ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

КОНФИГУРАЦИЯ МЁБИУСА В НЕЧЁТНОМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д. З. Гордевский
(Харьков)

Пара взаимновписанных (взаимноописанных) тетраэдров образует конфигурацию Мёбиуса в трёхмерном пространстве [1], [2], [3].

Здесь строится конфигурация Мёбиуса в произвольном нечётномерном проективном пространстве R_{2k+1}.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — три k-пространства[1] общего расположения (инцидентные данному R_{2k+1}). Через каждую точку A_1 k-пространства α_1 проходит одна прямая p_1, пересекающая α_2 и α_3 соответственно в точках A_2 и A_3. Достаточно рассмотреть $(k+1)$-пространства $A_1\alpha_2$ и $A_1\alpha_3$, которые пересекутся по прямой $A_1A_2A_3 \equiv p_1$. Построим $k+2$ таких прямых $p_1, p_2, \ldots, p_{k+2}$.

Теорема 1. Существует ∞^1 k-пространств, пересекающих все p_i.

Доказательство. Пусть p_i пересекает α_r в точке A_{ir}. Возьмём на p_1 произвольную точку A_{14}. Отметим $2k$-пространство

$$A_{14}p_2p_3\ldots p_{k+1} \equiv \beta_{k+2}.$$

Вообще, примем обозначение $A_{14}p_2p_3\ldots p_{s-1}p_{s+1}\ldots p_{k+2} \equiv \beta_s$.

β_{k+2} пересечёт p_{k+2} в точке $A_{k+2,4}$; аналогично
β_{k+1} » p_{k+1} » $A_{k+1,4}$ и т. д., наконец
β_3 » p_3 » A_{34}.

Докажем, что k-пространство $\alpha_4 \equiv A_{14}A_{34}A_{44}\ldots A_{k+1,4}A_{k+2,4}$ пересечёт p_2. В самом деле, k $2k$-пространств пересекаются по $(k+1)$-пространству, наши k $2k$-пространств $\beta_3, \beta_4, \ldots, \beta_{k+2}$ также пересекаются по $(k+1)$-пространству, но общими для них являются k-пространство α_4 и прямая p_2. Таким образом α_4 и p_2 находятся в одном $(k+1)$-пространстве и, следовательно, пересекаются. Обозначим их точку пересечения через A_{24}. Итак, каждой точке на p_1 соответствует одно k-пространство, пересекающее все p_i. Теорема доказана.

Теорема 2. Всякая прямая q, пересекающая α_1, α_2 и α_3, пересечёт также и α_4.

Доказательство. Пусть q пересекает $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ соответственно в точках Q_1, Q_2, Q_3. Пучок $2k$-пространств $p_1p_2\ldots p_k(p_1\ldots p_k\alpha_1, \ldots, p_1\ldots p_k\alpha_4)$

[1] Через k-пространство здесь обозначается k-мерное пространство.

проективен ряду $P_{k+1}(A_{k+1,1}; A_{k+1,2}; A_{k+1,3}; A_{k+1,4})$ и ряду $p_{k+2}(A_{k+2,1}; A_{k+2,2}; A_{k+2,3}; A_{k+2,4})$. Вообще $DV(A_{r1}, A_{r2}, A_{r3}, A_{r4}) = DV(A_{s1}, A_{s2}, A_{s3}, A_{s4}) = m$ $(s, r = 1, 2, \ldots, k+2)$.

Отметим на q точку Q_4 такую, чтобы $DV(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = m$; проведём через Q_4 и $p_1 p_2 \ldots p_k$ $2k$-пространство, которое должно совпасть с $p_1 p_2 \ldots p_k \alpha_4 \equiv \gamma_{12 \ldots k,4}$.

Итак, $\gamma_{12 \ldots k,4}$ содержит Q_4 и α_4, аналогично
$\gamma_{13 \ldots k+1,4}$ » Q_4 и α_4 и т. д.
$\gamma_{12 \ldots i-1, i+1, \ldots k+1,4}$ » Q_4 и α_4
$\gamma_{23 \ldots k+1,4}$ » Q_4 и α_4.

Отметим $k+1$ различных γ таких, чтобы не было прямой p_t, принадлежащей всем γ, например

$$p_2 p_3 \ldots p_{k+1} \alpha_4;\ p_1 p_3 \ldots p_{k+1} \alpha_4; \ldots p_1 p_2 p_3 \ldots p_k \alpha_4.$$

Эти $k+1$ $2k$-пространств должны пересечься по k-пространству, но они уже имеют общее k-пространство α_4, им же принадлежит Q_4, следовательно Q_4 лежит в α_4.

Итак, 3 k-пространства определяют ∞^k трансверсалей, $k+2$ прямых определяют ∞^1 k-пространств, их пересекающих. Совокупность этих прямых и k-пространств составляет образ, аналогичный линейчатой квадрике в R_3. Прямые этого образа соответствуют одной системе прямых квадрики, k-пространства соответствуют второй системе.

Построение конфигурации Мёбиуса в R_{2k+1}

Дан в R_{2k+1} $(2k+2)$-эдр $A_1 A_2 A_3 \ldots A_k A_{k+1} \ldots A_{2k} A_{2k+1} A_{2k+2}$; построить второй $(2k+2)$-эдр $B_1 B_2 \ldots B_{2k} B_{2k+1} B_{k+2}$ так, чтобы каждая вершина одного $(2k+2)$-эдра лежала в определённой гиперграни другого. Отметим $\alpha_1 \equiv A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$, $\alpha_2 \equiv A_{k+2} A_{k+3} \ldots A_{2k+2}$ и произвольное k-пространство α_3. Через все A_s проведём трансверсали p_s k-пространств $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Отметим ещё k-пространство α_4, пересекающее все p_s. Обозначим $B_{r-1} \equiv p_r \alpha_3$ $(r = 2, 3, \ldots k+1)$ и $B_{k+1} \equiv p_1 \alpha_3$, $B_{t-1} \equiv p_t \alpha_4$ $(t = k+3, k+4 \ldots 2k+2)$ и $B_{2k+2} \equiv p_{k+2} \alpha_4$. $(2k+2)$-эдр $B_1 B_2 \ldots B_{2k+2}$ будет искомым. Проверим, например, что A_λ (пусть $1 < \lambda < k+1$) лежит в $2k$-пространстве $B_1 B_2 \ldots B_{\lambda-1} B_{\lambda+1} \ldots B_{2k+1}$. A_λ и $B_{\lambda-1}$ лежат на прямой p_λ, пересекающей α_4 и, следовательно, $A_\lambda, B_{\lambda-1}, B_{k+2}, B_{k+3}, \ldots B_{2k+2}$ лежат в одном $(k+1)$-пространстве σ. Далее, $B_1, B_2, \ldots, B_{\lambda-2}, B_{\lambda+1}, B_{k+1}$ определяют $(k-2)$-пространство τ.

Пространства σ и τ определяют $2k$-пространство, в котором находятся точки $B_1, B_2, \ldots, B_{\lambda-2}, B_{\lambda-1}, A_\lambda, B_{\lambda+1}, \ldots B_{k+1}$.

Задача имеет $\infty^{(k+1)^2}$ решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мёбиус, Werke, B. I, s. 439.
2. Гильберт и Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, стр. 123.
3. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии, стр. 154.