні, що течиво, заповнюючи вихрову трубку, обертається навколо своєї осі з якоюсь кутовою швидкістю, яка дорівнює відношенню циркуляції навколо трубки до подвоєної площі її перекрою.

Для криволінійних трубок цю картину, як перше наближення, можна прийняти для невеликої частини трубки.

§ 15. Визначення швидкостей часток течива при даному розподілі вихрів у ньому

Раніш ми бачили, як для заданого розподілу швидкостей у течиві можна визначити ті вихри, що є в течиві. В багатьох питаннях багато важить обернена задача, а саме: в течиві відомі вихри, треба дізнатись, як розподілені швидкості.

Математична задача полягає ось у чому: дано функції ξ, η, ζ залежно від величин x, y, z, t; треба визначити функції u, v, w так, щоб

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \eta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Мова йде, отже, про інтеґрування якоїсь системи диференційних рівнянь. Тому, як ми вже відзначили в § 5, треба дати ще так звані граничні й початкові умови.

Не маючи змоги математично досліджувати тут цю задачу, ми обмежимось на розгляді простого випадку, що дозволить нам зробити певні висновки про деякі загальніші випадки. Цих висновків буде цілком досить для нашої дальшої мети.

Отже розгляньмо такий випадок: течиво заповнює ввесь простір, тобто тягнеться на безконечність; на безконечності течиво в спокої, течія стаціонарна; в течиві є тонка циліндрична вихрова трубка, вісь якої є вісь Z і інтенсивність якої дорівнює Γ.

З умов задачі ясно, що течія повинна бути симетрична щодо осі Z. Швидкість в якійсь точці може залежати тільки від віддалі точки до осі й повинна бути нормальна до площини, що проходить через точку й вісь. Кожна частка повинна через це рухатись із сталою швидкістю по обводові кола, нормального до осі Z і з центром на ній. Залишається визначити величину цієї швидкости. Для цього візьмімо якунебудь частку й описуване нею коло. Нехай радіюс цього кола дорівнює r, а швидкість частки, що описує його, дорівнює V.

Циркуляція по цьому обводові, якщо r більше за радіюс вихрової трубки, дорівнює

$$\Gamma=\int_0^{2\pi} Vrd\varphi=Vr\int_0^{2\pi} d\varphi=2\pi rV,$$

бо $ds=rd\varphi$, де φ є полярний кут (див. рис. 13).

Звідси

$$V=\frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{19}$$

Отже ми бачимо, що швидкість обернено-пропорційна до віддалі від осі вихру. Тому на безконечності течиво перебуває в спокої.

Щоб перейти до загальніших випадків, міркуватимемо так.

Візьмімо якунебудь точку M, що є на віддалі r від відомого вже нам вихру (рис. 16). Можна сказати, що наявність досліджуваного вихру потребує певної швидкости $\frac{\Gamma}{2\pi r}$ у точці M.

Розбиймо наш вихровий шнур (вихрову трубку) на елементи й приймімо, що кожний елемент вихру (довжину його позначмо через ds) для свойого існування потребує в точці M певної швидкости dV, що залежить від ds і від положення точки M щодо ds. При цьому залежність dV від ds повинна бути така, щоб повна швидкість у точці M, що постане, коли просумувати по всіх елементах ds, дорівнювала $\frac{\Gamma}{2\pi r}$.

Найпростіше припущення буде таке: поперше

$$dV = C\frac{\Gamma ds \sin\varphi}{\rho^2} \qquad (20)$$

де $\rho = KM$ — віддаль точки M від елемента ds, а φ — кут між ds і KM; C — якась стала; подруге, швидкість dV спрямована нормально до площини, що проходить через ds і точку M і до того в бік, відповідний до знаку циркуляції (див. рис. 16).

Сталу C можна визначити так, щоб, підсумувавши по всіх елементах вихря, в точці M мати потрібний вираз швидкости

$$\frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

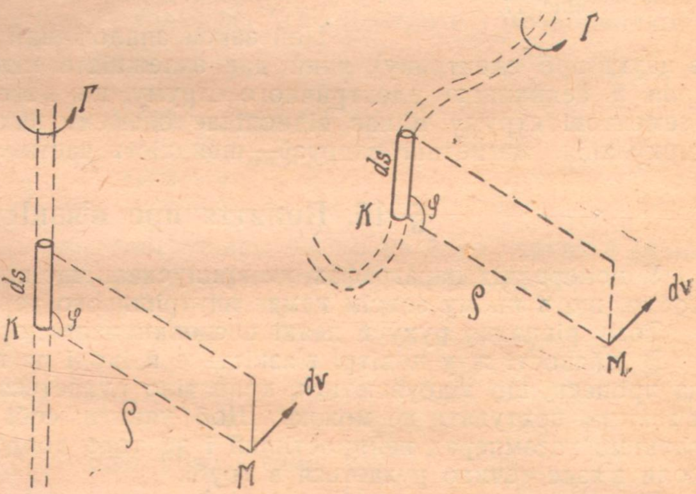

Рис. 16.

Формулу (19) ми можемо вважати за обгрунтовану, а вираз (20) є гіпотетичний. Чи справедлива гіпотеза (20), перевірити безпосередньо не можна, бо ніколи не доводиться спостерігати частини вихру. Перевірити гіпотезу (20) можна тільки посередньо, з тих висновків, до яких вона приводить для безконечно довгих чи замкнених вихрів. Виявляється, що всі виводи з формули (20) справедливі, їх потверджують і математичні досліди над задачею про вихор, тобто диференційні рівняння, подані раніш, і подеколи дослід.

Значення формули (20) для нас полягає в тому, що, коли вихрова трубка криволінійна, ми можемо елементи її вважати за простолінійні й застосовувати до них формулу (20), визначаючи повний вплив вихру сумуванням, тобто інтеґруванням по всій трубці.

Нам залишається, отже, визначити константу C у формулі (20).

Для цього назвімо через s проєкцію KM на вісь вихру (рис. 17).

Маємо

$$s = r\operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -r\operatorname{ctg}\varphi, \quad ds = \frac{r}{\sin^2\varphi}d\varphi, \quad \rho = \frac{r}{\sin\varphi}.$$

Значить,

$$dV = C \cdot \frac{\Gamma \cdot r \cdot d\varphi \cdot \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi \cdot r^2} \sin\varphi = \frac{C\Gamma d\varphi}{r} \sin\varphi.$$

Щоб мати ввесь шнур, треба φ міняти від 0 до π. Тому

$$V = \frac{C\Gamma}{r} \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{C\Gamma}{r} \, 2.$$

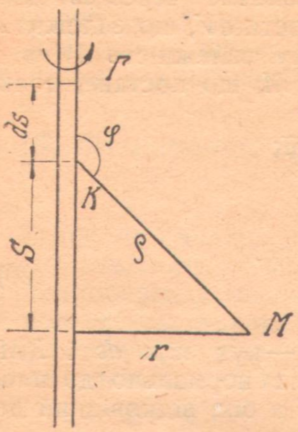

Рис. 17.

Цей вираз повинен дорівнювати

$$\frac{\Gamma}{2\pi r},$$

значить,

$$C = \frac{1}{4\pi}.$$

Отже, закон, що ми його прийняли, має форму:

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{ds \cdot \sin\varphi}{\rho^2}. \tag{21}$$

Цей закон аналогічний із законом Biot-Savart'a (з науки про електрику), який дає залежність між напругою магнетного поля й величиною електричного струму, що його спричиняє, при чому елементові струму в нас відповідає елемент вихру, величині струму — циркуляція, магнетній напрузі — швидкість частки.

§ 16. Поняття про в'язкість

У попередніх параграфах ми припускали, що повітря є течиво ідеальне, тобто, що в ньому зовсім немає внутрішнього тертя або в'язкости.

Тому рівняння руху й деякі висновки мали досить просту форму.

В дійсності ж у повітрі в'язкість є й іноді ця в'язкість дуже впливає на процеси, що відбуваються, коли тіло рухається в повітрі. Отже тоді в'язкістю нехтувати не можна. Щоб уявити собі ролю в'язкости, розгляньмо насамперед найпростіший і до того добре досліджений випадок, коли в'язке течиво рухається в трубі.

Припускаючи, що труба вузька й досить довга, звернімо увагу на її середню частину, де дуже точно можна течію вважати за рівнобіжну з віссю труби.

Всі частки течива, що лежать від осі на однаковій віддалі r, матимуть однакову швидкість u. Ця швидкість залежатиме від r, тобто буде різна на різних віддалях від осі.

Отже можна собі уявити, що течиво ділиться на тонкі сувісні шари (по-латинському шар — lamina), які рухаються один відносно одного так, що в кожному шарі частки мають однакову швидкість. Саму течію звуть лямінарна.

З дослідів відомо, що сила тертя, з якою один шар тягне другий, пропорційна до величини поверхні стикання шарів і до бистроти, з якою міняється швидкість при переході від одного шару до іншого.

Якщо один шар, що є на віддалі r від осі, рухається із швидкістю u, то шар, що є на віддалі $r_1 = r + dr$, рухатиметься із швидкістю $u_1 = u + \frac{du}{dr} dr$. Їхня відносна швидкість $\frac{du}{dr} dr$, а значить бистрота зміни швидкости дорівнює $\frac{du}{dr}$. Тому сила, з якою перший шар тягне другий, дорівнює

$$K=\mu\cdot 2\pi r l\left(-\frac{du}{dr}\right),$$

де l — довжина цього циліндричного шару, а значить $2\pi r l$ — його поверхня. Знак мінус поставлено тому, що з додатними $\frac{du}{dr}$ сила K буде не тягнути, а навпаки, затримувати другий шар;

μ — сучинник пропорційности, що його звуть сучинник в'язкости;

K — сила, з якою на поверхні стикання шарів один шар чинить на другий.

Отже, на одиницю поверхні припадає сила (Newton)

$$-\mu\frac{du}{dr}$$

Цей вираз сили, з якою один шар тягне за собою інший, цілком потверджує дослід.

Обізнавшись із течією в трубі, перейдімо до загального випадку руху течива.

Щоб зрозуміти, яку форму має поданий тут раніш закон, припустімо, що шари течива рівнобіжні з площиною XOY. Бистротою зміни швидкости u при переході від одного шару до другого тут буде вже $\frac{\partial u}{\partial z}$, а сила, що припадає на одиницю поверхні, напишеться в формі

$$\tau_{xy}=-\mu\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Якщо ми розглянемо шар завгрубшки Δz, то на його верхню й нижню поверхню від тих шарів, що прилягають до нього, впливатиме по силі, що має такий вираз.

Для нижнього шару матимемо силу

$$-\mu\frac{\partial u}{\partial z},$$

а для верхнього сила буде вже інша, а саме:

$$+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z+\Delta z}=+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z\right).$$

У сумі ці сили дадуть

$$\mu\Delta z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Тому що площа основи елемента шару дорівнює одиниці, то об'єм цього елемента дорівнює Δz. Значить, на одиницю об'єму припадає сила

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Тут ми розглядали шари, рівнобіжні з площиною XOY, і вивчали зміну проєкції швидкости на вісь X.

Так само можна було б дослідити і вплив змін проєкцій швидкости на вісь Y і на вісь Z. Крім того, досліджуючи елемент течива у формі прямокутнього рівнобіжностінника, ми мусимо зважити на ті сили, що постають на решті його граней.

Нам важливо те, що для одиниці об'єму течива згадані сили дорівнюють добуткам сучинника в'язкости μ на другі похідні від складових швидкости по координатах.

Цього виводу нам цілком досить для того, що нам буде потрібно далі.

Якби ми захотіли скласти загальні рівняння руху в'язкого течива, то, йдучи за методою з § 4, ми мусили б знайти суму всіх сил, що впливають на елемент об'єму течива.

Тому до сил, досліджених у § 4, довелося б додати ще й ті сили, що їх спричиняє в'язкість.

Такі рівняння написати можна, і це вперше зробили Navier і Stokes; на їхню честь ці рівняння й названо рівняння Navier-Stokes'a.

Нам не потрібна точна форма цих рівнянь, а досить тільки знати, що рівняння ці мають форму

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\ldots,$$

де пропущені члени такої самої структури, як і член $\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, тобто вони є добуток μ на другі похідні від швидкостей по координатах.

Зауважмо, що дуже часто в'язкість течива характеризують величиною

$$\nu=\frac{\mu}{\rho},$$

що її звуть кінематичний сучинник в'язкости.

§ 17. Умови подібности двох течій

Ще у вступі сказано, що в аеродинаміці широко користуються з експериментальних досліджень над явищами, зв'язаними з рухом твердих тіл у повітрі.

Цих досліджень здебільшого не можна провадити на літаку. Замість цього доводиться ті чи ті частини літака вміщати в штучний повітряний потік, що його утворюють у ляборaторіях у так званих аеродинамічних трубах. При цьому явище роблять оборотним у тому розумінні, що досліджуване тіло не рухається, а перебуває в спокої, а рухатись примушують повітря. На підставі загальних законів механіки ця оборотність процесів цілком дозволенна. Проте тут постають ті труднощі, що багато частин літака великі й тому їм потрібні дуже широкі труби. Крім того, щоб випробувати стійкість літака та інші його властивості, треба дослідити цілий літак, а не тільки його окремі частини. Цілого ж літака в трубу вмістити не можна. Тому ляборaторії змушені замість літака вміщати в трубу геометрично подібний до нього модель.

Отже виникає питання про те, як можна перенести на якесь тіло наслідки досліджень, пророблених над моделем цього тіла.

Припустімо, що в нас є два геометрично подібні тіла. Позначитимемо індексом 1 величини, що стосуються до першого, а індексом 2 — що стосуються до другого тіла. Через подібність усі виміри першого тіла будуть у тому самому відношенні до відповідних вимірів другого тіла. Позначаючи це відношення через L, матимемо

$$l_1=L\,l_2, \tag{22}$$

де l_1 і l_2 — два відповідні виміри цих тіл.

Зокрема координати двох відповідних точок є відповідні виміри, отже

$$x_1=Lx_2,\ y_1=Ly_2,\ z_1=Lz_2. \tag{23}$$

Для того, щоб з поводження моделю можна було судити про повоження тіла, треба, щоб течії були теж подібні. Це значить, що вектори швидкості в двох будь-яких відповідних точках потоків повинні бути в сталому відношенні.

Позначаючи через V_1 і V_2 швидкості, з якими рухаються тіла, припустімо, що

$$V_1 = CV_2. \tag{24}$$

Тоді в двох відповідних точках течива $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ повинні справджуватись рівності

$$u_1 = Cu_2, \ v_1 = Cv, \ w_1 = Cw_2. \tag{25}$$

Позначаючи через ν_1 і ν_2 кінематичні сучинники в'язкости течив, де рухаються ці тіла, припустімо, що

$$\nu_1 = Q\nu_2. \tag{26}$$

Першу течію характеризують три рівняння, з яких перше такої форми:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2{}_4} + \ldots.$$

Для другої течії аналогічно матимемо:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_2} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z_2} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2{}^2} + \ldots.$$

Тому що всі явища, зв'язані з течіями, визначають написані рівняння, то для того, щоб течії були цілком подібні, тобто, щоб можна було перенести наслідки для першого тіла на друге, треба, щоб ці рівняння були тотожні. При цьому тотожність цих рівнянь повинна бути висновком із формул (22), (23), (24), (25), (26).

А що

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt_1}, \quad u_2 = \frac{dx_2}{dt_2} \quad \text{і} \quad dx_1 = L\,dx_2$$

то маємо співвідношення

$$dt_1 = \frac{dx_1}{u_1} = \frac{L dx_2}{Cu_2} = \frac{L}{C} dt_2.$$

Отже

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \frac{C^2}{L} \frac{\partial u_2}{\partial t_2},$$

і перше рівняння набирає форми:

$$\frac{C^2}{L} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial t_2} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z_2} \right\} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1{}^2} + \ldots$$

або

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_2} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z_2} = \frac{L}{C^2} \left\{ -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1{}^2} + \ldots \right\}$$

А що це рівняння повинне бути тотожне з другим, то ми маємо співвідношення

$$\frac{L}{C^2} \left\{ -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2{}_1} + \ldots \right\} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2{}^2} + \ldots,$$

яке повинне бути тотожністю; значить повинна справджуватись тотожно рівність

$$\frac{L}{C^2}\nu_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2_1}=\nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2{}^2}, \tag{27}$$

бо ті вирази, що входять у нього,— відповідні до обох потоків.

Інших таких співвідношень ми не виписуємо, бо вони порівняно з (27) нічого нового не дають.

На підставі (23), (25) та (26) рівність (27) дає

$$\frac{L}{C^2}\,Q\nu_2\,\frac{C}{L^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2{}^2}=\nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2_2}$$

або

$$\frac{Q}{CL}=1, \tag{27'}$$

звідки на підставі (22), (24), (26)

$$\frac{l_1 V_1}{\nu_1}=\frac{l_2 V_2}{\nu_2} \tag{28}$$

Отже, щоб були тотожні диференційні рівняння руху, що потрібно для повної подібности, повинна справджуватись рівність (28).

Ми бачимо, що для того, щоб можна було перенести наслідки дослідження з моделю на тіло, крім геометричної та кінематичної подібностей, що їх подають формули (22) і (24), треба мати рівність (28), де l_1 та l_2— дві відповідні довжини, що характеризують тіла; V_1 і V_2— дві відповідні швидкості потоків і ν_1 та ν_2— відповідні кінематичні сучинники в'язкости

На честь Reynolds'а, що вперше дослідив з цього погляду течію течива в вузьких трубках, вираз

$$\frac{lV}{\nu}$$

має назву Reynolds'ового числа.

Отже для повної подібности потрібна рівність Reynolds'ових чисел для порівнюваних геометрично й кінематично подібних потоків.

РОЗДІЛ II

ПЛОСКІ ТЕЧІЇ

§ 1. Поняття про плоску течію

Уже в § 14 першого розділу ми дослідили один приклад стаціонарної течії течива, для якої величини u, v залежать тільки від x, y, а величина w дорівнює нулеві.

У цьому прикладі координата z зовсім не входить у виучувані величини й рівняння, чим рівняння аеродинаміки дуже спрощуються, а разом із тим спрощується й математичне досліджування відповідного процесу.

З'ясуймо загальний характер подібних течій.

Для цього погляньмо на умови, якими характеризуються ці течії.

Перша умова в тому, що $w=0$. Це значить, що кожна частка течива рухається в площині, нормальній до осі Z.

Друга умова в тому, що u та v залежать тільки від x та y. Це значить, що в усіх площинах, нормальних до осі Z, течія зовсім однакова. Тому досить дослідити течію в одній із площин, нормальних до осі Z. В кожній іншій площині, нормальній до цієї осі, течія буде зовсім така, як і в вибраній площині.

Тому такі течії звуть плоскими течіями або течіями в двох вимірах.

Якщо в течиві є тверде тіло, то перекрої його площинами, нормальними до осі Z, повинні бути цілком однакові формою, величиною та положенням. Інакше різні площини були б у різних умовах, і течія не була б однакова в цих площинах.

Отже плоска течія можлива тільки тоді, коли тверді тіла в течиві є безконечно довгі циліндри з осями, рівнобіжними з віссю Z.

Очевидно, що цілком цих усіх умов у природі не може бути, бо на ділі ми завжди маємо тіла конечні, а не безконечно довгі. Проте наближено подібні умови все таки є.

Це буває тоді, коли тверде тіло — досить довгий циліндер, що рухається простолінійно в напрямі, нормальному до своєї осі.

Тоді в середніх частинах циліндра течію з великим наближенням можна вважати за плоску. Тільки біля кінців циліндра будуть ґрунтовні відхили. Їх можна урахувати, ввівши для кінців циліндра поправкові сучинники у формули, що ми їх матимемо для його середньої частини.

Коли аеропляннє крило має майже циліндричну форму і рухається якраз нормально до своєї осі, то, щоб вивчити його рух у повітрі, ми можемо застосувати теорію плоских течій. Треба тільки пам'ятати, що ці наші наслідки для реальних крил будуть наближені й до того досить точні для середньої частини крила, а для кінців крила ці наслідки потребуватимуть деяких поправок.

Вивчаючи плоскі течії, тверде тіло можна цілком визначити профілем його нормального перекрою.

Тому ми часто говоритимемо не про обтікання тіла, а про обтікання профілю або контура.

Силу, що впливає на одиницю довжини циліндра, ми називатимемо, щоб було коротше, силою, що впливає на контур або профіль.

§ 2. Основні рівняння для плоских течій

У цьому параграфі ми дослідимо, якої форми будуть для плоскої течії основні рівняння аеродинаміки.

Ми досліджуватимемо течії стаціонарні й невихрові.

Те, що немає вихрів, приводить нас до рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

яке показує, що $\zeta = 0$ (ξ і η дорівнюють нулеві тотожно, бо $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$, $w = 0$).

Рівняння нестисливости матиме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Рівняння руху в Lamb'овій формі [див. розділ 1, формули (14)] набирають на підставі (1) такого вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2}{2}\right) = 0.$$

Звідси виходить, що

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2}{2} = \text{const}. \tag{3}$$

Отже для цих течій функції u та v задовольняють системі (1), (2), а p визначається з рівняння (3).

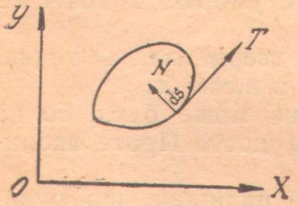

Рис. 18.

Вже з цього видно, якої простої форми набирають для плоских стаціонарних і невихрових течій рівняння аеродинаміки.

Скажемо тепер про граничні умови.

Ми розглядатимемо тільки той випадок, коли тіло перебуває в спокої, а потік на нього набігає.

Тут на контурі тіла нормальна проєкція швидкости повинна дорівнювати нулеві.

Позначаючи через ds елемент довжини контура (рис. 18), пригадаймо, що косинуси кутів дотичної до контура з осями координат дорівнюють

$$\cos(x, T) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(y, T) = \frac{dy}{ds}, \tag{4}$$

а для нормалі до контура

$$\cos(x, N) = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos(y, N) = \frac{dx}{ds}. \tag{5}$$

Тому проєкція швидкости на нормалю до контура дорівнює

$$u \cdot \cos(x, N) + v \cdot \cos(y, N) = \frac{v\,dx - u\,dy}{ds},$$

…гранична умова набирає форми

$$v dx - u dy = 0. \tag{6}$$

Крім умови на контурі тіла, повинна бути певна умова на безконечності.

Якщо в спокійному течиві контур рухається із швидкістю, проєкції якої на осі дорівнюють u_0, v_0, то, щоб обернути течію, нам треба надати всім часткам течива й контура швидкість із проєкціями

$$-u_0, -v_0.$$

Отже на той випадок, коли тіло перебуває в спокої, а набігає потік, на безконечності повинні бути умови:

$$\left.\begin{aligned} u_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} &= -u_0 \\ v_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} &= -v_0 \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Звернімо тепер увагу на рівняння (1) та (2).

Рівняння (1) справдиться якнайзагальніше, коли ми покладемо, що

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{8}$$

де φ довільна функція від x, y.

У механіці кажуть, що сила (X, Y, Z) має потенціял, коли є така функція $\Phi(x, y, z)$, що

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

За аналогією з механікою скажемо, що швидкість (u, v, w) має потенціял, якщо

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

де Φ — якась функція від координат.

В розгляданому випадку плоскої течії ми бачимо, що потенціял є і залежить тільки від x, y. Його саме ми позначили вище через φ.

З рівняння (2) так само виходить, що

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{9}$$

де ψ — якась інша функція від x і y.

Справді, із (9) бачимо, що

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\},$$

звідки й випливає рівняння (21):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

З'ясуймо механічний сенс функції ψ. Для цього зауважмо, що в плоській течії лінії потоку визначаються [див. розділ 1, формула (12)] рівнянн

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

або

$$udy-vdx=0.$$

На підставі (9) це рівняння набирає форми

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial x}dx=0.$$

Зауважмо, що ліва частина написаного рівняння є повний диференці від функції ψ.

Тому для лінії течії матимемо:

$$d\psi=0$$

або

$$\psi=\text{const} \qquad (1$$

Отже вздовж кожної лінії течії ψ є стала величина й навпаки. На пі ставі сказаного функцію ψ звуть функцією течії.

Звернімо тепер увагу на граничну умову (6).

Вона нічим не різниться від рівняння лінії течії. Тому контур тіла п винен бути лінією течії або складатись із частин лінії течії.

На підставі сказаного дослідження плоского потоку зводиться визначення двох функцій φ та ψ. До того ж, щоб справдилась гранич умова, функція ψ повинна бути константою на контурі тіла.

Порівнюючи (8) з (9), ми бачимо, що функції φ та ψ не залежні од від одної, а зв'язані співвідношеннями:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (1$$

Співвідношення (11) багато важать у теорії функцій комплексно змінного.

У найближчих параграфах ми подамо потрібні відомості про функ комплексного змінного, щоб далі мати змогу застосовувати методи ц важливої дисципліни в дослідженні плоских потоків.

§ 3. Функції комплексного змінного [1]

Розв'язуючи квадратові рівняння, а також розглядаючи деякі ін питання з елементарної математики, вводять так звані комплексні чис що мають форму

$$z=x+iy,$$

де x та y є звичайні дійсні числа, а $i=\sqrt{-1}$ є уявна одиниця. Якщо та y є змінні величини, то z буде змінна комплексна величина.

Є геометричне зображення комплексних чисел, що нагадує зображен звичайних чисел точками числової простої.

Для цього беруть прямокутню систему координат XOY і числу z ставляють точку (z) з абсцисою x та ординатою y. Вводячи поляр координати r і Θ, можемо представити комплексне число в наступн так званій тригонометричній формі

$$z=r(\cos\Theta+i\sin\Theta),$$

бо

$$x=r\cos\Theta,\quad y=r\sin\Theta. \qquad ($$

[1] У цьому параграфі в дослідженні плоских потоків, де незалежні змінні є x та y, літер не має значення координати і її можна використати на визначення комплексної величини.

Величину

$$r=\sqrt{y^2+x^2}$$

звуть модулем комплексного числа й позначають через $|z|=r$, а величину

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\Theta$$

звуть арґументом комплексного числа.

Зауважмо, що на підставі Euler'ових формул диференційного числення

$$\cos\Theta+i\sin\Theta=e^{i\Theta}, \tag{13}$$

де $e=2{,}718\,281\,828\ldots$ є основа натуральних логаритмів, а тому комплексне число можна подати у формі

$$z=re^{i\Theta}.$$

Усі дії з комплексними числами роблять за звичайними правилами альґебри.

Отже, додаючи (або віднімаючи) комплексні числа, окремо додають (або віднімають) їхні дійсні чи уявні частини.

Не трудно бачити, що геометричному додаванню комплексних чисел відповідає додавання сил, прикладених до однієї точки за правилом Newton'ового рівнобіжника (рис. 19).

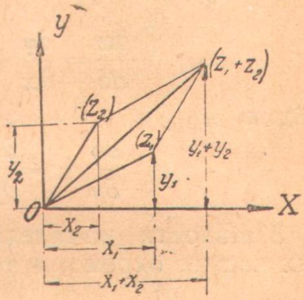

Рис. 19.

У множенні й діленні комплексних чисел зручно зображати їх через модуль і арґумент.

Справді, із

$$z_1=r_1e^{i\Theta_1}, \quad z_2=r_2e^{i\Theta_2}$$

виходить, що

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\Theta_1+\Theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\Theta_1-\Theta_2)}.$$

Отже при множенні модулі перемножують, арґументи додають, а при діленні модулі ділять і арґументи віднімають.

Зауважмо, що число $x-iy$ звуть супряженим щодо $x+iy$. Якщо $x+iy=z$, то звичайно число $z-iy$ позначають через $\bar{z}$.

Основні альґебричні операції приводять до різних функцій від комплексного змінного $z=x+iy$. Як приклад, подамо

$$w=z^2, \quad w=\frac{1}{z}, \quad w=\frac{z-a}{z-b}.$$

Підставивши замість z його вираз і пробивши зазначені операції, ми побачимо, що кожна з цих функцій розіб'ється на дві частини: якийсь дійсний вираз, що залежить від x і y, і якийсь чисто уявний вираз від цих величин.

Наприклад,

$$w=z^2=x^2-y^2+2ixy,$$

$$w=\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Отже, ми цілком природно приходимо до такого представлення кожної функції комплексного змінного

$$w=f(z)=\varphi(x,y)+i\,\psi\,(x,y) \tag{14}$$

де $\varphi(x,y)$ та $\psi(x,y)$ — дві звичайні функції від дійсних змінних x і y.

Так, у першому з цих прикладів

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2, \quad \psi(x, y) = 2\,xy.$$

Далі нас будуть цікавити тільки такі функції комплексного змінного, що мають певну похідну по z. Виявляється, що через цю вимогу ми приходимо до певних умов, які функції φ та ψ повинні справджувати.

Щоб знайти ці умови, випишімо похідні від (14) по x і y.

На підставі основних правил диференційного числення маємо

$$\frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

А що $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = i$, то ці вирази набирають форми

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{dw}{dz} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{1}{i}, \tag{15}$$

звідки

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

З рівности комплексних чисел виходить рівність їхніх дійсних і уявних частин окремо; а тому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Цих умов конче треба дотримати, щоб $w = f(z)$ мала певну похідну по z. Можна довести, що цих умов і досить, тобто що справдженням їх забезпечується існування певної похідної у функції $w = f(z)$.

Ми прийшли отже до умов (так звані умови Cauchy-Riemann'а), що сходяться з умовами (11), знайденими раніш для потенціялу та функції течії в плоскому потокові.

Тепер уже не важко зрозуміти, на чому основане застосування функцій комплексного змінного до вивчення плоских потоків.

Щоб знайти плоску течію, як ми бачили раніш, досить знайти пару функцій φ та ψ від змінних x, y так, щоб справджувались умови (11) і щоб на контурах занурених у течиво тіл функція ψ була стала.

Ми бачимо, що умови (11) механічно справдяться, якщо ми візьмемо функцію від комплексного змінного, що має похідну (так звану аналітичну функцію), і за функції φ і ψ приймемо відповідно її дійсну частину та сучинник при i в уявній частині. Тому задача зводиться до того, щоб знайти таку аналітичну функцію, уявна частина якої ($i\psi$) зберігає сталу вартість на контурі зануреного в течиво тіла (або кількох таких тіл).

Припустімо, що для якоїсь плоскої течії

$$\varphi = \varphi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y)$$

являють відповідно потенціял і функцію течії (потоку). Як було сказано в попередніх параграфах, функції φ та ψ задовольняють умовам (11), які показують, що

$$\varphi + i\psi$$

є аналітична функція комплексного змінного z. Позначмо цю функцію через $f(z)$, так що

$$f(z) = \varphi + i\psi. \tag{16}$$

Функцію $f(z)$ звуть комплексним потенціялом плоскої течії.

На підставі формул (15), (8), (9) маємо

$$\frac{df}{dz}=u-iv. \tag{17}$$

Вираз $u-iv$ звуть комплексною швидкістю плоского потоку.

Знайшовши комплексну швидкість, ми можемо зараз таки визначити компоненти u, v вектора-швидкости, бо u є дійсна частина комплексної швидкости, а v — взятий з оберненим знаком сучинник при i у виразі комплексної швидкости.

Подивімось тепер, якої форми набуде вираз для циркуляції по замкненому контурові. Циркуляцію Γ визначає інтеґрал

$$\Gamma=\int\limits_C (udx+vdy).$$

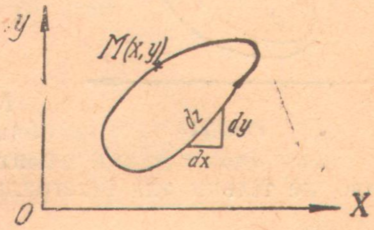

Рис. 20.

Зображаючи точку $M(x,y)$ контура C (рис. 20) комплексним числом $z=x+iy$, бачимо, що

$$dz=dx+idy$$

є приріст z при переході від однієї точки контура до іншої безконечно близької точки цього контура.

Помічаючи, що

$$\frac{df}{dz}dz=(u-iv)\ (dx+idy)=udx+vdy-i\,(vdx-udy),$$

маємо для циркуляції такий вираз

$$\Gamma=\int\limits_C \frac{df}{dz}dz+i\int\limits_C (vdx-udy).$$

У § 1 ми бачили, що $\dfrac{vdx-udy}{ds}$ є проекція швидкости на нормалю до контура в якійсь точці.

Тому

$$vdx-udy=\frac{vdx-udy}{ds}ds$$

дорівнює потокові течива через елемент ds контура, а

$$\int\limits_C (vdx-udy)$$

є потік через увесь контур. А що густина течива стала, то повний потік течива через якийсь замкнений контур повинен дорівнювати нулеві. Отже

$$\int\limits_C (vdx-udy)=0$$

і, значить, для циркуляції Γ маємо такий вираз:

$$\Gamma=\int\limits_C \frac{df}{dz}dz, \tag{18}$$

у склад якого входить тільки самий комплексний потенціял.

Коли лінія C не обіймає контура твердого тіла, тобто коли лінію C можна стягнути в точку, не залишаючи обсягу, що його займає течиво, то через те, що немає вихрів, циркуляція Γ по контурові дорівнюватиме нулеві.

Якщо ж C обіймає контур твердого тіла (рис. 21), то циркуляція по лінії C може бути відмінна від нуля. Міняючи тут лінію (прим., переводячи її в C') так, щоб вона ввесь час обіймала контур тіла, ми не введемо в обсяг, обмежений контуром, нових вихрів, бо вихрів у течиві взагалі немає.

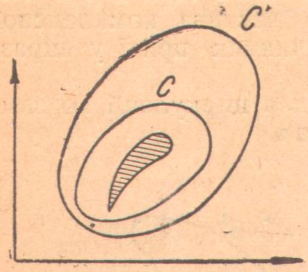

Рис. 21.

Тому інтеґрал (18) при цих змінах лінії C не мінятиметься:

$$\Gamma = \int\limits_C \frac{df}{dz} dz = \int\limits_{C'} \frac{df}{dz} dz.$$

Ми скористуємось із цього, коли фактично обчислятимемо циркуляцію, а також, коли обчислятимемо деякі інші інтеґрали, бо це справедливо не тільки для інтеґрала (18), але й для будь-якого інтеґрала

$$\int\limits_C F(z)\, dz;$$

треба тільки, щоб аналітична функція $F(z)$ була безперервна разом із своєю похідною в обсягу, занятому потоком; справді за цих припущень $F(z)$ можна вважати за комплексний потенціял плоского течіння розгляданого типу.

§ 4. Обтікання колового циліндра

Як приклад, що має в дальшому принципове значення, розгляньмо рух у течиві безконечно довгого колового циліндра.

Згідно із сказаним у § 1, приймім, що циліндер перебуває в спокої, а потік набігає на нього. Нехай профіль циліндра є коло (рис. 22) з радіюсом a і центром у точці $z=0$ і нехай швидкість потоку на безконечності має компоненти

$$u_{\substack{x=\\ y=\infty}} = -u_0$$

$$v_{\substack{x=\\ y=\infty}} = -v_0.$$

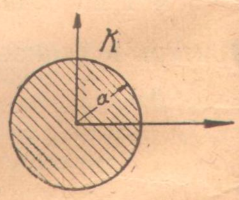

Рис. 22.

На підставі сказаного раніш задача зводиться до того, щоб знайти таку аналітичну функцію $f(z)$, яка на обводі кола має сталу уявну частину й для якої

$$\frac{df}{dz}_{z=\infty} = -u_0 + iv_0.$$

Ця математична задача не така то вже й важка. Ми не будемо розв'язувати її, а обмежимось на тому, що подамо потрібну функцію $f(z)$ і перевіримо, що вона задовольняє всім вимогам задачі.

Ця функція такої форми

$$f(z) = (-u_0 + iv_0)\, z - (u_0 + iv_0)\frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z}{a}. \qquad (19)$$

Тут ln звичайне позначення натурального логаритма, тобто логаритма при основі e, а Γ — якесь дійсне число.

Насамперед знайдімо диференціюванням комплексну швидкість:

$$\frac{df}{dz}=-u_0+iv_0+(u_0+iv_0)\frac{a^2}{z^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}. \tag{20}$$

Коли z наближається до безконечности, $\frac{1}{z}$ і $\frac{1}{z^2}$ прямують до нуля; отже,

$$\frac{df}{dz}_{z=\infty}=-u_0+iv_0,$$

тобто подана раніш умова щодо швидкости на безконечності виконується.

Покажімо тепер, що на контурі циліндра, тобто при

$$x^2+y^2=a^2 \tag{21}$$

уявна частина функції $f(z)$ має сталу вартість.

Для цього дослідімо, яку форму матиме на контурі (21) функція $f(z)$. Ужівши тригонометричне зображення комплексного числа, маємо згідно з § 3 такий вираз для z на контурі (21):

$$z=a(\cos\Theta+i\sin\Theta)=ae^{i\Theta} \tag{22}$$

Тому на обводі кола (21):

$$\frac{a^2}{z}=\frac{a^2}{ae^{i\Theta}}=ae^{-i\Theta}=a(\cos\Theta-i\sin\Theta),$$

$$\ln\frac{z}{a}=\ln e^{i\Theta}=i\Theta.$$

Отже ми приходимо до такого представлення функції $f(z)$ на контурі (21)

$$f(z)=(-u_0+iv_0)\,a(\cos\Theta+i\sin\Theta)-$$

$$-(u_0+iv_0)\,a(\cos\Theta-i\sin\Theta)+\frac{\Gamma}{2\pi}\Theta.$$

Або, спростивши,

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi}\Theta-2au_0\cos\Theta-2av_0\sin\Theta.$$

Ми бачимо, що на контурі (21) функція $f(z)$ дійсна; отже уявна частина функції $f(z)$ на контурі (21) дорівнює нулеві, тобто стала. Отже й ця потрібна умова справджується, так що (19) справді дає обтікання цього циліндра.

Покажімо тепер, що циркуляція навколо циліндра в цій течії дорівнює Γ.

Для цього обчислімо інтеґрал

$$\int_K \frac{df}{dz}\,dz.$$

На контурі K [обвід кола (21)] функція $\frac{df}{dz}$ має форму:

$$\frac{df}{dz}=-u_0+iv_0+\left(\frac{u_0+iv_0}{e^{i\Theta}}\right)(\cos\Theta-i\sin\Theta)+\frac{\Gamma}{2\pi iae^{i\Theta}},$$

а на підставі (22) dz дорівнює:

$$dz = aie^{i\Theta}\, d\Theta = ai\,(\cos\Theta + i\sin\Theta)\, d\Theta.$$

При цьому, щоб описати контур K, треба збільшувати Θ від 0 до 2π. Отже,

$$\int\limits_K \frac{df}{dz} dz = (-u_0 + iv_0)\, ai \int\limits_0^{2\pi} (\cos\Theta + i\sin\Theta)\, d\Theta +$$

$$+ (u_0 + iv_0)\, ai \int\limits_0^{2\pi} (\cos\Theta - i\sin\Theta)\, d\Theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\Theta.$$

Помічаючи, що

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos\Theta\, d\Theta = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} \sin\Theta\, d\Theta = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} d\Theta = 2\pi$$

маємо остаточно:

$$\int\limits_K \frac{df}{dz}\, dz = \frac{\Gamma}{2\pi}\,.\, 2\pi = \Gamma.$$

Отже Γ справді дає циркуляцію навколо циліндра в течії, що її визначає формула (19).

Пошукаймо тепер тих точок, де швидкість потоку дорівнює нулеві. Для цього ми повинні дорівняти нулеві вираз (20) і знайти відповідні вартості z.

Так ми приходимо до квадратового рівняння:

$$(-u_0 + iv_0)\, z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i}\, z + a^2\, (u_0 + iv_0) = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо:

$$z_{1,2} = \frac{-\dfrac{\Gamma}{2\pi i} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\right)^2 - 4a^2\, (u_0 + iv_0)\, (-u_0 + iv_0)}}{2\,(-u_0 + iv_0)}$$

або

$$z_{1,2} = \frac{-\dfrac{\Gamma}{2\pi i} \pm \sqrt{4a^2 V_0^2 - \dfrac{\Gamma^2}{4\pi^2}}}{2\,(-u_0 + iv_0)},$$

де $V_0 = |u_0 + iv_0| = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ дає величину швидкости потоку на безконечності або при оберненій картині величину швидкости, з якою рухається циліндер.

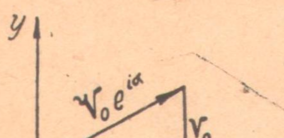

Рис. 23.

Нехай напрям руху циліндра (рис. 23) утворює кут α з напрямом осі x. Тоді комплексне число $u_0 + iv_0$ має арґумент α, так що

$$u_0 + iv_0 = V_0 e^{i\alpha}.$$

Отже,

$$u_0 - iv_0 = V_0 e^{-i\alpha},$$

і

$$-u_0 + iv_0 = -V_0 e^{-i\alpha}.$$

Тому для точок, де швидкість дорівнює нулеві (ці точки звуть критичними точками потоку), маємо вираз:

$$z_{1,2}=\frac{e^{i\alpha}}{2V_0}\left\{\frac{\Gamma}{2\pi i}\pm\sqrt{4a^2V_0^2-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}\right\} \tag{24}$$

Далі розглядатимемо тільки той випадок, коли

$$4a^2V_0^2-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\geqslant 0 \tag{25}$$

Покажімо, що тут критичні точки потоку лежать на контурі (21). Для цього нам треба показати, що при припущенні (25)

$$|z_{1,2}|=a$$

З умови (25) виходить, що $\sqrt{4a^2V_0^2-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}$ є дійсне число, а через

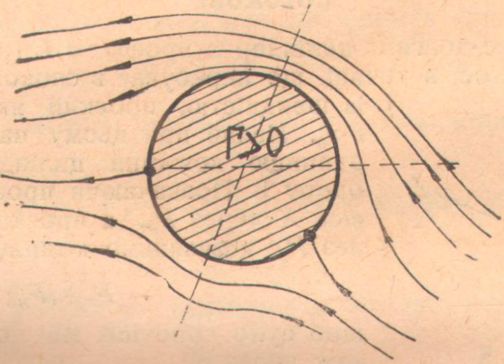

Рис. 24.

те, що квадрат модуля комплексного числа дорівнює сумі квадратів його дійсної частини та сучинника при i в уявній частині, то

$$\left|z_{1,2}\right|^2=\frac{1}{4V_0^2}\left\{\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}+\left(4a^2V_0^2-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\right)\right\}=\frac{4a^2V_0^2}{4V_0^2}=a^2.$$

Отже, наше твердження доведено.

На рисунках 24 й 25 показано розташування ліній течії і положення критичних точок у потокові, що його визначає формула (19), якщо $\Gamma>0$ і $\Gamma<0$.

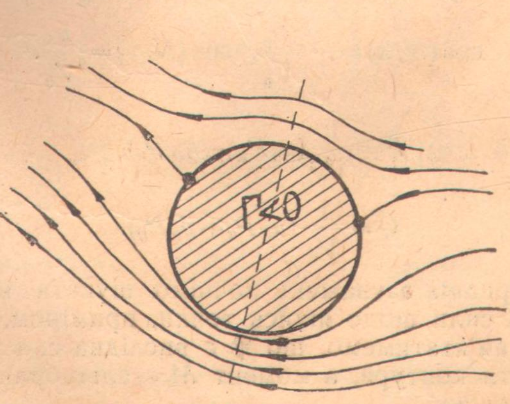

Рис. 25.

Звернімо ще увагу на два окремі випадки, а саме на випадок, коли $\Gamma=0$ (рис. 26) і на випадок, коли $V_0=0$, а $\Gamma\neq0$ (рис. 27).

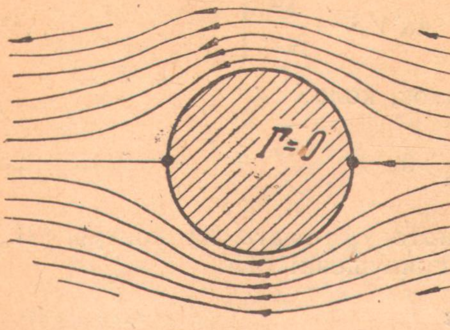

Рис. 26.

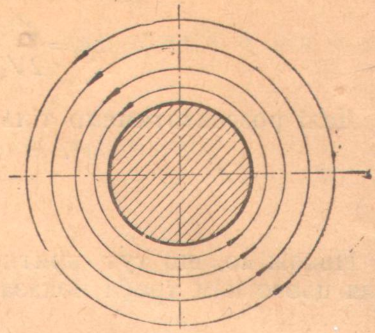

Рис. 27.

§ 5. Обчислення сил, що чинять на тіло в плоскому потокові

Нехай безконечно-довгий циліндер з профілем C (рис. 28) рухається нормально до своєї осі в течиві, що перебуває в спокої на безконечності, із швидкістю, проєкції якої дорівнюють u_0 і v_0. Нехай при цьому на контур (тобто на одиницю довжини циліндра) впливає сила опору $\mathfrak{P}$. Позначаючи проєкцію цієї сили на вісь X через P_x, а проєкцію на вісь Y через P_y, розгляньмо комплексне число

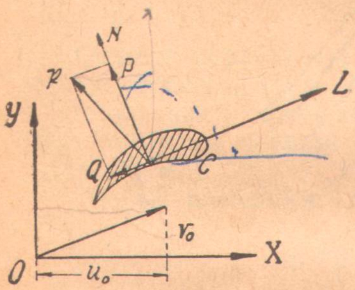

Рис. 28.

$$P_x+iP_y;$$

щоб було коротше, ми позначатимемо його теж через $\mathfrak{P}$:

$$\mathfrak{P}=P_x+iP_y. \tag{26}$$

В авіяції звичайно розкладають силу $\mathfrak{P}$ в двох інших напрямах, а саме, в напрямі, протилежному до напряму руху тіла й у напрямі, нормальному до нього.

Позначаючи величини цих складових через Q та P, назвімо P підіймальною силою і Q — чоловим опором.

Нехай напрям руху буде L, а нормальний до нього напрям N; тоді

$$\cos(L,x)=\frac{u_0}{V_0},\ \cos(L,y)=\frac{v_0}{V_0}, \tag{27}$$

$$\cos(N,x)=-\frac{v_0}{V_0},\ \cos(N,y)=\frac{u_0}{V_0}.$$

Тому

$$P=\frac{1}{V_0}(u_0P_y-v_0P_x), \tag{28}$$

$$Q=\frac{1}{V_0}(u_0P_x+v_0P_y). \tag{29}$$

Після цих попередніх зауважень почнімо шукати вирази для сили $\mathfrak{P}$ і для моменту цієї сили щодо якоїсь точки, приміром, щодо точки $z=0$.

Разом із тим пам'ятатимемо, що $\mathfrak{P}$ є вислідна сил тиску, що впливають на всі елементи контура, а момент M є альґебрична сума моментів елементарних сил тиску.

Щоб зробити обчислення, нам доведеться скористуватись із формули (3)

$$\frac{p}{\rho}+\frac{u^2+v^2}{2}=\text{const}, \tag{3}$$

що визначає тиск в якійсь точці потоку через швидкість течії.

Як уже не раз говорилось, ми обертаємо процес, вважаючи, що рівномірний на безконечності потік, маючи там швидкість з проєкціями $-u_0$, $-v_0$, набігає на спокійний контур.

Розгляньмо спочатку елемент контура ds. По осі X на нього чинить сила

$$p.\cos(x, N)\,ds,$$

яку за формулою (5) можна подати так

$$-p.dy$$

так само по осі Y чинить сила

$$p.\cos(y, N)\,ds=pdx,$$

а значить, момент щодо точки $z=0$ для цієї елементарної сили дорівнює

$$p\,(xdx+ydy).$$

Отже вислідну силу й момент можна подати такими криволінійними інтегралами:

$$P_x=-\int_C pdy,\quad P_y=\int_C pdx,\quad M=\int_C p\,(xdx+ydy).$$

А що $\int_C \text{const}.dx$, $\int_C \text{const}.dy$ дорівнюють нулеві, бо, обійшовши по замкненому контурові, x і y знову вертаються до первісної вартости, то можемо на підставі (3) подати написані формули так:

$$P_x=\frac{\rho}{2}\int_C (u^2+v^2)\,dy,\quad P_y=-\frac{\rho}{2}\int_C (u^2+v^2)\,dx,\quad M=-\frac{\rho}{2}\int_C (u^2+v^2)\,(xdx+ydy).$$

Візьмімось тепер до перетворення написаних виразів.

Для цього пригадаймо, що на контурі тіла є рівність

$$vdx-udy=0. \tag{6}$$

На підставі (6) маємо:

$$P_x=\frac{\rho}{2}\int_C (u^2+v^2)\,dy+\rho\int_C u\,(vdx-udy)=\frac{\rho}{2}\int_C [(v^2-u^2)\,dy+2uvdx],$$

$$P_y=-\frac{\rho}{2}\int_C (u^2+v^2)\,dx+\rho\int_C v\,(vdx-udy)=\frac{\rho}{2}\int [v^2-u^2)\,dx-2uvdy]$$

$$M=-\frac{\rho}{2}\int_C (u^2+v^2)\,(xdx+ydy)+\rho\int_C (vx-uy)\,(vdx-udy)=$$

$$=\frac{\rho}{2}\int_C [(v^2-u^2)\,(xdx-ydy)-2uv\,(ydx+xdy)].$$

Перші дві формули дають:

$$\overline{\mathfrak{P}}=P_x-i\,P_y=\frac{\rho}{2}\int\limits_C[(v^2-u^2)(dy-idx)+2uv(dx+idy)]=$$

$$=\frac{i\rho}{2}\int\limits_C[(u^2-v^2)(dx+idy)-2uvi(dx+idy)].$$

Помічаючи, що

$$dx+idy=dz \text{ і } u^2-v^2-2uvi=(u-iv)^2,$$

маємо

$$\overline{\mathfrak{P}}=\frac{i\rho}{2}\int\limits_C(u-iv)^2\,dz.$$

Пригадуючи вираз комплексної швидкости $u-iv$ через комплексний потенціял $w=\varphi+i\psi$:

$$u-iv=\frac{dw}{dz},$$

приходимо остаточно до виразу

$$\overline{\mathfrak{P}}=\frac{i\rho}{2}\int\limits_C\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz. \tag{30}$$

Це так звана перша формула Чаплиґіна—Blasius'a. Її велике значення в тому, що вона дозволяє визначити силу через комплексний потенціял за допомогою комплексного інтеґрування.

Переходячи до виразу для моменту M, зауважмо, що

$$-z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz=-(x+iy)(u-iv)^2(dx+idy)=$$

$$=\{(v^2-u^2)(xdx-ydy)-2uv(ydx+xdy)\}+$$

$$+i\,\{(v^2-u^2)(ydx+xdy)+2uv(xdx-ydy)\}.$$

Отже, вираз

$$(v^2-u^2)(xdx-ydy)-2uv(vdx+xdy),$$

що входить під знак інтеґрала у формулу для обчислення моменту M, є дійсна частина від комплексного виразу

$$-z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz.$$

Звичайно дійсну частину комплексного числа ζ позначають через $\Re$ ($\Re$ від слова reel—дійсний).

Помічаючи, що інтеґрал від дійсної частини якогось виразу дорівнює дійсній частині інтеґралу від цього виразу, маємо другу формулу Чаплиґіна—Blasius'a:

$$M=-\frac{\rho}{2}\Re\int\limits_C z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz. \tag{31}$$

Згідно з зауваженням у кінці § 3 комплексні інтеґрали у формулах (30) і (31) не зміняться, коли ми інтеґрування по контурові тіла замінимо інтеґруванням по довільному (зокрема як завгодно великому) контурові що обіймає тіло. Треба тільки, щоб поза тілом не було вихрів, але ми це припускали з самого початку.

Покажімо, що через це зауваження обчислення інтеґралів дуже спрощується. При цьому формула (30) приведе нас до відомої теореми М. Є. Жуковського.

Отже напишімо (30) і (31) у формі

$$\mathfrak{P} = \frac{i\rho}{2} \int\limits_K \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \tag{32}$$

$$M = -\frac{\rho}{2} \Re \int\limits_K z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz, \tag{33}$$

де K (рис. 29) є обвід дуже великого радіюса з центром у точці $z=0$. Тому, що в інтеґрали (32), (33) входять вартості функції $\frac{dw}{dz}$ тільки для дуже великих модулем вартостей z, то, щоб обчислити ці інтеґрали, зручно розвинути функцію $\frac{dw}{dz}$ в ряд за спадними степенями z.

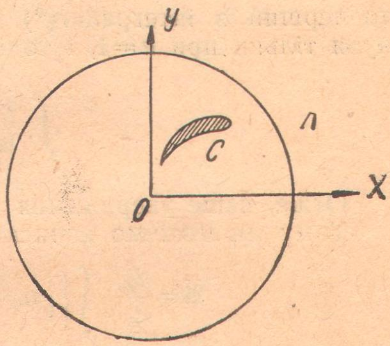

Рис. 29.

Тому, що $\frac{dw}{dz}$ є комплексна швидкість —

$$\frac{dw}{dz} = u - iv,$$

і, як ми припустили,

$$u_\infty - iv_\infty = \left(u - iv \right)_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} = -u_0 + iv_0,$$

то можна прийняти, що для досить великих $|z|$

$$\frac{dw}{dz} = -u_0 + iv_0 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3} + \dots$$

Тому

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = \left(u_0 - iv_0 \right)^2 - \frac{2A(u_0 - iv_0)}{z} + \frac{A^2 - 2B(u_0 - iv_0)}{z^2} + \frac{D_3}{z^3} + \frac{D_4}{z^4} + \dots,$$

де $A, B, C, \dots$ якісь сучинники, що їх можна вважати за відомі для заданої течії, а $D_3, D_4 \dots$ — якісь числа, що залежать від $A, B, C \dots$ і що їх не обчисляємо, бо вони нам не будуть потрібні. Зауважмо тепер, що

$$\int\limits_K z dz = \int\limits_K dz = \int\limits_K \frac{dz}{z^2} = \int\limits_K \frac{dz}{z^3} = \dots = 0$$

$$\int\limits_K \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Справді, позначаючи через R радіюс обводу кола K і вводячи полярні координати, матимемо:

$$z = Re^{i\varphi},$$

$$dz = iRe^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi,$$

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{R^n e^{in\varphi}} = \frac{1}{R^n} e^{-in\varphi} = \frac{1}{R^n} \left(\cos n\varphi - i \sin n\varphi\right),$$

тому

$$\int\limits_K z\,dz = iR^2 \int\limits_0^{2\pi} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)\, d\varphi, \tag{*}$$

$$\int\limits_K \frac{dz}{z^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \int\limits_0^{2\pi} \Big[\cos (n-1)\varphi + i \sin (n-1)\varphi \Big]\, d\varphi.$$

А що

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos n\varphi\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sin\, n\varphi\, d\varphi = 0$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

то перший з інтеґралів (*) дорівнює нулеві, а другий відрізняється від нуля тільки при $n=1$, і тоді дає

$$\int\limits_K \frac{dz}{z} = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Отже, наше твердження доведено.

Тому ми можемо написати, що

$$\overline{\mathfrak{P}} = \frac{i\rho}{2} \int\limits_K \left\{ \left(u_0 - iv_0 \right)^2 - \frac{2A\,(u_0 - iv_0)}{z} + \ldots \right\} dz =$$

$$= -i\rho A\,(u_0 - iv_0) \int\limits_K \frac{dz}{z} = -i\rho A\,(u_0 - iv_0)\, 2\pi i = 2\pi\rho A\,(u_0 - iv_0). \tag{34}$$

Так само

$$M = -\frac{\rho}{2} \Re \int\limits_K \frac{A^2 - 2B\,(u_0 - iv_0)}{z}\, dz =$$

$$= -\frac{\rho}{2} \Re \left\{ 2\pi i \Big[A^2 - 2B\,(u_0 - iv\ ) \Big] \right\} \tag{35}$$

Знайдімо тепер вартість сучинника A. Для цього пригадаймо, що циркуляція Γ дорівнює

$$\Gamma = \int\limits_C \frac{dw}{dz}\, dz.$$

Тому

$$\Gamma = \int\limits_K \frac{dw}{dz}\, dz = A \int\limits_K \frac{dz}{z} = 2\pi i A,$$

і значить

$$A = \frac{\Gamma}{2\pi i}.$$

Отже формула (34) приводить до висновку

$$\overline{\mathfrak{P}} = \frac{\rho\Gamma}{i}\,(u_0 - iv_0) = \rho\Gamma\,(-v_0 - iu_0),$$

а значить

$$\mathfrak{P} = P_x + i\,P_y = \rho\,\Gamma\,(-v_0 + iu_0),$$

звідки виходить, що

$$P_x = -\rho \Gamma v_0,$$

$$P_y = \rho \Gamma u_0. \tag{36}$$

Скористуймось тепер із формул (28) і (29), щоб знайти величину підіймальної сили та чолового опору.

Поставивши вирази (36), матимемо

$$P = \frac{1}{V_0} \rho \Gamma (u_0{}^2 + v_0{}^2) = \rho \Gamma V_0, \tag{37}$$

$$Q = 0.$$

Формули (37) і виражають теорему М. Є. Жуковського.

Теорема М. Є. Жуковського. Сила тиску потоку на одиницю довжини крила дорівнює добуткові густини течива на швидкість тіла й на циркуляцію навколо тіла; напрям сили матимемо, повернувши напрям швидкости тіла на прямий кут у напрямі циркуляції.

Таким способом ми маємо тільки підіймальну силу, а для чолового опору ми маємо нуль. Далі ми спинимось на цьому.

Перейдімо до формули (35).

Тому, що циркуляція Γ є величина дійсна, то

$$2\pi i A^2 = -\frac{\Gamma^2}{2\pi i} = \frac{\Gamma}{2\pi} i$$

є чисто уявне число, так що

$$\Re \left\{ \frac{\Gamma^2}{2\pi} i \right\} = 0$$

значить

$$M = \rho \, \Re \left\{ 2\pi i B (u_0 - i v_0) \right\}.$$

Нехай

$$B = B_1 + i B_2,$$

де B_1, B_2 дійсні числа.

Тоді

$$2\pi i B (u_0 - i v_0) = 2\pi (v_0 + i u_0)(B_1 + i B_2) =$$

$$= 2\pi \left\{ (B_1 v_0 - B_2 u_0) + i (B_1 u_0 + B_2 v_0) \right\}$$

і значить

$$M = 2\pi\rho (B_1 v_0 - B_2 u_0). \tag{38}$$

Ця формула дуже зручна до застосування; вона показує, що для того, щоб знайти момент, треба знати, крім швидкости тіла, тільки числа B_1 і B_2 у розкладі

$$\frac{dw}{dz} = (-u_0 + i v_0) + \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \frac{B_1 + i B_2}{z^2} + \ldots \tag{39}$$

Ми бачимо, що розкладати функції в ряд за спадними степенями далі не треба, досить знати тільки три перші члени.

§ 6. Поняття про конформне відтворення

У § 4 ми знайшли розв'язання плоскої задачі, коли профілем тіла є коло. Розгляньмо тепер загальний випадок, коли профіль є довільна замкнена крива, що не перетинає сама себе. У наступному розділі ми застосуємо наслідки цього параграфу до дослідження тих кривих, що є профілі крил.

Рівнобіжно з профілем, про який оце говориться, розглядаймо коло, обтікання якого ми добре дослідили.

Позначаючи, як і раніш, через z комплексну змінну для потоку, що обтікає коло (рис. 30), назвімо через $\zeta=\xi+i\eta$ комплексну змінну для потоку поза новим профілем L (рис. 31).

Для z-площини ми маємо таку формулу для комплексного потенціялу

$$f(z)=(-u_0+iv_0)\ z-(u_0+iv_0)\ \frac{a^2}{z}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\ \frac{z}{a}\ . \tag{19}$$

Тепер наше завдання полягає в тому, щоб знайти таку нову аналітичну функцію $F(\zeta)$, уявна частина якої має сталу вартість на лінії L і для якої $\frac{dF}{d\zeta}$ на безконечності набуває заданої вартости.

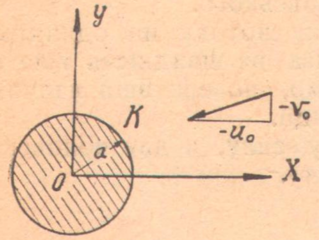

Рис. 30.

Щоб розв'язати це завдання, зауважмо таке: якщо $f(z)$ є аналітична (тобто безперервна й диференційована) функція від z і якщо $z=g(\zeta)$ є аналітична функція від ζ, то, заміняючи у функції $f(z)$ змінну z через $g(\zeta)$, ми матимемо нову функцію:

$$F(\zeta)=f[g(\zeta)]$$

від аргумента ζ, що, очевидно, буде теж аналітична.

При цьому, пригадуючи правило диференціювання складних функцій, матимемо:

$$\frac{dF}{d\zeta}=\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{d\zeta}=\frac{df}{dz}\cdot\frac{dg}{d\zeta}\ . \tag{40}$$

Уявмо собі тепер, що нам пощастило знайти таку функцію $z=g(\zeta)$, яка аналітична поза профілем L і має властивість, що: 1°— коли точка ζ описує контур L, точка $z=g(\zeta)$ описує обвід кола радіюса a з центром $z=0$; 2°,— при $\zeta=\infty$ справджуються рівності

$$g(\zeta)=\infty,\quad \frac{dg}{d\zeta}=c\ (c\text{ — дійсне число})$$

і 3°— кожній точці (ζ) поза L відповідає одна точка (z) поза K,

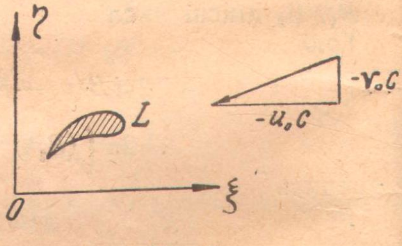

Рис. 31.

Покажімо, що, знаючи функцію $z=g(\zeta)$ можемо знайти комплексний потенціял для потоку поза L. Справді, взявши комплексний потенціял $f(z)$ для потоку поза колом K, утворюємо функцію $F(\zeta)=f\ [g(\zeta)]$. Коли ζ лежить на L, то $g(\zeta)=z$ лежить на K, а тому уявна частина функції $f[g(\zeta)]=F(\zeta)$ матиме на L сталу вартість. Далі, на підставі (40) для $\zeta=\infty$ буде

$$\frac{dF}{d\zeta}=\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{d\zeta}=(-u_0+iv_0)\ c.$$

Отже обидві умови, яким повинен відповідати комплексний потенціял справджуються. $F(\zeta)$ є комплексный потенціял для потоку поза L у припущенні, що швидкість на безконечності має складові $-u_0c$, $-v_0c$.

Ми прийшли до такого висновку: досить визначити одну тільки функцію $z=g(\zeta)$ з усіма зазначеними вже властивостями, щоб за потенціялом для потоку поза K (коло) знайти потенціял для потоку поза L (довільний профіль).

Дослідімо ближче, який сенс має співвідношення $z=g(\zeta)$.

Тому, що кожній точці (ζ) площини змінного ζ, що лежить поза L, на підставі цього співвідношення відповідає якась точка (z) поза K, то співвідношення $z=g(\zeta)$ дає якесь зображення частини ζ-площини, що лежить поза L, на частину z-площини поза K. При цьому відтворенні лінія L переходить у лінію K. Можна було б назвати таке відтворення аналітичним, бо його здійснюють за допомогою аналітичної функції.

Виведімо важливу властивість аналітичного відтворення.

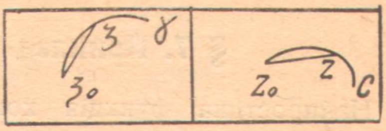

Рис. 32.

Для цього візьмімо якунебудь точку ζ_0 (рис. 32), де

$$\frac{dg}{d\zeta} \neq 0.$$

Нехай точці ζ_0 відповідає точка z_0.

Проведімо через точку ζ_0 якусь криву γ і візьмімо на ній точку $\zeta=\zeta_0+\Delta\zeta$. Нехай кривій γ відповідає крива C в площині z, а точці ζ — точка z:

$$z=z_0+\Delta z.$$

Покладаючи

$$\Delta\zeta=\rho' e^{i\Theta'},\ \Delta z=r' e^{it'},$$

тобто позначаючи через Θ' і t' кути, що їх утворюють з осями ξ і x вектори $\Delta\zeta$ і Δz на підставі означення похідної матимемо:

$$\frac{dg}{d\zeta}=\lim\frac{\Delta z}{\Delta\zeta}=\lim\frac{r'}{\rho'}e^{i(t'-\Theta')}=\frac{r}{\rho}e^{i(t-\Theta)},$$

де через t і Θ позначено кути з осями x і ξ дотичних до кривих C і γ в точках z_0 і ζ_0.

Тому, що $z=g(\zeta)$ аналітична функція, то $\dfrac{dg}{dz}$ має цілком певну вартість, що не залежить від того, яку лінію γ через точку ζ_0 ми тут вибрали.

Отже для всіх кривих γ і C, що проходять через точки ζ_0 і z_0, величина

$$t-\Theta=\mu$$

має однакову вартість.

Звідси

$$t=\Theta+\mu.$$

Це показує, що для того, щоб одержати напрям, який проходить через точку z_0 треба відповідний напрям, що проходить через точку ζ_0, повернути на якийсь певний кут μ, що залежить тільки від вибраної точки. Тому [1], якщо взяти два напрями γ_1 і γ_2 через точку ζ_0, то кут між ними дорівнюватиме кутові між відповідними напрямами C_1 і C_2, що проходять через точку z_0[1].

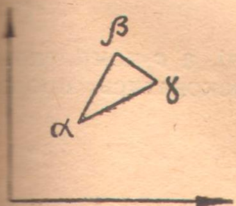

Рис. 33.

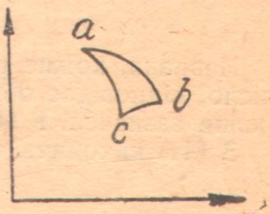

Рис. 34.

Напрям відлічування цих кутів буде однаковий в обох площинах. Коли в площині ζ взяти простолінійний трикутник з безконечно малими боками $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ (рис. 33), то йому відповідатиме в z-площині якийсь уже криволінійний трикутник (рис. 34) з тими самими внутрішніми кутами і з

[1] Так само можна довести, що при аналітичному відтворенні всі елементи, які проходять через точку ζ_0, подовжуються (або зменшуються) в однаковому маштабі.

попереднім напрямом обходу. Тому, аналітичне відтворення називають подібністю в безконечно-малих частинах або конформним відтворенням.

Подібність порушується тільки в тих точках, де $\frac{dg}{d\zeta}=0$.

Отже можна сказати, що для того, щоб визначити комплексний потенціял у випадку довільного профілю, досить знайти конформне відтворення обсягу поза цим профілем на обсяг поза колом в z-площині.

§ 7. Приклад конформного відтворення

Найпростіша функція комплексного змінного ζ є дробова лінійна функція

$$z=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta} \tag{41}$$

де α, β, γ, δ — сталі комплексні числа.

Ми припускатимемо, що $\alpha\delta-\beta\gamma$ не дорівнює нулеві.

Справді, якби $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, то ми мали б

$$z=\frac{\alpha\gamma\zeta+\beta\gamma}{\gamma(\gamma\zeta+\delta)}=\frac{\alpha(\gamma\zeta+\delta)+\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma\zeta+\delta)}=\frac{\alpha}{\gamma},$$

тобто функція звелась би до константи.

Покажімо, що функція (41) перетворює обводи кола ζ-площини на обводи кола в z-площині. При цьому умовмось просту вважати теж за обвід, але з центром на безконечності.

Для цього візьмімо якийнебудь обвід у z-площині. Нехай його рівняння має форму

$$a_0(x^2+y^2)+2a_1x+2a_2y+a_3=0,$$

де a_0, a_1, a_2, a_3 — дійсні числа (якщо $a_0=0$, то обвід перетворюється на просту).

Припускаючи, що $c=a_1+ia_2$, і зауважуючи, що

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

можемо подати рівняння взятого обводу кола в формі

$$a_0z\bar{z}+c\bar{z}+\bar{c}z+a_3=0. \tag{42}$$

Навпаки, кожне рівняння форми (42), де a_0, a_3 дійсні, а c комплексне число, відповідає обводові кола, як у цьому легко переконатись, проробивши зазначені в (42) дії.

З (41) виходить, що

$$\bar{z}=\frac{\bar{\alpha}\bar{\zeta}+\bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{\zeta}+\bar{\delta}}. \tag{43}$$

Підставляючи (41) і (43) в (42), матимемо

$$a_0(\alpha\zeta+\beta)(\bar{\alpha}\bar{\zeta}+\bar{\beta})+c(\bar{\alpha}\bar{\zeta}+\bar{\beta})(\gamma\zeta+\delta)+\bar{c}(\alpha\zeta+\beta)(\bar{\gamma}\bar{\zeta}+\bar{\delta})+(\gamma\zeta+\delta)(\bar{\gamma}\bar{\zeta}+\bar{\delta})=0.$$

Розкриваючи дужки в лівій частині, легко знайдемо, що це рівняння має форму

$$B_0\zeta\bar{\zeta}+B_1\bar{\zeta}+B_2\zeta+B_3=0, \tag{44}$$

$$B_0=a_0\alpha\bar\alpha+c\bar\alpha\gamma+\bar c\alpha\bar\gamma+\gamma\bar\gamma,$$

$$B_1=a_0\bar\alpha\beta+c\alpha\bar\delta+c\bar\beta\gamma+\delta\bar\gamma,$$

$$B_2=a_0\alpha\bar\beta+\bar c\alpha\bar\delta+c\bar\beta\gamma+\delta\bar\gamma,$$

$$B_3=a_0\beta\bar\beta+c\bar\beta\delta+\bar c\beta\bar\delta+\delta\bar\delta.$$

Тому, що B_0 і B_3 дійсні, а B_1 і B_2 комплексні супряжені, то, покладаючи, що $B_1=B$, $B_2=\bar B$, надаємо рівнянню (44) такої форми:

$$B_0\zeta\bar\zeta+B\bar\zeta+\bar B\zeta+B_3=0,$$

звідки й видно, що наше твердження справедливе, бо це рівняння має форму (42).

На цьому прикладі ми обмежимось. У кінці книжки ми даємо без виводів ряд конформних зображень, що найчастіше трапляються.