СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

1879 года.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.

1880.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *А. Питра.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщенія*.

* Изъ читанныхъ въ засѣданіяхъ математическаго общества сообщеній изданы лишь тѣ, которыхъ рукописи представлены авторами ихъ, для напечатанія, въ распорядительный комитетъ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строка.		Напечатано:	Слѣдуетъ:
12	1	сверху	$\frac{uR}{u^3}$	$\frac{\mu R}{u^3}$
30	4	—	$\frac{\int_a^x \{f_2(x)-f_1(x)\}}{\int_a^b \{f_2(x)-f_1(x)\}}$	$\frac{\int_a^x \{f_2(x)-f_1(x)\}dx}{\int_a^b \{f_2(x)-f_1(x)\}dx}$
39	5	снизу	z	k
40	11	сверху	ω , ω	ω_1 , ω_2
41	6	снизу	os	cs
43	8	сверху	$\operatorname{sn}\theta . \operatorname{sn}\theta$	$\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\theta$
48	8	снизу	$\frac{a_1}{bc}$	$\frac{x_1}{bc}$

ПРОТОКОЛЪ

предварительнаго засѣданія

математическаго общества при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ 8-го сентября 1879 года.

Получивъ отъ г. декана физико-математическаго факультета увѣдомленіе, что уставъ математическаго общества утвержденъ г. министромъ народнаго просвѣщенія 28 апрѣля 1879 года, лица, имѣющія право на основаніи 2-го параграфа этого устава считаться членами общества безъ избранія, собрались 8-го сентября сего года въ «кабинетъ для чтенія» университета для составленія изъ среды себя распорядительнаго комитета.

Избраніе членовъ комитета происходило закрытою подачею голосовъ и результаты его слѣдующіе:

Предсѣдателемъ общества избранъ бывшій профессоръ и нынѣ почетный членъ харьковскаго университета Евгеній Ильичъ Бейеръ.

Первымъ товарищемъ предсѣдателя — профессоръ Василій Григорьевичъ Имшенецкій.

Вторымъ товарищемъ предсѣдателя — профессоръ Даніилъ Михайловичъ Деларю.

Секретаремъ — доцентъ Константинъ Алексѣевичъ Андреевъ.

Вслѣдъ за симъ приступлено было къ обсужденію вопросовъ, касающихся веденія занятій общества, при чемъ сдѣланы слѣдующія постановленія:

1. Имѣть для ученыхъ сообщеній и другихъ занятій по одному очередному засѣданію каждый мѣсяцъ, исключая вакаціоннаго времени.

2. Предоставить предсѣдателю назначать сверхъ этихъ очередныхъ засѣданій еще экстренныя, если въ томъ окажется надобность.

3. Считать всякое засѣданіе возможнымъ для открытія только въ томъ случаѣ, если явившихся въ засѣданіе членовъ общества не менѣе трехъ, изъ которыхъ два — члены распорядительнаго комитета, не считая въ томъ числѣ сообщающаго.

4. Назначить первое очередное засѣданіе 22 сентября, въ 7 часовъ вечера, въ физической аудиторіи университета.

5. Увѣдомить чрезъ предсѣдателя г. попечителя харьковскаго учебнаго округа о томъ, что общество открыло свои дѣйствія, и просить его сообщить объ этомъ по округу, дабы желающіе изъ господъ преподавателей математическихъ наукъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ могли принять участіе въ педагогическихъ и другихъ занятіяхъ общества.

6. Увѣдомить о томъ-же г. ректора университета и просить его сдѣлать распоряженіе, чтобы во время засѣданій общества были допускаемы въ зданіе университета посторонніе посѣтители общества.

7. Публиковать о времени и мѣстѣ перваго очередного засѣданія въ харьковскихъ губернскихъ вѣдомостяхъ.

Е. И. Бейеръ заявилъ, что въ первое очередное засѣданіе онъ имѣетъ въ виду сдѣлать ученое сообщеніе о теоремѣ Фермата.

Протоколъ засѣданія 22 сентября

Присутствовали: Е. И. Бейеръ, В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, Ю. И. Морозовъ, А. П. Шимковъ, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій.

Предсѣдательствовалъ Е. И. Бейеръ.

По открытіи засѣданія предложены были въ члены общества:

1. Александръ Юрьевичъ Зиберъ, преподаватель харьковскаго реальнаго училища. Предлагали Ю. И. Морозовъ и Д. М. Деларю.

2. Василій Васильевичъ Шиховъ, директоръ того-же училища. Предлагалъ Д. М. Деларю.

3. Сергѣй Александровичъ Раевскій, преподаватель и инспекторъ того-же училища. Предлагалъ Д. М. Деларю.

4. Иванъ Дмитріевичъ Штукаревъ, преподаватель 2-й харьковской гимназіи. Предлагалъ А. П. Шимковъ.

5. Александръ Евгеніевичъ Рейнботъ, стипендіатъ харьковскаго университета. Предлагалъ А. П. Шимковъ.

6. Алексѣй Петровичъ Грузинцевъ, преподаватель 1-й харьковской гимназіи. Предлагалъ В. Г. Имшенецкій.

7. Петръ Матвѣевичъ Рудневъ, преподаватель 3-й харьковской гимназіи. Предлагалъ К. А. Андреевъ.

8. Болеславъ Игнатьевичъ Снарскій, преподаватель 3-й харьковской гимназіи. Предлагалъ Е. И. Бейеръ.

Вслѣдъ за предложеніями всѣ означенныя лица подвергнуты были избранію закрытою подачею голосовъ и избраны единогласно.

За симъ слушали сообщеніе «О теоремѣ Фермата», сдѣланное *Е. И. Бейеромъ*.

Изложивъ только часть своего изслѣдованія о названной теоремѣ, Е. И. Бейеръ заявилъ, что окончаніе его онъ сообщитъ въ слѣдующее засѣданіе.

Постановили: назначить экстренное засѣданіе 6-го октября, въ 7 часовъ вечера, въ физической аудиторіи университета.

Протоколъ засѣданія 6-го октября.

Присутствовали: Е. И. Бейеръ, В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, М. Ѳ. Ковальскій, Ю. И. Морозовъ, А. П. Шимковъ, С. А. Раевскій, А. П. Грузинцевъ и К. А. Андреевъ.

Предсѣдательствовалъ Е. И. Бейеръ.

По открытіи засѣданія предложены были въ члены общества и избраны:

1. Василій Яковлевичъ Стояновъ, преподаватель 2-й харьковской гимназіи. Предлагалъ Е. И. Бейеръ.

2. Ипполитъ Константиновичъ Шейдтъ, преподаватель 1-й харьковской гимназіи. Предлагалъ Е. И. Бейеръ.

3. Михаилъ Григорьевичъ Котляровъ, директоръ народныхъ училищъ курской губерніи. Предлагалъ М. Ѳ. Ковальскій.

4. Николай Михайловичъ Флавицкій, лаборантъ технологической лабораторіи харьковскаго университета. Предлагалъ М. Ѳ. Ковальскій.

5. Михаилъ Семеновичъ Косенко, преподаватель харьковской прогимназіи. Предлагалъ Е. И. Бейеръ.

Е. И. Бейеръ продолжалъ и окончилъ изложеніе своего изслѣдованія «О теоремѣ Фермата», начатое имъ въ предыдущее засѣданіе.

По окончаніи своего сообщенія Е. И. Бейеръ передалъ свою рукопись на разсмотрѣніе распорядительнаго комитета.

В. Г. Имшенецкій сообщилъ свое изслѣдованіе подъ заглавіемъ «Опредѣленіе силы, движущей по коническому сѣченію матеріальную точку, въ функціи координатъ этой точки».

Передавъ рукопись въ распорядительный комитетъ, В. Г. Имшенецкій заявилъ желаніе, чтобы его работа была напечатана въ Запискахъ университета.

Постановили: слѣдующее очередное засѣданіе назначить 20-го октября, въ 7 час. вечера, въ физической аудиторіи университета.

Опредѣленiе силы, движущей по коническому сѣченiю матерiальную точку, въ функцiи ея координатъ.

В. Г. Имшенецкаго.

Года два тому назадъ г. *Бертранъ* помѣстилъ въ отчетахъ о засѣданiяхъ парижской академiи замѣтку[1], интересъ которой обнаруживается изъ слѣдующаго вступленiя къ ней:

«Еслибъ Кеплеръ вывелъ изъ наблюденiй только одинъ изъ своихъ законовъ: *планеты описываютъ эллипсы, въ фокусѣ которыхъ находится солнце*, то можно бы изъ этого результата, возведеннаго въ общiй принципъ, заключить, что управляющая ими сила направлена къ солнцу и обратно пропорцiональна квадрату разстоянiя». Показавъ остроумное аналитическое рѣшенiе этой задачи, г. *Бертранъ* вмѣстѣ съ тѣмъ предложилъ на рѣшенiе математикамъ слѣдующее ея обобщенiе. Я опять приведу собственныя его слова.

«Было бы интересно рѣшить слѣдующiй вопросъ:

«*Зная, что планеты описываютъ коническiя сѣченiя и не предполагая ничего болѣе, найдти выраженiя слагающихъ дѣйствующихъ на нихъ силъ въ функцiяхъ координатъ точекъ ихъ приложенiя*». «Мы знаемъ два рѣшенiя: сила мо-

---

[1] Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de *Kepler* le principe de l'attraction. *Note* de M. J. *Bertrand*. Comptes rendus, 9 Avril, 1877.

жетъ быть направлена къ постоянному центру и дѣйствовать пропорціонально разстоянію или въ обратномъ отношеніи его квадрата. Существуютъ ли другія рѣшенія?». «Предыдущій способъ (т. е. способъ, употребленный г. Бертраномъ для рѣшенія упомянутаго выше частнаго случая задачи) могъ бы привести къ рѣшенію этой задачи, но вычисленія такъ сложны, что никакой геометръ, я думаю, не попытается ихъ выполнить, не найдя сначала средства ихъ упростить». Я постараюсь показать, что предугаданная г. Бертраномъ возможность упростить вычисленія заключается въ выборѣ приличной вопросу формы общаго уравненія коническихъ сѣченій.

Благодаря этой формѣ, мы рѣшимъ общую задачу, слѣдуя вполнѣ за пріемами, указанными г. Бертраномъ при рѣшеніи частнаго ея случая; встрѣчающіяся при этомъ небольшія усложненія вычисленій легко устраняются при помощи нѣкоторыхъ свойствъ опредѣлителей.

Пусть свободная матеріальная точка описываетъ коническое сѣченіе, опредѣляемое въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ x и y уравненіемъ общаго вида:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

его можно привести къ неменѣе общему виду

$$px^2 + qy^2 + 2rxy = (ax + by + c)^2, \qquad (1)$$

полагая

$$c = \sqrt{F},\ b = \frac{E}{\sqrt{F}},\ a = \frac{D}{\sqrt{F}},$$

$$p = \frac{D^2}{F} - A,\ q = \frac{E^2}{F} - C,\ r = \frac{DE}{F} - B.$$

Движеніе свободной матеріальной точки въ плоскости опредѣляется дифференціальными уравненіями:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dx'}{dt} = X, \quad \frac{dy'}{dt} = Y, \tag{2}$$

гдѣ t означаетъ время, а X и Y слагающія ускорительной силы, параллельныя осямъ x и y.

Намъ слѣдуетъ опредѣлить выраженія X и Y посредствомъ x и y, такъ чтобы уравненіе (1) было однимъ изъ интеграловъ системы уравненій (2), не заключающимъ x', y' и t. Пусть a, b, c означаютъ три произвольныя постоянныя, входящія въ этотъ интегралъ; тогда остальные коэффиціенты уравненія (1) p, q, r нужно разсматривать какъ опредѣленныя постоянныя, которыя могутъ войдти въ искомыя выраженія X и Y.

Произведемъ теперь вычисленія, необходимыя для исключенія произвольныхъ постоянныхъ a, b, c изъ ур. (1), или — вычисленія, которыя могли бы служить для повѣрки, что уравненіе (1) есть интегралъ дифференціальныхъ уравненій (2), еслибъ X и Y были извѣстны. На этомъ пути мы должны встрѣтить необходимое условіе, которому должны удовлетворять X и Y, откуда и могутъ быть найдены ихъ значенія. Для этого представимъ уравненіе (1) подъ видомъ:

$$u = ax + by + c, \tag{3}$$

положивъ

$$u^2 = px^2 + qy^2 + 2rxy. \tag{4}$$

Дифференцируя въ отношеніи t изъ (3) при помощи (2) и (4) получимъ:

$$ax' + by' = \frac{(px + ry)\,x' + (rx + qy)\,y'}{u} \tag{5}$$

Продолжая дифференцировать въ отношеніи t и пользоваться уравненіями (2) и (4), будемъ имѣть

$$aX+bY=\frac{(px+ry)\,X+(rx+qy)\,Y}{u}$$

$$+\frac{\{(px'+ry')\,x'+(rx'+qy')\,y'\}\,\{(px+ry)\,x+(rx+qy)\,y\}}{u^3}$$

$$-\frac{\{(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'\}^2}{u^3}$$

Во второй части этого уравненія множитель при $\frac{1}{u^3}$ можно, при помощи опредѣлителей, представить слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} (px+ry)\,x+(rx+qy)\,y, & (px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y' \\ (px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y', & (px'+ry')\,x'+(rx'+qy')\,y' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} px+ry, & rx+qy \\ px'+ry', & rx'+qy' \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} p, & r \\ r, & q \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix}$$

$$=(pq-r^2)\,(xy'-yx')^2.$$

Слѣдовательно предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$aX+bY=\frac{(px+ry)\,X+(rx+qy)\,Y}{u} \qquad (6)$$

$$+\frac{(pq-r^2)\,(xy'-yx')^2}{u^3}$$

Далѣе изъ (5) и (6) находимъ:

$$a=\frac{(px+ry)}{u}+\frac{(pq-r^2)\,y'\,(xy'-yx')^2}{u^3\,(Xy'-Yx')}$$

$$b=\frac{(rx+qy)}{u}-\frac{(pq-r^2)\,x'\,(xy'-yx')^2}{u^3\,(Xy'-Yx')}$$

Теперь, для окончательнаго исключенія произвольныхъ постоянныхъ, остается только любое изъ двухъ послѣднихъ уравненій, напримѣръ первое, продифференцировать въ отношеніи t, что, на основаніи (2) и (4), сначала доставитъ

$$0=\frac{(px'+qy')\left[(px+ry)x+(rx+qy)y\right]}{u^3}$$

$$-\frac{(px+qy)\left[(px+ry)x'+(rx+qy)y'\right]}{u^3}$$

$$+\frac{(pq-r^2)(xy'-yx')^2}{u^3(Xy'-Yx')}\left\{Y-3y'\frac{(px+ry)x'+(rx+qy)y'}{u^2}\right.$$

$$\left.-y'\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x}x'+\frac{\partial X}{\partial y}y'\right)y'-\left(\frac{\partial Y}{\partial x}x'+\frac{\partial Y}{\partial y}y'\right)x'}{Xy'-Yx'}\right\}$$

$$+\frac{2(pq-r^2)y'(xy'-yx')(xY-yX)}{u^3(Xy'-Yx')}.$$

Послѣ очевидныхъ приведеній, два первыхъ члена можно написать такимъ образомъ:

$$-\frac{y'}{u^3}\begin{vmatrix} px+ry, & rx+qy \\ px'+ry', & rx'+qy' \end{vmatrix}=-\frac{y}{u^3}\begin{vmatrix} p, & r \\ r, & q \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix};$$

слѣдовательно во всѣхъ членахъ уравненія войдетъ общій множитель

$$\frac{pq-r^2}{u^3}(xy'-yx')$$

отбросивъ который, получимъ:

$$0=-y$$

$$+\frac{xy'-yx'}{Xy'-Yx'}\left\{Y-3y'\frac{(px+ry)x'+(rx+py)y'}{u^2}\right.$$

$$\left.-y'\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x}x'+\frac{\partial X}{\partial y}y'\right)y'-\left(\frac{\partial Y}{\partial x}x'+\frac{\partial Y}{\partial y}y'\right)x'}{Xy'-Yx'}\right\}$$

$$+\frac{2y'(xY-yX)}{Xy'-Yx'}. \qquad (7)$$

Еслибъ искомыя выраженія X и Y какъ функціи x и y были извѣстны; то (7), какъ результатъ повѣрки, что (1) есть интегралъ (2), должно бы повѣряться при всякихъ значеніяхъ x, y, x', y'. Но оставляя X и Y неопредѣленными и дѣлая $x=x'$ и $y=y'$ въ уравненіи (7), находимъ, что по-видимому средній членъ его уничтожится, а остальные два члена даютъ

$$-y-2y=0, \text{ или } -3y=0$$

равенство, очевидно, нелѣпое. Для устраненія такого противурѣчія въ выводахъ необходимо X и Y должны имѣть такія выраженія въ x и y, при которыхъ множитель $xy'-yx'$ средняго члена уравненія (7) сократится съ его дѣлителемъ $Xy'-Yx'$. Слѣдовательно слагающія ускорительной силы должны имѣть выраженія вида:

$$X=V.x \text{ и } Y=V.y, \tag{8}$$

гдѣ V пока неизвѣстная функція отъ x и y. Это заключеніе показываетъ уже, что

$$xY-yX=0,$$

т. е. что моментъ ускорительной силы въ отношеніи начала координатныхъ осей, къ которымъ отнесено коническое сѣченіе (1), постоянно уничтожается и, слѣдовательно, что эта точка есть центръ ускорительной силы.

Подставивъ въ уравненіе (7) выраженія X и Y (8) по упрощеніи получимъ:

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}x'+\frac{\partial V}{\partial y}y'\right)+\frac{3\left[(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'\right]}{u^2}=0$$

уравненіе имѣющее мѣсто при всякихъ значеніяхъ x' и y'; поэтому оно распадается на два уравненія:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{3\,(px+ry)}{u^2}=0$$

и

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dy}+\frac{3(rx+qy)}{u^2}=0.$$

Умноживъ эти послѣднія соотвѣтственно на dx, dy и складывая, находимъ:

$$\frac{dV}{V}+\frac{3[(px+ry)\,dx+(rx+qy)\,dy]}{u^2}=0.$$

Но дифференцируя (4) имѣемъ

$$udu=(px+ry)\,dx+(rx+qy)\,dy;$$

слѣдовательно

$$\frac{dV}{V}+\frac{3du}{u}=0.$$

Интегрируя это уравненіе и означая черезъ μ произвольное постоянное, находимъ

$$V=\frac{\mu}{u^3}=\frac{\mu}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}}. \qquad (9)$$

Слѣдовательно

$$X=\frac{\mu x}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}}=\frac{\mu x}{u^3}$$

и

$$Y=\frac{\mu y}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}}=\frac{\mu y}{u^3}.$$

Отсюда имѣемъ равнодѣйствующую силъ X и Y

$$F=\frac{\mu\sqrt{x^2+y^2}}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}} \qquad (10)$$

Наконецъ, введя вмѣсто x и y радіусъ R, проведенный изъ начала, и уголъ θ, составляемый имъ съ осью x, находимъ

$$F = \frac{1}{\{{}^1\!/_2(p-q)\operatorname{Cos}2\theta + r\operatorname{Sin}2\theta + {}^1\!/_2(p+q)\}^{3/2}}\,\frac{\mu}{R^2} = \frac{uR}{u^3} \quad (11)$$

И такъ, изъ единственнаго факта, что свободное тѣло (матеріальная точка) описываетъ коническое сѣченіе, и предположенія, что дѣйствующая на него ускорительная сила измѣняется только съ положеніемъ тѣла, необходимо слѣдуетъ:

1) что направленіе силы всегда проходитъ черезъ постоянный центръ, которымъ можетъ быть однако всякая точка плоскости коническаго сѣченія;

2) что напряженіе силы F должно измѣняться вообще, какъ показываетъ формула (11), не только съ разстояніемъ R центра силы отъ движущагося тѣла, но также и съ направленіемъ его радіуса вектора.

Остается еще показать, какъ изъ этого общаго рѣшенія получится два извѣстные его частные случая, когда центръ силы предполагается въ центрѣ коническаго сѣченія или въ его фокусѣ, вслѣдствіе чего величина ускорительной силы становится независимою отъ ея направленія и будетъ въ 1-мъ случаѣ пропорціональною радіусу-вектору, а во 2-мъ обратно пропорціональною его квадрату.

Если центръ силы предположимъ въ центрѣ коническаго сѣченія; то, вмѣстѣ съ тѣмъ предполагая и начало координатъ въ этой точкѣ, будемъ имѣть

$$D=0 \text{ и } E=0$$

въ первой общей формѣ уравненій коническихъ сѣченій, а потому во второй формѣ

$$a=0,\ b=0$$

и

$$px^2+qy^2+2rxy=c^2;$$

слѣдовательно, на основаніи формулы (10),

$$F=\frac{\mu}{c^3}\,.\,R,$$

т. е. величина силы не зависитъ отъ ея направленія и прямо пропорціональна радіусу-вектору.

Если центръ силы предположимъ въ фокусѣ и примемъ его за начало координатъ, тогда проведенный изъ него радіусъ-векторъ R къ какой-нибудь точкѣ коническаго сѣченія выразится функціей первой степени ея координатъ, т. е. уравненіе (1) получитъ видъ

$$R=ax+by+c$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ

$$u=R.$$

Слѣдовательно формула (11) получитъ видъ

$$F=\frac{\mu}{R^2},$$

т. е. снова величина ускорительной силы становится независимою отъ ея направленія и измѣняется обратно пропорціонально квадрату радіуса-вектора.

Мнѣ необходимо прибавить нѣсколько словъ въ заключеніе моей предыдущей замѣтки. Я занялся рѣшеніемъ задачи г. Бертрана, какъ-только узналъ о ея существованіи. Мнѣ не трудно было предвидѣть возможность легкаго ея рѣшенія, потому что еще раньше я замѣтилъ, что интегралы дифференціальныхъ уравненій общаго вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\Phi(px^2+qy^2)x,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\Phi(px^2+qy^2)y$$

весьма просто получаются въ квадратурахъ, и что въ частномъ случаѣ

$$\Phi(px^2+qy^2)=\frac{\mu}{(px^2+qy^2)^{3/2}}$$

для траекторіи находимъ коническое сѣченіе.

Поэтому, приступивъ къ рѣшенію обратной задачи, предложенной г. Бертраномъ, я обратилъ вниманіе на то, что успѣхъ его пріемовъ зависѣлъ отъ особенной формы

$$x^2+y^2=(ax+by+c)^2,$$

которую могутъ принимать уравненія коническихъ сѣченій въ прямоугольныхъ координатахъ, когда ихъ начало въ фокусѣ.

Поэтому я выбралъ для коническихъ сѣченій форму уравненія

$$px^2\pm qy^2=(ax+by+c)^2.$$

Оказалось, что къ этой формѣ пріемы г. Бертрана вполнѣ приложимы, что ускорительная сила F и въ этомъ случаѣ должна проходить черезъ начало координатъ и выражаться формулой

$$F=\frac{\mu R}{(px^2+qy^2)^{3/2}}.$$

Моему намѣренію напечатать своевременно предыдущее рѣшеніе мое въ одномъ изъ французскихъ математическихъ журналовъ помѣшало появленіе одной статьи г. *Дарбу* [1], гдѣ онъ самъ формулируетъ рѣшаемую имъ задачу въ слѣдующихъ словахъ:

[1] Comptes rendus. T. LXXXIV, № 16 (16 Avril. 1877). «Recherche de la loi que doit suivre une force *centrale* pour que la trajéctoire qu'elle détermine soit toujours une conique». Par *M. G. Darboux.*

«Зная, что матеріальная точка, подверженная дѣйствію *центральной* силы, всегда описываетъ коническое сѣченіе, найдти выраженіе силы».

Отсюда видно, что первоначальная задача г. Бертрана измѣнена г. Дарбу прибавленіемъ новаго условія, въ ней непредположеннаго, что сила — центральная, т. е. что существуетъ законъ площадей.

Дѣйствительно, онъ основываетъ рѣшеніе на формулѣ для центральной силы *Бине:*

$$F = \frac{C^2}{R^2}\left\{\frac{1}{R} + \frac{d^2\frac{1}{R}}{d\theta^2}\right\},$$

гдѣ C удвоенная площадь, описываемая въ единицу времени радіусомъ-векторомъ R. Опредѣливъ коническое сѣченіе уравненіемъ

$$\frac{1}{R} = a\operatorname{Cos}\theta + b\operatorname{Cos}\theta + \sqrt{A\operatorname{Cos}2\theta + B\operatorname{Sin}2\theta + H},$$

и прилагая къ нему формулу Бине, г. Дарбу нашелъ

$$F = \frac{C^2}{R^2}\cdot\frac{H^2 - A^2B^2}{(A\operatorname{Cos}2\theta + B\operatorname{Sin}2\theta + H)^{3/2}}$$

Легко замѣтить, что два послѣднихъ уравненія черезъ введеніе прямоугольныхъ координатъ примутъ видъ уравненія (1) и формулы (10).

Мнѣ кажется впрочемъ, что и мое рѣшеніе не лишено нѣкотораго интереса; такъ-какъ я нимало не измѣнилъ условій, выраженныхъ самимъ авторомъ задачи, и разрѣшилъ ея общій случай тѣми-же пріемами, которые онъ придумалъ для ея частнаго случая.

Засѣданіе 20-го октября 1879 года.

Присутствовали: Е. И. Бейеръ, В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Θ. Ковальскій, А. П. Шимковъ, С. А. Раевскій, И. Д. Штукаревъ, А. Е. Рейнботъ, А. П. Грузинцевъ, П. М. Рудневъ, Б. И. Снарскій, В. Я. Стояновъ, И. К. Шейдтъ, Н. М. Флавицкій, М. С. Косенко.

Предсѣдательствовалъ Е. И. Бейеръ.

Секретарь общества доложилъ, что распорядительный комитетъ VI-го съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ прислалъ приглашеніе, въ которомъ проситъ членовъ харьковскаго математическаго общества, какъ своихъ собратій по наукѣ, почтить съѣздъ своимъ личнымъ присутствіемъ и присылкою ученыхъ трудовъ.

М. Θ. Ковальскій сдѣлалъ два сообщенія:

1. «Доказательство одного свойства интеграловъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, разрѣшенныхъ относительно произвольныхъ постоянныхъ».

2. «Изслѣдованіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка по отношенію къ ихъ разрѣшаемости въ конечной формѣ».

К. А. Андреевъ сообщилъ часть своего изслѣдованія — «о построеніи поляръ относительно плоскихъ геометрическихъ кривыхъ линій».

Постановили слѣдующее засѣданіе назначить 17-го ноября въ 7 часовъ вечера въ физической аудиторіи университета.

Протоколъ засѣданія 17 ноября 1879 года.

Присутствовали: Е. И. Бейеръ, В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, С. А. Раевскій, И. Д. Штукаревъ, А. П. Грузинцевъ, И. К. Шейдтъ, Н. М. Флавицкій, М. С. Косенко.

Предсѣдательствовалъ Е. И. Бейеръ.

Секретарь общества доложилъ, что 25 октября получено на имя общества письмо изъ г. Архангельска отъ г-на подпоручика архангельскаго батальона *О. П. Фролова*, въ которомъ этотъ послѣдній сообщаетъ свой пріемъ для построенія корней квадратнаго уравненія. Сообщеніе это разсматривалось распорядительнымъ комитетомъ, который постановилъ — доложить обществу содержаніе письма г-на Фролова въ одно изъ слѣдующихъ засѣданій.

К. А. Андреевъ продолжалъ и окончилъ сообщеніе своего изслѣдованія: «О построеніи поляръ относительно плоскихъ геометрическихъ кривыхъ линій».

А. П. Грузинцевъ изложилъ свою работу подъ названіемъ: «Вычисленіе хода лучей въ двояко-преломляющемъ кристаллѣ» и передалъ ее на разсмотрѣніе распорядительнаго комитета.

Протоколъ засѣданія 15 декабря 1879 года.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, А. П. Грузинцевъ, А. Е. Рейнботъ, П. М. Рудневъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

Д. М. Деларю сдѣлалъ сообщеніе объ одномъ предложеніи изъ теоріи сходимости безконечныхъ рядовъ.

М. Ѳ. Ковальскій сдѣлалъ сообщеніе о разложеніи тангенса въ безконечную строку.

К. А. Андреевъ доложилъ замѣтку г-на Фролова, относящуюся къ построенію корней квадратнаго уравненія.

В. Г. Имшенецкій сообщилъ свою замѣтку о задачѣ: «Раздѣлить площадь данной трапеціи на n равновеликихъ частей прямыми, параллельными двумъ ея параллельнымъ сторонамъ».

Д. М. Деларю и *В. Г. Имшенецкій* передали изложенія своихъ сообщеній для напечатанія при протоколахъ общества.

I.

ЗАМѢТКА

объ одномъ предложеніи

ИЗЪ ТЕОРІИ СХОДИМОСТИ БЕЗКОНЕЧНЫХЪ РЯДОВЪ.

Д. М. Деларю.

Въ своихъ «Exercices de Mathématiques» (T. 2, p. 221) Коши высказалъ, что *для сходимости ряда*

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots.$$

достаточно, чтобы разность

$$S_{n+m}-S_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+m-1}$$

дѣлалась безконечно-малою величиною, когда n получаетъ неизмѣримо-большое значеніе, каково бы ни было при этомъ цѣлое число, означаемое чрезъ m.

Авторитетъ Коши доставилъ этому предложенію мѣсто въ большинствѣ руководствъ по алгебрѣ и исчисленію безконечно-малыхъ, и сомнѣній относительно его справедливости, сколько мнѣ извѣстно, не высказывалось. Только въ 1860 году французскій ученый Каталанъ, въ своемъ «Traité élémentaire des séries» не только усомнился въ точности этого предложенія, но даже категорически назвалъ его *невѣрнымъ*, указавъ, что въ расходящемся рядѣ

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}+\ldots.$$

выраженіе $S_{n+m}-S_n$, при допущеніи $m=n$, принимаетъ видъ

$$\frac{1}{(n+2)\log(n+2)}+\ldots.+\frac{1}{(2n+1)\log(2n+1)}$$

и, оставаясь при всякомъ n менѣе $\frac{1}{\log n}$, съ увеличеніемъ n стремится къ нулю, откуда, по теоремѣ Коши, слѣдовало бы заключить, что рядъ сходящійся. Это замѣчаніе Каталана казалось не допускающимъ возраженій. Справедливость его призналъ Н. В. Бугаевъ въ своемъ прекрасномъ излѣдованіи «О сходимости строкъ по ихъ внѣшнему виду», а Бертранъ въ своемъ извѣстномъ «Traité de calcul différentiel et de calcul intégral», выводя достаточные признаки сходимости рядовъ, прошелъ молчаніемъ помянутую теорему Коши. Однако въ 1868 году осужденная теорема вновь появилась въ роли математической истины на страницахъ извѣстнаго «Cours de calcul différentiel et intégral» Серре (T. I, p. 137) и прекраснаго сочиненія Hoüel'я: Traité élémentaire des quantités complexes (p. 30). Ясно, что Серре и Hoüel находятъ эту теорему не подлежащею сомнѣнію и считаютъ замѣчаніе о ней Каталана неосновательнымъ. Такимъ образомъ вопросъ о справедливости этой теоремы Коши снова становится спорнымъ и требуетъ рѣшенія.

Такъ-какъ Hoüel высказываетъ только самое предложеніе, а не приводитъ его доказательства, то остается разсмотрѣть тѣ доводы, которые приводитъ въ его подтвержденіе Серре.

Самое предложеніе Серре высказываетъ въ такой формѣ:

«*Строка*

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots.\ u_{n-1},\ldots.$$

сходящаяся, когда сумма

$$u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p-1},$$

при неопредѣленно возрастающемъ n, стремится къ нулю, каково бы ни было p».

Для доказательства его Серре разсуждаетъ буквально такъ: «Дѣйствительно, означимъ чрезъ E положительное количество сколь угодно малое, а чрезъ S_n сумму первыхъ n членовъ строки. Такъ-какъ разность

$$S_{n+p}-S_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p-1}$$

стремится къ нулю, каково бы ни было p, согласно допущенію, когда n стремится къ безконечности, то n можно приписать *опредѣленное* значеніе достаточно большое для того, чтобы разность, о которой идетъ рѣчь, заключалась, каково бы ни было p, между $-E$ и $+E$. Поэтому будемъ имѣть:

$$S_n-E<S_{n+p}<S_n+E.$$

Установивъ это и оставляя n неизмѣняющимся, начнемъ увеличивать неопредѣленно p; сумма S_{n+p} будетъ оставаться заключенною между двумя опредѣленными предѣлами S_n-E и S_n+E, разность между которыми $2E$ сколь угодно мала; откуда, очевидно, слѣдуетъ, что S_{n+p} стремится къ опредѣленному предѣлу, когда p, или $n+p$, неопредѣленно возрастаетъ».

«Это доказательство пріобрѣтаетъ болѣе ясности, когда ему дается геометрическая форма. Пусть O постоянная точка оси Ox. Отложимъ на Ox отъ точки O длину $ON=S_n$, затѣмъ сдѣлаемъ $AN=NA'=E$; возьмемъ также $OP=S_{n+p}$; точка P упадетъ между A и A'.

O A N P A' x

Такимъ образомъ сумма S_{n+p} первыхъ $n+p$ членовъ нашей строки можетъ быть представлена абсциссою, конецъ которой падаетъ постоянно между двумя данными точками A и A'; слѣдовательно, она конечная величина; но сверхъ того она и опредѣленная величина, потому что разстояніе AA' можетъ сдѣлатся менѣе всякой даной длины».

Доказательство это кажется съ перваго взгляда весьма точнымъ, но, всматриваясь въ него ближе, приходишь къ заключенію, что оно не отвѣчаетъ, въ сущности, доказываемой теоремѣ. Въ самомъ дѣлѣ, самое предложеніе состоитъ въ томъ, что рядъ

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots.$$

непремѣнно сходящійся, если сумма

$$Q = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

по мѣрѣ увеличенія n стремится къ нулю, каково бы ни было число p; между тѣмъ Серре въ сущности доказываетъ, что если при достаточно большомъ n сумма Q съ увеличеніемъ p стремится къ опредѣленному предѣлу, то рядъ S сходящійся, что очевидно само собою, такъ-какъ вообще

$$S = S_n + \lim\,[Q]_{p=\infty}$$

Предположеніе n постояннымъ едвали законно, такъ-какъ характеръ выраженія Q измѣняется вообще, смотря по тому, будемъ ли предполагать возрастающимъ число n или число p, или оба эти числа одновременно. Показать это легко. Въ самомъ дѣлѣ, подчиняя члены ряда только условію убывать съ увеличеніемъ n, мы будемъ имѣть, что въ суммѣ

$$Q = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

первый членъ есть наибольшій, а послѣдній наименьшій, почему будетъ

$$p \cdot u_n > Q > p \cdot u_{n+p-1}$$

или

$$\frac{u_n}{\left(\frac{1}{p}\right)} > Q > \frac{u_{n+p-1}}{\left(\frac{1}{p}\right)}$$

Теперь, при постоянномъ n, дробь $\frac{u_n}{\left(\frac{1}{p}\right)}$ непремѣнно обращается въ безконечность вмѣстѣ съ p, а дробь $\frac{u_{n+p-1}}{\left(\frac{1}{p}\right)}$ принимаетъ неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$; напротивъ, при увеличивающемся n и постоянномъ, хотя бы и весьма большомъ p, обѣ дроби обращаются въ нуль, если только $\lim u_n = 0$; въ этомъ случаѣ Q стремится къ нулю. Наконецъ, при допущеніи, что n и p увеличиваются одновременно, характеръ обѣихъ дробей будетъ зависѣть отъ закона, связывающаго увеличеніе n съ увеличеніемъ p. Теорема Коши предполагаетъ увеличеніе n, а относительно p оставляетъ полный произволъ; поэтому ничто не мѣшаетъ допустить $p=n$, но въ такомъ случаѣ, взявъ извѣстный расходящійся рядъ,

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} + \ldots,$$

для суммы Q получимъ выраженіе

$$\frac{1}{(n+2)\log(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)\log(2n+1)}$$

и затѣмъ будемъ имѣть при всякомъ n

$$\frac{n}{(n+2)\log(n+2)} > Q > \frac{n}{(2n+1)\log(2n+1)},$$

почему въ предѣлѣ, для $n=\infty$, Q обратится въ нуль. Отсюда слѣдовало бы, что взятый рядъ сходящійся, въ то время какъ онъ расходящійся. Слѣдовательно, въ такой общей формѣ теорема Коши ошибочна. Значитъ, нельзя допускать p измѣняющимся одновременно съ n. Если же допустить p сколь угодно большимъ, но опредѣленнымъ числомъ, то теорема опять будетъ невѣрна, такъ-какъ въ такомъ случаѣ всѣ ряды, въ которыхъ

$\lim u_n = 0$, пришлось бы признавать за сходящіеся, о чемъ и рѣчи быть не можетъ. Остается понимать теорему въ томъ смыслѣ, что при опредѣленномъ n сумма Q стремится къ конечному предѣлу съ увеличеніемъ p; но въ такомъ случаѣ теорема теряетъ всякое значеніе, потому что сводится на простое утвержденіе, что всѣ сходящіеся ряды дѣйствительно сходящіеся. Вотъ почему доказывать теорему Коши, предполагая n опредѣленнымъ числомъ, какъ дѣлаетъ Серре, едва-ли законно. Желательно поэтому, чтобы теорема эта не встрѣчалась въ математическихъ руководствахъ, особенно въ такихъ, которыя пользуются всеобщею хорошею репутаціей. Теорема эта къ тому же не имѣетъ въ сущности и значенія, такъ-какъ достаточныхъ признаковъ сходимости рядовъ предложено и помимо ея немало.

II.

ЗАДАЧА.

Раздѣлить площадь данной трапеціи на n равновеликихъ частей прямыми, параллельными двумъ ея параллельнымъ сторонамъ.

В. Г. Имшенецкаго.

Легкость или трудность рѣшенія задачъ элементарной геометріи очень часто зависитъ отъ выбора неизвѣстныхъ.

Такъ, напримѣръ, въ предыдущей задачѣ при одномъ выборѣ неизвѣстныхъ приходится рѣшить только уравненіе 2-й степени и построить его корень; при другомъ—интегрировать уравненіе въ конечныхъ разностяхъ; если же обобщить выраженіе задачи, то для рѣшенія ея должно уже пользоваться свойствами опредѣленныхъ интеграловъ.

Пусть въ трапеціи $ABCD$ даны ея стороны $AB=a$, $BC=b$, $AD=c$, изъ которыхъ двѣ послѣднія между собою параллельны и $b>c$.

Требуется сторону a раздѣлить на n частей:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_x,\ a_{x+1},\ \ldots\ a_n,$$

такъ, чтобы проведенныя черезъ точки дѣленія прямыя:

$$b_1,\ b_2,\ ..\ b_{x-1},\ b_x,\ b_{x+1},\ \ldots\ b_{n-1},$$

параллельныя AD и BC и заключенныя между сторонами AB и CD, раздѣлили всю трапецію на равновеликія части.

Означивъ черезъ i уголъ наклоненія сторонъ a и b, по послѣднему условію имѣемъ

$$\frac{1}{2}(b_{x-1}+b_x)\,a_x \sin i = \frac{1}{2n}(b+c)a \sin i,$$

и

$$\frac{1}{2}(b_x+b_{x+1})\,a_{x+1} \sin i = \frac{1}{2n}(b+c)a \sin i.$$

Сокращая общаго множителя $\frac{1}{2}\sin i$, дѣля первое уравненіе на a_x, второе на a_{x+1} и вычтя изъ него предыдущее, получимъ

$$b_{x+1} - b_{x-1} = \frac{a\,(b+c)}{n}\left(\frac{1}{a_{x+1}} - \frac{1}{a_x}\right).$$

Но легко замѣтить существованіе двухъ подобныхъ треугольниковъ, пропорціональность сторонъ которыхъ даетъ пропорцію

$$\frac{b_{x+1}-b_{x-1}}{a_{x+1}+a_x} = \frac{b-c}{a}.$$

Исключивъ $b_{x+1}-b_x$ изъ двухъ предыдущихъ уравненій, получимъ

$$a_{x+1}+a_x = \frac{a^2\,(b+c)}{n(b-c)}\left(\frac{1}{a_{x+1}} - \frac{1}{a_x}\right),$$

уравненіе въ конечныхъ разностяхъ, къ интегрированію котораго приведено рѣшеніе предложенной задачи.

Интегралъ этого уравненія имѣетъ видъ

$$a_x = \sqrt{A+Bx} - \sqrt{A+B(x-1)},$$

гдѣ A произвольное постоянное, а B неопредѣленное постоянное, которое можно опредѣлить такъ, чтобы этотъ интегралъ дѣйствительно удовлетворялъ предыдущему уравненію въ конечныхъ разностяхъ.

Для этого находимъ

$$a_{x+1} = \sqrt{A+B(x+1)} - \sqrt{A+Bx},$$

$$a_{x+1} + a_x = \sqrt{A+B(x+1)} - \sqrt{A+B(x-1)},$$

$$\frac{1}{a_x} = \frac{\sqrt{A+Bx} + \sqrt{A+B(x-1)}}{B},$$

$$\frac{1}{a_{x+1}} = \frac{\sqrt{A+B(x+1)} + \sqrt{A+Bx}}{B},$$

$$\frac{1}{a_{x+1}} - \frac{1}{a_x} = \frac{\sqrt{A+B(x+1)} - \sqrt{A+B(x-1)}}{B}.$$

Слѣдовательно, подстановка даннаго интеграла въ предложенное уравненіе приводитъ къ слѣдующему значенію неопредѣленнаго постояннаго

$$B = \frac{a^2(b+c)}{n(b-c)}.$$

Что касается постояннаго A, то его значеніе осталось бы произвольнымъ, еслибъ задача выражалась лишь предыдущимъ уравненіемъ въ конечныхъ разностяхъ. Но изъ другихъ ея условій найдемъ для A вполнѣ опредѣленное значеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, сумма всѣхъ отрѣзковъ a_1, a_2,.. a_n стороны a должна быть ей равна. Но мы имѣемъ

$$a_1 = \sqrt{A+B} - \sqrt{A}$$

$$a_2 = \sqrt{A+2B} - \sqrt{A+B}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_n = \sqrt{A+nB} - \sqrt{A+(n-1)B}$$

и, складывая эти равенства, получимъ

$$a = \sqrt{A+nB} - \sqrt{A};$$

откуда

$$\sqrt{A} = \frac{nB - a^2}{2a} = \frac{ac}{b-c} \text{ и } A = \frac{a^2c^2}{(b-c)^2}.$$

*

Слѣдовательно

$$a_x = \frac{a}{b-c}\left\{\sqrt{c^2+\frac{1}{n}(b^2-c^2)x} - \sqrt{c^2+\frac{1}{n}(b^2-c^2)(x-1)}\right\}.$$

Также легко привести предыдущую задачу къ одному изъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ:

$$b^2_{x+1} - 2\,b^2_x + b^2_{x-1} = 0$$

и

$$b^2_{x+1} - b^2_x = \frac{b^2-c^2}{n},$$

которыхъ соотвѣтственными интегралами будутъ

$$b_x = \sqrt{A+Bx}$$

и

$$b_x = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{n}\,x + C},$$

гдѣ произвольныя постоянныя A, B, C по даннымъ условіямъ должны имѣть значенія:

$$A = c^2,\ B = \frac{b^2-c^2}{n},\ C = c^2.$$

Элементарное рѣшеніе предыдущей задачи.

Означивъ черезъ α_x отрѣзокъ, отсѣкаемый отъ AB прямой b_x, параллельной сторонамъ b и c трапеціи, и выражая, что часть ея площади, заключающаяся между параллельными c и b_x, составляетъ $\frac{x}{n}$ часть всей трапеціи, получимъ

$$(c+b_x)\,\alpha_x = a(b+c)\,\frac{x}{n}.$$

Но легко замѣтить, что

$$\frac{b_x-c}{\alpha_x} = \frac{b-c}{a}.$$

Исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій b_x, находимъ

$$\alpha^2_x + \frac{2\,ac}{b-c}\,\alpha_x = \frac{a^2(b+c)x}{n(b-c)},$$

откуда

$$\alpha_x = -\frac{a.c}{b-c} \pm \frac{a}{b-c}\sqrt{c^2 + (b^2 - c^2)\,\frac{x}{n}}\,.$$

Задачѣ соотвѣтствуетъ лишь корень съ верхнимъ знакомъ. Построеніе этого корня весьма легко. Изъ этого элементарнаго рѣшенія вытекаетъ предыдущее, потому что

$$a_x = \alpha_x - \alpha_{x-1}.$$

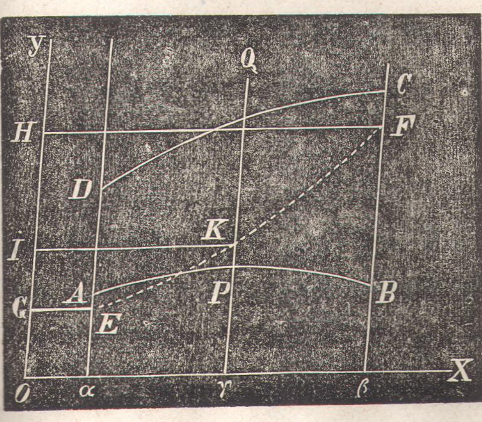
Подобнымъ-же образомъ опредѣляется неизвѣстная b_x.

Обобщеніе той-же задачи.

Назовемъ трапеціей фигуру, ограниченную двумя кривыми APB, CQD и двумя параллельными прямыми AD и BC.

Пусть требуется раздѣлить площадь $ABCD$ прямою PQ, параллельной AD и BC, на такія двѣ части, что

$$APQD : ABCD = m : n.$$



Пусть $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ уравненія кривыхъ AB и DC въ отношеніи осей OX и OY, изъ которыхъ OY параллельна AD и BC; въ отношеніи OX ординаты обѣихъ кривыхъ положительныя.

Если $O\alpha = a$, $O\beta = b$, $O\gamma = x$ абсциссы точекъ A, B, P, и $f_2(x) > f_1(x)$ отъ $x = a$ до $x = b$; то по условію задачи получимъ

$$\frac{\int_a^x \{f_2(x) - f_1(x)\}}{\int_a^b \{f_2(x) - f_1(x)\}} = \frac{m}{n}.$$

Если $\dfrac{dF(x)}{dx} = f_2(x) - f_1(x)$, то предыдущее уравненіе

приметъ видъ

$$F(x) - F(a) - \frac{m}{n}\left\{F(b) - F(a)\right\} = 0.$$

Отсюда должно быть получено единственное значеніе для x, удовлетворяющее задачѣ. Это значеніе x нетрудно построить. Между параллельными αAD и βBC проведемъ часть кривой EKF, представляемой уравненіемъ

$$Y = F(x).$$

Параллельно оси x проведемъ изъ E и F прямыя, пересѣкающія ось y въ G и H.

Отрѣзокъ GH раздѣлимъ въ точкѣ J такъ, что

$$GJ : GH = m : n.$$

Проведя изъ J параллельно оси x прямую, пересѣкающую кривую EF въ K, получимъ

$$x = JK.$$

Дѣйствительно, $OG = \alpha E = F(a)$, $OH = \beta F = F(b)$, $OJ = \gamma K = F(x)$; слѣдовательно послѣдняя пропорція приметъ видъ

$$\{F(x) - F(a)\} : \{F(b) - F(a)\} = m : n.$$

Нетрудно показать, какъ этотъ общій пріемъ примѣняется къ той частной задачѣ, которая приведена въ началѣ этой замѣтки.

Въ этомъ рѣшеніи заключается частный случай, когда параллельныя стороны AD и BC приводятся къ нулю и оно легко распространяется на тѣ случаи, когда условіе $f_1(x) < f_2(x)$ не выполняется въ промежуткѣ отъ $x=a$ до $x=b$.