ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII. Серия 4 1961

О НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Я. Повзнер, Г. Н. Гестрин

Введение. Целью настоящей статьи является изложение одного метода построения устойчивых конечно-разностных схем для некоторых типов линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Некоторые конечно-разностные схемы решения смешанной задачи в случае уравнения гиперболического типа были указаны О. А. Ладыженской в фундаментальной работе [1], где они были применены как для доказательства теорем существования, так и для исследования дифференциальных свойств решения. Имеется также большое число работ, посвященных построению конкретных схем для различных частных задач.

Нам представляется небезынтересным при рассмотрении уравнений, связанных в той или иной форме с законами сохранения, попытаться построить возможно более общие разностные схемы, основываясь именно на этом факте. Оказывается, что, «имитируя» с помощью конечных разностей законы сохранения или интегральные тождества, определяющие обобщенное решение или функцию Лагранжа, можно естественным образом строить большое число схем, сходящихся к решению той или иной краевой задачи.

Статья в основном посвящена изложению подобной методики на примерах уравнений гиперболического и параболического типов второго порядка.

Однако в последнем параграфе работы приведены примеры применения описанного способа к другим задачам. Идея получения конечно-разностных схем вышеуказанным способом не является новой. В частности, в работе [2] она использована для получения конечно-разностной схемы решения второй краевой задачи для эллиптического уравнения. Но общая постановка вопроса, особенно в применении к нестационарным задачам, по-видимому, представляет интерес, позволяя глубже проникнуть в существо дела. Имея в виду только построение устойчивых схем, мы всюду в дальнейшем после доказательства устойчивости схемы доказываем ее сходимость к решению краевой задачи только в слабом смысле, используя известную методику интегральных тождеств и считая известными необходимые теоремы единственности.

Обозначения:

E_n — n-мерное эвклидово пространство,
x — точки этого пространства,

D — область n-мерного пространства,

Γ — граница области D,

$Q = D \times [0,T]$ — цилиндр в $(n+1)$-мерном пространстве,

$W_2^{(1)}(Q)$ — пространство функций, имеющих в области Q обобщенные производные первого порядка из $L_2(Q)$,

$D_1^{(0)}(Q)$ — замыкание в норме $W_2^{(1)}(Q)$ совокупности всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю вблизи боковой поверхности цилиндра Q,

$D_2^{(0)}(Q)$ — замыкание в той же норме совокупности всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю вблизи боковой поверхности и верхнего основания цилиндра Q.

§ 1. Конечно-разностные операторы

Рассмотрим ограниченную область D в n-мерном пространстве E_n*. Нам понадобятся в дальнейшем некоторые операторы, определяемые ниже.

а) Операторы H_i^δ.

Операторы H_i^δ определены в $L_2(D)$ и обладают свойствами.

1) $\|H_i^\delta\| \leqslant C$, где C — константа, не зависящая от δ.

2) Для всякой непрерывно дифференцируемой в замкнутой области D функции $u(x)$ последовательность $\left\{\frac{1}{\delta} H_i^\delta u(x)\right\}$ сходится равномерно в каждой внутренней подобласти при $\delta \to 0$ к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Должны иметь место также либо свойства 3—4, либо 3′—4′.

3) Для всякой непрерывно дифференцируемой в замкнутой области функции $u(x)$

$$\max_{x \in D} \left| \frac{1}{\delta} H_i^\delta u(x) \right| \leqslant C,$$

причем константа C зависит только от оценки производных функции $u(x)$.

4) Для всякой непрерывно дифференцируемой в замкнутой области функции $u(x)$, обращающейся в нуль в граничной полоске области, последовательность $\left\{\frac{1}{\delta}(H_i^\delta)^* u(x)\right\}$ сходится равномерно при $\delta \to 0$ к $-\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в каждой внутренней подобласти и ограничена во всей области D.

3′) Для всякой непрерывно дифференцируемой в замкнутой области D функции $u(x)$, равной нулю на границе области,

$$\max_{x \in D} \left| \frac{1}{\delta} H_i^\delta u(x) \right| \leqslant C,$$

где константа C зависит только от оценки производных функции $u(x)$.

4′) Для всякой непрерывно дифференцируемой в замкнутой области D функции $u(x)$ последовательность $\left\{\frac{1}{\delta}(H_i^\delta)^* u(x)\right\}$ равномерно сходится при $\delta \to 0$ к $-\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в каждой внутренней подобласти и ограничена во всей области.

Совокупность свойств 1, 2, 3, 4 будет характеризовать в дальнейшем операторы H_i^δ, применяемые в разностных схемах для второй краевой задачи.

* В дальнейшем, не оговаривая этого каждый раз особо, мы всегда будем предполагать рассматриваемые области ограниченными.

Совокупность свойств 1, 2, 3′, 4′ будет характеризовать эти операторы в случае первой краевой задачи.

Оператор H_i^δ является обобщением оператора первой разности по переменному x_i с шагом δ.

Если область D совпадает со всем пространством E_n, то в качестве H_1^δ можно взять, например,
$u(x_1+\delta,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)-2u(x_1+3\delta,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)+u(x_1+6\delta,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$
или положить

$$H_1^\delta u=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1+s\delta,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,d\sigma(s),$$

где $\delta(s)$ — функция ограниченной вариации, достаточно быстро «убывающая» на бесконечности (например, постоянная вне некоторого интервала) и удовлетворяющая условиям:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(s)=0;\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s\,d\sigma(s)=1.$$

Для области с границей методы построения операторов H_i^δ будут указаны ниже. Сейчас же мы только отметим, что свойства 3, 3′, 4, 4′ обусловлены наличием границы и являются в известном смысле необходимыми для построения устойчивых разностных схем.

б) Операторы K_δ.

Рассмотрим оператор $Ku=\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)$,

определенный в области D.

В дальнейшем мы будем считать, что квадратичная форма $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant C_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2. \tag{1,1}$$

Исходя из того, что оператор K тесно связан с формой $(Au,\ v)=\int\limits_D\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}u_iv_j\,dx$ и что на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих очевидным однородным краевым условиям $(Au,\ v)=-(K\ u,\ v)$, мы введем форму, «имитирующую» $A(u,\ v)$, положив

$$(A_\delta u,\ v)=\int\limits_D\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u)\cdot\frac{1}{\delta}H_i^\delta(v)\,dx, \tag{2,1}$$

и определим оператор $\frac{1}{\delta^2}K_\delta$, аппроксимирующий оператор $-K$, формулой

$$(A_\delta u,\ v)=\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u,\ v\right),$$

откуда вытекает, что

$$K_\delta u=\sum_{i,\,j=1}^{n}(H_i^\delta)^*a_{ij}H_i^\delta u.$$

В дальнейшем под K и K_δ мы всегда будем подразумевать именно эти операторы. Из свойства 1 операторов H_i^δ и (3,1) немедленно следует, что оператор K_δ есть ограниченный эрмитов оператор. Из (1,1), кроме того, следует, что

$$(K_\delta u,\ u) \geqslant C_0 \sum_{i=1}^{n} \| H_i^\delta u \|^2. \tag{4,1}$$

§ 2. Гиперболическое уравнение

Мы начнем с простейшего случая второй краевой задачи для гиперболического уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Ku & 0 \leqslant t \leqslant T; \quad x \in D \\ \sum\limits_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \cos (n_j x_j) \Big|_\Gamma = 0; & u(x,\ 0) = u_0(x); \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = v_0(x). \end{cases}$$

Нам будет удобнее заменить это уравнение системой

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = Ku. \end{cases}$$

Разобьем интервал изменения времени $0 \leqslant t \leqslant T$ на n равных частей точками деления $t_\kappa = \kappa\tau$ $(\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $n\tau = T$. Полагая $u_0(x) = u_0^{(\delta)}$ и $v_0(x) = v_0^{(\delta)}$, зададим схему следующим образом:

$$\begin{cases} u_{\kappa+1}^{(\delta)}(x) = u_\kappa^{(\delta)}(x) + \tau v_{\kappa+1}^{(\delta)}(x) = u_\kappa^{(\delta)}(x) + \tau v_\kappa^{(\delta)}(x) - \dfrac{\tau^2}{\delta^2} K_\delta u_\kappa^{(\delta)}(x) \\ v_{\kappa+1}^{(\delta)}(x) = v_\kappa^{(\delta)}(x) - \dfrac{\tau}{\delta^2} K_\delta u_\kappa^{(\delta)}(x). \end{cases} \tag{1,2}$$

Такой выбор схемы продиктован следующими соображениями. Возьмем функцию Лагранжа для нашего уравнения. Она имеет вид

$$L = \int\limits_D \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\} dx.$$

Заменив входящие сюда производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ выражениями $\dfrac{1}{\delta} H_i^\delta u$ и производную по времени разностным отношением $\dfrac{u(x,\ t+\tau) - u(x,\ t)}{\tau}$, составим функцию

$$L_\delta = \int\limits_D \left\{ \left[\frac{u(x,\ t+\tau) - u(x,\ t)}{\tau} \right]^2 - \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{1}{\delta} H_j^\delta u \cdot \frac{1}{\delta} H_j^\delta u \right\} dx.$$

Приравнивая нулю вариацию интеграла $\int\limits_0^T L_\delta dt$, получим уравнение в конечных разностях:

$$\frac{u(x,\ t) - u(x,\ t-\tau)}{\tau^2} - \frac{u(x,\ t+\tau) - u(x,\ t)}{\tau^2} - \\ - \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{1}{\delta} (H_j^\delta)^* a_{ij} \frac{1}{\delta} H_i^\delta u = 0.$$

Положим $u(x,\ \kappa\tau) = u_\kappa^{(\delta)}$ и $u_{\kappa+1}^{(\delta)} - u_\kappa^{(\delta)} = \tau v_{\kappa+1}^{(\delta)}$. Это и дает нам схему (2,1). Если бы мы положили $u_{\kappa+1}^{(\delta)} - u_\kappa^{(\delta)} = \tau v_\kappa^{(\delta)}$, то пришли бы к другой схеме:

$$\begin{cases} u_{\kappa+1}^{(\delta)} = u_\kappa^{(\delta)} + \tau v_\kappa^{(\delta)} \\ v_{\kappa+1}^{(\delta)} = v_\kappa^{(\delta)} - \frac{\tau}{\delta^2} K_\delta u_{\kappa+1}^{(\delta)}. \end{cases}$$

Построим далее функции $u^{(\delta)}(x,\ t)$ и $v^{(\delta)}(x,\ t)$:

$$u^{(\delta)}(x,\ t) = \frac{t-\kappa\tau}{\tau} u_{\kappa+1}^{(\delta)}(x) + \frac{(\kappa+1)\tau - t}{\tau} u_\kappa^{(\delta)}(x) \qquad (\kappa\tau \leqslant t \leqslant (\kappa+1)\tau)$$

$$v^{(\delta)}(x,\ t) = \frac{t-\kappa\tau}{\tau} v_{\kappa+1}^{(\delta)}(x) + \frac{(\kappa+1)\tau - t}{\tau} v_\kappa^{(\delta)}(x). \qquad (2,2)$$

Введем вектор $W_\kappa^{(\delta)} = \begin{pmatrix} u_\kappa^{(\delta)} \\ v_\kappa^{(\delta)} \end{pmatrix}$ и матричный оператор $T_\delta = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau^2}{\delta^2} K_\delta & \tau \\ -\frac{\tau}{\delta^2} K_\delta & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда система равенств (1,2) коротко запишется так:

$$W_{\kappa+1}^{(\delta)} = T_\delta W_\kappa^{(\delta)}. \qquad (3,2)$$

Следуя хорошо известному пути (см., например (1,2)) определим в пространстве вектор-функций $W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ норму элемента так:

$$\| W \|_1^2 = \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u,\ u\right) + (v,\ v). \qquad (4,2)$$

Теорема 1. Пусть функция $u_0(x)$ непрерывно дифференцируема в ограниченной замкнутой области D, а $v_0(x) \in L_2(D)$. Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$ ограничены и измеримы в D. Тогда, если $\delta \to 0$ и $\tau < \frac{2(1-\varepsilon)}{\sqrt{\| K_\delta \|}} \delta$, где ε — произвольно малое положительное число, то последовательности функций $\{u^{(\delta)}(x,\ t)\}$ и $\{v^{(\delta)}(x,\ t)\}$ слабо сходятся в цилиндре Q к обобщенному решению второй краевой задачи и его производной по времени соответственно.

Под обобщенным решением, как известно, понимается в данном случае функция $u(x,\ t)$, определенная в цилиндре Q, имеющая там обобщенные частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ и удовлетворяющая следующему интегральному тождеству:

$$\int_D v_0 g_0 dx + \int_Q \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} dQ = \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} dQ, \qquad (5,2)$$

в котором $g(x,\ t)$ — произвольная функция, имеющая в Q обобщенные производные $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}$, принадлежащие $L_2(Q)$ и обращающаяся в нуль вблизи верхнего основания цилиндра Q. Кроме того, функция $u(x,\ t)$ удовлетворяет начальному условию в сильном смысле, т. е.

$$\lim_{t\to 0} \int_D \{u(x,\ t) - u_0(x)\}^2 dx = 0.$$

Доказательство состоит из двух частей. Сначала мы докажем справедливость теоремы, предполагая, что операторы T_δ^k равномерно ограничены в метрике (4,2), а затем оправдаем это последнее утверждение. Отметим, что центральным пунктом в доказательстве является установление равномерной ограниченности степеней оператора T_δ, означающее устойчивость схемы (1,2).

Лемма 1. Если функция $u_0(x)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области D и операторы T_δ^k $(k \leqslant n)$ равномерно ограничены в метрике (4,2), то последовательности $\{u^{(\delta)}(x, t)\}$, $\{v^{(\delta)}(x, t)\}$ и $\left\{\frac{1}{\delta} H_i^\delta u^{(\delta)}(x, t)\right\}$ равномерно ограничены в метрике $L_2(Q)$.

Покажем прежде всего ограниченность $v^{(\delta)}$, $u_k^{(\delta)}$, $\left\{\frac{1}{\delta} H_i^\delta u_k^{(\delta)}\right\}$. Действительно, из (3.2) вытекает:

$$\| W_k^{(\delta)} \|_{\mathrm{I}} \leqslant \| T_\delta^k \| \, \| W_0 \|_{\mathrm{I}}$$

или

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right) + (v_k^{(\delta)},\ v_k^{(\delta)}) \leqslant M\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_0,\ u_0\right) + (v_0,\ v_0)\right). \qquad (6.2)$$

В силу свойства 4 оператора H_i^δ заключаем о равномерной относительно δ и k ограниченности $\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right)$ и $(v_k^{(\delta)},\ v_k^{(\delta)})$, а из (5.1) сразу следует равномерная ограниченность $\left\| \frac{1}{\delta} H_i^\delta u_k^{(\delta)} \right\|$.

Переписывая первое из равенства схемы (1.2) в виде:

$$u_{k+1}^{(\delta)}(x) = u_k^{(\delta)}(x) + \tau v_{k+1}^{(\delta)}(x) \qquad (7.2)$$

получаем

$$\| u_{k+1}^{(\delta)} \|_{L_2(D)} \leqslant \| u_k^{(\delta)} \|_{L_2(D)} + \tau \| v_{k+1}^{(\delta)} \|_{L_2(D)} \leqslant \| u_k^{(\delta)} \|_{L_2(D)} + C\tau.$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$\| u_{k+1}^{(\delta)} \| \leqslant \| u_0 \|_{L_2(D)} + (k+1)\tau C \leqslant \| u_0 \|_{L_2(D)} + T \cdot C.$$

Теперь, обращаясь к формулам (2.2), окончательно находим:

$$\| u^{(\delta)} \|_{L_2(Q)} \leqslant \sqrt{T}\,(\| u_0 \|_{L_2(D)} + TC),$$

$$\| v^{(\delta)} \|_{L_2(Q)} \leqslant \sqrt{T} C,$$

$$\left\| \frac{1}{\delta} H_i^\delta u^{(\delta)} \right\|_{L_2(Q)} \leqslant \sqrt{T} C_1.$$

Лемма доказана.

Пользуясь слабой компактностью сферы в $L_2(Q)$, выберем такую последовательность $\delta_m \to 0$, что

$$\{u^{(\delta_m)}(x, t)\}, \quad \{v^{(\delta_m)}(x, t)\}, \quad \left\{\frac{1}{\delta_m} H_i^{\delta_m}(u^{(\delta_m)}(x, t)\right\}$$

слабо сходятся. Обозначим предельные функции через $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $u_i(x, t)$ соответственно. Все эти функции принадлежат $L_2(Q)$.

Лемма 2. Функция $u(x, t) \in W_2^{(1)}(Q)$, причем $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ и $u_i(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i}$. Возьмем произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $g(x, t)$, обращающуюся в нуль в граничной полоске цилиндра Q. Замечая, что из (2.2) следует

$$v^{(\delta)}(x, t) = \frac{u^{(\delta)}(x, t+\tau) - u^{(\delta)}(x, t)}{\tau} \qquad (8.2)$$

для всех τ, получаем при достаточно малом τ

$$\int_0^T \int_D v^{(\delta)}(x, t) g(x, t)\, dx\, dt = \int_0^T \int_D \frac{u^{(\delta)}(x, t-\tau) - u^{(\delta)}(x, t)}{-\tau} g(x, t)\, dx\, dt =$$

$$= -\int_D \int_0^T u^{(\delta)}(x, t) \frac{g(x, t+\tau) - g(x, t)}{\tau}\, dt\, dx.$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 0$, приходим к равенству

$$\int_0^T \int_D v(x, t) g(x, t)\, dx\, dt = -\int_0^T \int_D u(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}\, dx\, dt$$

и, следовательно,

$$v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Для той же функции $g(x, t)$, на основании свойства 4 оператора H_i^δ,

$$\int_0^T \int_D \frac{1}{\delta} H_i^\delta(u^{(\delta)}) g(x, t)\, dx\, dt = \int_0^T \int_D u^{(\delta)}(x, t) \frac{1}{\delta} (H_i^{(\delta)})^* g(x, t)\, dx\, dt \to$$

$$\to -\int_0^T \int_D u(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial x_i}\, dx\, dt,$$

т. е.

$$\int_0^T \int_D u_i(x, t) g(x, t)\, dx\, dt = -\int_0^T \int_D u(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial x_i}\, dx\, dt$$

и, следовательно,

$$u_i(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i}.$$

Переходим к установлению интегрального тождества. Снова возьмем произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $g(x, t)$, обращающуюся в нуль вблизи верхнего основания цилиндра Q.

Обозначим для краткости $g(x, k\tau)$ через $g_k(x)$. Умножая второе равенство схемы (1.2) на $g_k(x)$, интегрируя по D и суммируя по всем k от 1 до $n-1$, находим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_D v_{k+1}^{(\delta)} g_k dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_D v_k^{(\delta)} g_k\, dx =$$

$$= -\tau \sum_{k=0}^{n-1} \int_D \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{1}{\delta} H_i^\delta(u_k^{(\delta)}) \frac{1}{\delta} H_j^\delta(g_k)\, dx,$$

откуда

$$\int_D v_0 g_0 dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_D v_{k+1}^{(\delta)} (g_{k+1} - g_k)\, dx =$$

$$= \tau \sum_{k=0}^{n-1} \int_D \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{1}{\delta} H_i^\delta(u_k^{(\delta)}) \frac{1}{\delta} H_j^\delta(g_k)\, dx.$$

Ниже будет показано, что вычисление пределов, к которым стремятся левая и правая часть этого равенства при $\delta \to 0$, приводит к интегральному тождеству.

Для вычисления предела левой части равенства сравним входящую туда сумму с интегралом $\int_0^T \int_D v^{(\delta)}(x, t)\, g'_t(x, t)\, dx\, dt$, который стремится к $\int_Q \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}\, dQ$.

Имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_D v_{k+1}^{(\delta)} (g_{k+1} - g_k)\, dx - \int_0^T \int_D v^{(\delta)}(x, t)\, g'_t(x, t)\, dx\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D v_{k+1}^{(\delta)} g'_t(x, \theta_{k+1})\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_D v^{(\delta)}(x, t)\, g'_t(x, t)\, dx\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D v_{k+1}^{(\delta)} g'_t(x, t_{k+1})\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_D v^{(\delta)}(x, t)\, g'_t(x, t_{k+1})\, dx\, dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D v_{k+1}^{(\delta)} [g'_t(x, \theta_k) - g'_t(x, t_{k+1})]\, dx -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_D v^{(\delta)}(x, t) [g'_t(x, t) - g'_t(x, t_{k+1})]\, dx\, dt.$$

Но

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D v_{k+1}^{(\delta)} [g'_t(x, \theta_k) - g'_t(x, t_{k+1})]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_Q |g''_{t^2}|\, \tau^2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_D |v_{k+1}^{(\delta)}|\, dx \leqslant \max_Q g''_{t^2} \sqrt{\operatorname{mes} D}\, n\tau^2 \max_k \| v_{k+1}^{(\delta)} \| = 0(\tau).$$

Аналогично получаем, что

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_D v^{(\delta)}(x, t) [g'_t(x, t) - g'_t(x, t_{k+1})]\, dx\, dt \right| = 0(\tau).$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_D v_{k+1}^{(\delta)} (g_{k+1} - g_k)\, dx - \int_0^T \int_D v^{(\delta)}(x, t)\, g'_t(x, t)\, dx\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D v_{k+1}^{(\delta)} g'_t(x, t_{k+1})\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_D v^{(\delta)}(x, t)\, g'_t(x, t_{k+1})\, dx\, dt +$$

$$+ 0(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D v_{k+1}^{(\delta)} g'_t(x, t_{k+1})\, dx + 0(\tau) -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{t - k\tau}{\tau} v_{k+1}^{(\delta)} + \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} v_k^{(\delta)} \right) dt\, g'_t(x, t_{k+1})\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D v_{k+1}^{(\delta)} g'_t(x, t_{k+1})\, dx - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D v_{k+1}^{(\delta)} g'_t(x, t_{k+1})\, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \tau \int_D v_k^{(\delta)} g'_t(x, t_{k+1})\, dx + 0(\tau) = 0(\tau).$$

Итак,

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\int_D v_{k+1}^{(\delta)}(g_{k+1}-g_k)\,dx=\int_D \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}\,dx\,dt.$$

Для установления предела в правой части используются аналогичные соображения: сравниваем стоящую там сумму с интегралом

$$\int_0^T\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u^{(\delta)})\cdot\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g)\,dx\,dt.$$

Имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big[\tau\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_k^{(\delta)})\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_k)\,dx-\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u^{(\delta)})\cdot\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g)dxdt\Big]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\Big[\tau\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_k^{(\delta)})\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_k)dx-\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u^{(\delta)})\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_k)dxdt\Big]+$$

$$+0(\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}\Big[\tau\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_k^{(\delta)})\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_k)\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\tau\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_{k+1}^{(\delta)})\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_k)\,dx\Big]=$$

$$=-\frac{1}{2}\tau\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_k^{(\delta)})\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_k)\,dx+0(\tau)=$$

$$=\frac{1}{2}\tau\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\Big\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_k^{(\delta)})\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_k)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\delta}H_i^{(\delta)}(u_{k+1}^{(\delta)})\frac{1}{\delta}H_j^{(\delta)}(g_k)\Big\}\,dx+0(\tau)=$$

$$=\frac{1}{2}\tau\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\Big\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_k^{(\delta)})\cdot\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_k)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_{k+1}^{(\delta)})\cdot\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_{k+1})\Big\}\,dx+0(\tau)=$$

$$=\frac{1}{2}\tau\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_0)\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_0)\,dx+0(\tau)=0(\tau).$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta\to 0}\tau\sum_{k=0}^{n-1}\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u_k^{(\delta)})\cdot\frac{1}{\delta}H_j^\delta(g_k^{(\delta)})dx=\int_Q\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}dQ.$$

Тем самым интегральное тождество установлено для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $g(x, t)$. А так как класс этих функций всюду плотен в $W_2^{(1)}(Q)$, то оно справедливо и для всякой функции из $W_2^{(1)}(Q)$. Подобно тому, как только что было установлено интегральное тождество, можно показать, что для всякой функции $\psi(x)$ из $L_2(D)$ справедливо равенство

$$\int\limits_D [u^{(\delta)}(x,\ t) - u_0(x)]\,\psi(x)\,dx = \int\limits_D \int\limits_0^t v^{(\delta)}(x,\ s)\,ds\psi(s)\,dx + 0(\tau),$$

из которого легко следует, что функция $u(x,\ t)$ удовлетворяет начальному условию в сильном смысле.

Теперь мы оправдаем исходное предположение об устойчивости схемы.

Лемма 3. Если $\tau < \frac{2(1-\varepsilon)\delta}{\sqrt{\|K_\delta\|}}$, где ε — произвольно малое положительное число, то оператор T_δ является унитарным в метрике

$$\|w\|^2_{\text{II}} = \left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u,\ u\right) - \tau\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u,\ v\right) + (v,\ v)^*. \tag{9.2}$$

Рассмотрим линейное пространство функций $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, в котором скалярное произведение введено естественным образом по формуле

$$[w_1,\ w_2] = (u_1,\ u_2) + (v_1,\ v_2). \tag{A}$$

Действующий в этом пространстве матричный оператор $T_\delta = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau^2}{\delta^2}K_\delta & \tau \\ -\frac{\tau}{\delta_2}K_\delta & 1 \end{pmatrix}$ можно привести к диагональному виду

$$T_\delta = S_\delta V_\delta S_\delta^{-1} = S_\delta \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} S_\delta^{-1},$$

где z_1 и z_2 — «характеристические корни» матрицы T_δ, определяемые формулой

$$z_{1,2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\delta^2}K_\delta \pm i\tau\sqrt{K_\delta\left(1 - \frac{\tau^2}{4\delta^2}K_\delta\right)}.$$

Операторы z_1 и z_2 при соблюдении условия леммы являются унитарными в $L_2(D)$, и тогда, очевидно, что матрица $\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ представляет собой унитарный оператор в пространстве вектор-функций w при естественной метризаци и (A).

Если теперь ввести в нашем пространстве новую метрику, положив

$$\|w\|^2_{\text{II}} = [S_\delta^{-1}w,\ S_\delta^{-1}w],$$

то в этой метрике уже сам оператор T_δ окажется унитарным. Мы увидим ниже, что эта метрика будет, как и следовало ожидать, эквивалентной метрике (4.2), играющей основную роль в нашей задаче. Легко проверить, что в качестве S_δ можно взять

$$S_\delta^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \dfrac{1 - \frac{\tau^2}{\delta^2}K_\delta - z_2}{\tau} & -1 \\[2ex] \dfrac{1 - \frac{\tau^2}{\delta^2}K_\delta - z_1}{\tau} & -1 \end{pmatrix}.$$

---

* Непосредственная проверка этого факта не представляет труда. Однако мы предпочитаем провести другое доказательство, так как использованные при этом соображения могут оказаться полезными и в других случаях. Что касается позитивности формы (9.2), то она будет следовать из леммы 4.

Тогда

$$(S_\delta^{-1})^* S_\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta^2} K_\delta & -\frac{\tau}{2\delta^2} K_\delta \\ -\frac{\tau}{2\delta^2} K_\delta & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\| w \|_{\text{II}}^2 = ((S_\delta^{-1})^* S_\delta^{-1} w, w) = \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right) - \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, v\right) + (v, v),$$

что и доказывает лемму 3.

Лемма 4. При условии $\left\| \frac{\tau^2 K_\delta}{4\delta^2} \right\| < 1 - \varepsilon$ нормы (4.2) и (9.2) эквивалентны. Эквивалентны также следующие нормы:

$$\| w \|_1^2 = \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right) + (u, u) + (v, v), \tag{10.2}$$

$$\| w \|_2^2 = \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right) + (u, u) + (v, v) - \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, v\right), \tag{11.2}$$

$$\| w \|_3^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta^2} \left(H_i^\delta\right)^* H_i^\delta u, u\right) + (u, u) + (v, v). \tag{12.2}$$

При этом в норме (11.2) справедлива оценка

$$\| T_\delta \| \leqslant 1 + 0(\tau). \tag{13.2}$$

Доказательство. Эквивалентность норм (4.2) и (9.2) следует из оценок

$$\left| \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, v\right) \right| \leqslant \sqrt{\left(\frac{\tau^2}{\delta^2} K_\delta v, v\right)} \sqrt{\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right)} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sqrt{1-\varepsilon} \sqrt{(v, v)} \sqrt{\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right)} \leqslant \sqrt{1-\varepsilon} \left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right) + (v, v) \right),$$

так что

$$(1 - \sqrt{1-\varepsilon}) \left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right) + (v, v) \right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right) - \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, v\right) + (v\ v) \right) \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \sqrt{1-\varepsilon}) \left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right) + (v, v) \right). \tag{14.2}$$

Отсюда же следует эквивалентность норм (10.2) и (11.2). Эквивалентность норм (10.2) и (12.2) следует из (1.1) и предположения об ограниченности коэффициентов оператора K в D:

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right) \leqslant 2n \sup_D |a_{ij}| \cdot C \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta^2} (H_i^\delta)^* H_i^\delta u, u \right).$$

Докажем теперь оценку (13.2).

Пусть $w' = T_\delta w$, где $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ и $w' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$. Тогда, используя инвариантность нормы (9.2), мы имеем:

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u', u'\right) + (u', u') + (v', v') - \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u', v'\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, u\right) + (v, v) - \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u, v\right) + (u', u').$$

Но

$$(u', u') = (u, u') + \tau(v, u') - \tau^2\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u, u'\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(u, u) + \frac{1}{2}(u', u') + \frac{1}{2}\tau(v, v) + \frac{1}{2}\tau(u', u') + \tau\sqrt{\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u, u\right)} \times$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{\tau^2}{\delta^2}K_\delta u', u'\right)} \leqslant \frac{1}{2}(u, u) + \left(\frac{1}{2} + 0(\tau)\right)(u', u') + \frac{1}{2}\tau\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u, u\right) + \frac{1}{2}\tau(v, v),$$

откуда

$$(u', u') \leqslant (1 + 0(\tau))\left[(u, u) + 0(\tau)\left(\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u, u\right) + (v, v)\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1 + 0(\tau))\left[(u, u) + 0(\tau)\left(\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u, u\right) - \tau\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u, v\right) + (v, v)\right)\right].$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u', u'\right) + (u', u') + (v', v') - \tau\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u', v'\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + 0(\tau))\left(\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u, u\right) + (u, u) + (v, v) - \tau\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u, v\right) + (v, v)\right),$$

а это и означает оценку (13.2).

Лемма доказана. Доказательством леммы завершается и доказательство теоремы 1, так как из эквивалентности норм следует:

$$C_1 \| T_\delta^k w_0 \|_{\mathrm{I}} = C_1 \| T_\delta w_{k-1} \|_{\mathrm{I}} \leqslant \| T_\delta w_{k-1} \|_{\mathrm{II}} =$$
$$= \| T_\delta^k w_0 \|_{\mathrm{II}} \leqslant \| w_0 \|_{\mathrm{II}} \leqslant C_2 \| w_0 \|_{\mathrm{I}},$$

отсюда

$$\| T_\delta^k \|_{\mathrm{I}} \leqslant \frac{C_2}{C_1}.$$

Переходим к изучению того случая, когда в уравнении содержатся младшие члены.

Вместо оператора K теперь рассматривается оператор $K^{(1)}$:

$$K^{(1)}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au.$$

Аппроксимирующий его оператор — $K_\delta^{(1)}$ естественно определяется формулой

$$K_\delta^{(1)}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\delta}(H_i^\delta)^* a_{ij}\frac{1}{\delta}H_i^\delta(u) - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta}H_i^\delta(u) - au =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}K_\delta u - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta}H_i^\delta(u) - au. \tag{15.2}$$

Разностная схема (1.2) заменяется схемой:

$$\begin{cases} u_{k+1}^{(\delta)}(x) = u_k^{(\delta)}(x) + \tau v_k^{(\delta)}(x) - \tau^2 K_\delta^{(1)} u_k^{(\delta)}(x) \\ v_{k+1}^{(\delta)}(x) = v_k^{(\delta)}(x) - \tau K_\delta^{(1)} u_k^{(\delta)}(x), \end{cases} \tag{16.2}$$

или короче

$$w_{k+1}^{(\delta)} = T_\delta^{(1)} w_k^{(\delta)}, \tag{17.2}$$

где матричный оператор $T_\delta^{(1)}$ может быть записан в виде

$$T_\delta^{(1)} = T_\delta - \tau\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta}H_i^\delta + a\right).$$

Лемма 5. Если $\left\|\frac{\tau^2 K_\delta}{4\delta^2}\right\| < 1 - \varepsilon$ и $k \leqslant \frac{T}{\tau}$, то операторы $(T_\delta^{(1)})^k$ равномерно ограничены в метрике (10.2).

Действительно, для произвольного вектора w в метрике (12.2) мы имеем:

$$\|(T_\delta^{(1)} - T_\delta) w\|_3^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta^2} (H_i^\delta)^* H_i^\delta \left(\tau^2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + \tau^2 a\right) u, \left(\tau^2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \tau^2 a\right) u\right) + \left(\left(\tau^2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + \tau^2 a\right) u, \left(\tau^2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + \tau^2 a\right) u\right) +$$

$$+ \left(\left(\tau \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + \tau a\right) u, \left(\tau \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + \tau a\right) u\right) =$$

$$= \left(\left(\tau^4 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta^2} (H_i^\delta)^* H_i^\delta + \tau^2 + \tau^4\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right) u, \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right) u\right) =$$

$$= 0(\tau^2)\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right) u, \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right) u\right) \leqslant 0(\tau^2) \|w\|_3^2. \quad (18.2)$$

Из (18.2) следует, что

$$T_\delta^{(1)} = T_\delta + h_\delta,$$

где h_δ — оператор, норма которого в метрике (12.2) имеет порядок $0(\tau)$ а так как в силу леммы 4 эта метрика эквивалентна метрике (11.2), то и в последней норма h_δ будет иметь тот же порядок.

Поэтому

$$\|T_\delta^{(1)}\|_2 \leqslant \|T_\delta\|_2 + \|h_\delta\|_2 \leqslant 1 + 0(\tau). \quad (19.2)$$

(Здесь мы воспользовались оценкой (13.2)).

Наконец,

$$\|T_\delta^{(1)k}\|_2 \leqslant \|T_\delta^{(1)}\|_2^k \leqslant (1 + 0(\tau))^k \leqslant (1 + 0(\tau))^{\frac{T}{\tau}} = 0(1). \quad (20.2)$$

Этим решается вопрос о распространении теоремы 1 на случай, когда в уравнении имеются младшие члены.

Остановимся еще на случае, когда коэффициенты зависят от времени. Обозначим через $K_{\delta k}$ оператор, построенный с помощью матрицы $(a_{ij}(x, k\tau))$, и в соответствии с этим через $T_{\delta k}$ операторную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau^2}{\delta^2} K_{\delta k} & \tau \\ -\frac{\tau}{\delta^2} K_{\delta k} & 1 \end{pmatrix}.$$

Разностная схема (17.2) заменяется схемой

$$W_{k+1}^{(\delta)} = T_{\delta k}^{(')} W_k^{(\delta)}. \quad (21.2)$$

С каждым из операторов $T_{\delta k}^{(')}$ связывается своя норма (11.2), которую мы для краткости обозначаем через $\|\ \|_k$.

Лемма 6. Если коэффициенты a_{ij} имеют ограниченные и непрерывные по T производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}$, то для каждого вектора W

$$\| W \|_{k+1} \leqslant (1+0(\tau)) \| W \|_k. \tag{22.2}$$

Доказательство.

$$\left| \| W \|^2_{k+1} - \| W \|^2_k \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k+1} u, u\right) - \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k+1} u,\ v\right) - \left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k} u,\ u\right) + \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k} u,\ v\right) \right| =$$

$$= \left| \tau \int\limits_D \sum_{i, j=1}^n \frac{a_{ij}(x, (k+1)\tau) - a_{ij}(x, k\tau)}{\tau} \frac{1}{\delta} H_i^\delta(u) \cdot \frac{1}{\delta} H_i^\delta(u)\, dx - \right.$$

$$- \tau^2 \int\limits_D \sum_{i, j=1}^n \frac{a_{ij}(x, (k+1)\tau) - a_{ij}(x, k\tau)}{\tau} \frac{1}{\delta} H_i^\delta(u) \cdot \frac{1}{\delta} H_j^\delta(v)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C\tau \int\limits_D \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x,\ k\tau) \frac{1}{\delta} H_i^\delta(u) \cdot \frac{1}{\delta} H_j^\delta(u)\, dx +$$

$$+ 0(\tau^2) \sqrt{\int\limits_D \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x,\ k\tau) \frac{1}{\delta} H_i^\delta(u) \frac{1}{\delta} H_j^\delta(u)\, dx} \times$$

$$\times \sqrt{\int\limits_D \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x,\ k\tau) \frac{1}{\delta} H_i^\delta(v) \cdot \frac{1}{\delta} H_j^\delta(v)\, dx} \leqslant$$

$$\leqslant 0(\tau) \left\{ \left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k} u,\ u\right) + (u,\ u) + (v,\ v) - \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k} u,\ v\right) \right\} =$$
$$= 0(\tau) \| W \|^2_k.$$

Отсюда получаем

$$\| W \|^2_{k+1} \leqslant (1 + 0(\tau)) \| W \|^2_k,$$

что и дает требуемую оценку.

Чтобы распространить теорему 1 на случай, когда коэффициенты зависят от времени, мы должны только проверить ограниченность норм $\| v_k^{(\delta)} \|_{L_2(D)}$, $\| u_k^{(\delta)} \|_{L_2(D)}$, $\left\| \frac{1}{\delta} H_i^\delta u_k^{(\delta)} \right\|_{L_2(D)}$ и справедливость интегрального тождества (5.2). Последнее требует тривиальных видоизменений в уже приведенном выше доказательстве. Заметив, что

$$W^\delta_{k+1} = T^{(')}_{\delta k} \cdot T^{(')}_{\delta k-1} \ldots T^{(')}_{\delta 0} W_0, \tag{23.2}$$

имеем:

$$\| W_{k+1} \|_k \leqslant \| T^{(')}_{\delta k} \|_k (1 + 0(\tau)) \| T^{(')}_{\delta k-1} \ldots T^{(')}_{\delta 0} W_0 \|_{k-1} \leqslant$$
$$\leqslant (1 + 0(\tau))^2 \| T^{(')}_{\delta k-1} \|_{k-1} (1 + 0(\tau)) \| T^{(')}_{\delta k-2} \ldots T^{('')}_{\delta 0} \|_{k-2} \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant (1 + 0(\tau))^{2k} \| W_0 \|_0 = 0(1) \| W_0 \|_0.$$

Из этой оценки вытекает ограниченность последовательностей:

$$(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}),\ (v_k^{(\delta)},\ v_k^{(\delta)})\ \text{ и }\ \left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k} u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right).$$

Но

$$C_0 \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{1}{\delta} H_i^{\delta} u_k^{(\delta)} \right\|^2 \leqslant \left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k} u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)} \right),$$

что и означает ограниченность последовательности $\left\{ \frac{1}{\delta} H_i^{(\delta)} u_k^{(\delta)} \right\}$.

§ 3. Параболическое уравнение

Здесь будет рассмотрена вторая краевая задача для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au.$$

Соответствующая ему схема строится так:

$$\begin{cases} u_{k+1}^{(\delta)}(x) = u_k^{(\delta)} - \tau K_\delta^{(')} u_k^{(\delta)}(x) \\ u_0^{(\delta)}(x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$K_\delta^{(')} = \frac{1}{\delta^2} K_\delta - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^{\delta} - a.$$

Положим, как и выше,

$$u^{(\delta)}(x,\ t) = \frac{t - k\tau}{\tau} u_{k+1}^{(\delta)}(x) + \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} u_k^{(\delta)}(x). \tag{2.3}$$

$$(k\tau \leqslant t \leqslant (k+1)\tau).$$

Имеет место

Теорема 2. Пусть $u_0(x)$ непрерывно дифференцируема в ограниченной замкнутой области D и коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ — ограниченные и измеримые в D функции. Тогда при $\delta \to 0$ и при соблюдении неравенства $\tau \leqslant \frac{\delta^2}{\| K_\delta \|}$ последовательность функций $\{u^{(\delta)}(x,\ t)\}$ слабо сходится в метрике $L_2(Q)$ к обобщенному решению второй смешанной задачи.

Под обобщенным решением понимается функция $u(x,\ t)$, имеющая в Q обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(Q)$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_D u_0 v_0 dx + \int_Q u \frac{\partial v}{\partial t} dQ = \int_Q \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dQ - \int_Q \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dQ - \int_Q auv dQ,$$

в котором $v(x,\ t)$ есть произвольная функция из $W_2^{(1)}(Q)$, обращающаяся в нуль вблизи верхнего основания цилиндра Q. Как и в гиперболическом случае, основным моментом доказательства является проверка ограниченности в метрике $L_2(Q)$ последовательностей $\{u^{(\delta)}(x,\ t)\}$ и $\left\{ \frac{1}{\delta} H_i^{\delta} u^{(\delta)}(x, t) \right\}$, которая только и будет проведена ниже, так как в остальном доказательства § 2 дословно переносятся на рассматриваемый случай.

Замечая, что из условия теоремы следует неравенство $1-\frac{\tau}{\delta^2}K_\delta \geqslant 0$, и умножая скалярно обе части (1.3) на $\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right)=\left(\left(1-\frac{\tau}{\delta^2}K_\delta\right)u_k^{(\delta)},\ \frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}\right)+$$
$$+\tau\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{1}{\delta}H_i^{\delta}u_k^{(\delta)},\ \frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}\right)+\tau\left(au_k^{(\delta)},\ \frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\left(\left(1-\frac{\tau}{\delta^2}K_\delta\right)\frac{1}{\delta}\sqrt{K_\delta}u_k^{(\delta)},\ \frac{1}{\delta}\sqrt{K_\delta}u_k^{(\delta)}\right)}\times$$
$$\times\sqrt{\left(\left(1-\frac{\tau}{\delta^2}K_\delta\right)\frac{1}{\delta}\sqrt{K_\delta}u_{k+1}^{(\delta)},\ \frac{1}{\delta}\sqrt{K_\delta}u_{k+1}^{(\delta)}\right)}+$$
$$+0(\sqrt{\tau})\sqrt{\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ \frac{\tau}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}\right)}+$$
$$+0(\sqrt{\tau})\sqrt{(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)})}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ \frac{\tau}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}\right)}^{\,*}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{\tau}{\delta^2}K_\delta\right)\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{\tau}{\delta^2}K_\delta\right)\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right)+$$
$$+0(\tau)\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right)+\frac{\tau}{4}\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ \frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}\right)+0(\tau)(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)})+$$
$$+\frac{\tau}{4}\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ \frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right)+$$
$$+0(\tau)\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right)+0(\tau)(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}).$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right)\leqslant(1+0(\tau))\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right)+0(\tau)(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}).\qquad(3.3)$$

---

* При оценке второго слагаемого мы воспользовались следующими очевидными неравенствами:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{1}{\delta}H_i^{\delta}u,\ \sum_{i=1}^{n}a_iH_i^{\delta}u\right)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\left(a_i\frac{1}{\delta}H_i^{\delta}u,\ a_j\frac{1}{\delta}H_j^{\delta}u\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i,\,j=1}^{n}\sqrt{\left(a_i\frac{1}{\delta}H_i^{\delta}u,\ a_i\frac{1}{\delta}H_i^{\delta}u\right)}\cdot\sqrt{\left(a_j\frac{1}{\delta}H_j^{\delta}u,\ a_j\frac{1}{\delta}H_j^{\delta}u\right)}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i,\,j=1}^{n}\max|a_i|\max|a_j|\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\delta}(H_i^{\delta})^*\frac{1}{\delta}H_i^{\delta}u,\ u\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\delta}(H_j^{\delta})^*\frac{1}{\delta}H_j^{\delta}u,\ u\right)}\leqslant$$
$$\leqslant n\left\{\max_{i,\,x}|a_i(x)|\right\}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\delta}(H_i^{\delta})^*\frac{1}{\delta}H_i^{\delta}u,\ u\right)\leqslant C\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u,\ u\right).$$

Умножая обе части (1.3) на $u_{k+1}^{(\delta)}$, получаем:

$$(u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) = (u_k^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) - \tau\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) +$$

$$+ \tau\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta u_k^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) + \tau(a u_k^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) \leqslant \frac{1}{2}(u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}) + \frac{1}{2}(u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) +$$

$$+ 0(\tau)\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right) + 0(\tau)\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) + 0(\tau)(u_k^{(\delta)}. u_k^{(\delta)}) +$$

$$+ 0(\tau)(u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}).$$

Отсюда

$$(u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) \leqslant (1 + 0(\tau))(u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}) + 0(\tau)\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right) +$$

$$+ 0(\tau)\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right). \tag{4.3}$$

Складывая неравенства (3.3) и (4.3), находим:

$$(1 - 0(\tau))\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) + (u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + 0(\tau))\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right) + (u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)})\right)$$

или, усиливая последнее неравенство —

$$(1 - 0(\tau))\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) + (u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)})\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + 0(\tau))\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right) + (u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)})\right),$$

и окончательно:

$$\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) + (u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)})\right) \leqslant (1+0(\tau))\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right) + (u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)})\right) \leqslant$$

$$\leqslant 0(1)\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_0, u_0\right) + (u_0, u_0)\right). \tag{5.3}$$

Если коэффициенты уравнения зависят от времени, то вводя операторы $K_{\delta k}$ и $K_{\delta k}^{(\prime)}$ и заменяя схему (1.3) следующей

$$u_{k+1}^{(\delta)} = u_k^{(\delta)} - \tau \frac{1}{\delta^2} K_{\delta k}^{(\prime)} u_k^{(\delta)}, \tag{6.3}$$

мы сможем, как и выше, установить для произвольной функции оценку

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k+1} u, u\right) \leqslant (1 + 0(\tau))\left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k} u, u\right), \tag{7.3}$$

которая в сочетании с неравенством (5.3) приводит к цепочке оценок:

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k} u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) + (u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + 0(\tau))\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k} u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right) + (u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)})\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + 0(\tau))^2\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta k-1} u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right) + (u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)})\right) \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant 0(1)\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_{\delta 0} u_0, u_0\right) + (u_0, u_0)\right). \tag{8.3}$$

§ 4. Неявные схемы

В этом параграфе мы укажем один метод построения неявных схем. Чтобы пояснить суть дела, обратимся, например, к случаю параболического уравнения, не содержащего младших членов. Построенную схему можно представить в виде

$$u_{k+1}^{(\delta)} = \varphi\left(\tau \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right) u_k^{(\delta)},$$

где $\varphi(x) = 1 - x$. При надлежащем выборе соотношения шагов τ и δ оператор $\varphi\left(\tau \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)$ был положительным и имел норму, меньшую единицы. Если, с другой стороны, исходить из функции $\varphi(x)$, которая для всех положительных x не превосходит по абсолютной величине единицы, то в силу известного свойства эрмитовых операторов $\varphi\left(\tau \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)$ также будет иметь норму, не большую единицы, и схема

$$u_{k+1}^{(\delta)} = \varphi\left(\tau \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right) u_k^{(\delta)} \tag{1.4}$$

сразу оказывается устойчивой уже независимо от соотношения шагов. Для того чтобы схема (1.4) формально приводила к исходному дифференциальному уравнению, надо еще потребовать, чтобы функция $\varphi(x)$ обладала также свойствами

$$\varphi(0) = 1; \quad \varphi'(0) = -1.$$

Простейшим примером такой функции, который только и будет рассмотрен нами, является следующий:

$$\varphi(x) = \frac{1 - \alpha x}{1 + \beta x}, \quad \text{где } 0 < \alpha < \beta, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Если исходное уравнение не содержит младших членов, то порожденная ею схема будет иметь вид

$$\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right) u_{k+1}^{(\delta)} = \left(1 - \tau\alpha \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right) u_k^{(\delta)}, \tag{2.4}$$

а при наличии младших членов можно взять следующую схему:

$$\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta - \tau\gamma_1 \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta - \tau\lambda_1 a\right) u_{k+1}^{(\delta)} =$$

$$= \left(1 - \tau\alpha \frac{1}{\delta^2} K_\delta + \tau\gamma_2 \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + \tau\lambda_2 a\right) u_k^{(\delta)}, \tag{3.4}$$

где

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \tag{4.4}$$

Покажем, что последовательность функций $\{u^{(\delta)}(x, t)\}$, определяемых схемой (3.4), слабо сходится к обобщенному решению задачи. При этом мы ограничимся только доказательством устойчивости. Нам надлежит только показать равномерную ограниченность последовательностей $\{(u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)})\}$ и $\left\{\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right)\right\}$. Для большей краткости доказательства примем $\gamma_1 = \lambda_1 = 0$.

Общий случай по сравнению с этим не представляет затруднений.

Разрешая (3.4) относительно $u_{k+1}^{(\delta)}$, находим *

$$u_{k+1}^{(\delta)} = \left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^{-1} \left(1 - \tau\alpha \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right) u_k^{(\delta)} +$$

$$+ \tau\left[\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + \left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^{-1} a\right] u_k^{(\delta)}. \tag{5.4}$$

Умножая далее обе части (5.4) скалярно на $\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) = \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta \left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^{-1} \left(1 - \tau\alpha \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right) u_k^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) +$$

$$+ \tau\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta \left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta u_k^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) +$$

$$+ \tau\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta \left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^{-1} a u_k^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right). \tag{6.4}$$

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta \frac{\left(1 - \tau\alpha \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2}{\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2} u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) +$$

$$+ \tau \sqrt{\left(\frac{1}{\delta^4} \frac{K_\delta^2}{\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2} u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right)} \times$$

$$\times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta u_k^{(\delta)},\ \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta u_k^{(\delta)}\right)} +$$

$$+ \tau \sqrt{\left(\frac{1}{\delta^4} \frac{K_\delta^2}{\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2} u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right)} \cdot \sqrt{(a u_k^{(\delta)},\ a u_k^{(\delta)})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta \frac{1 + \tau^2\alpha^2 \frac{1}{\delta^4} K_\delta^2}{\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2} u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) -$$

$$- \alpha\tau\left(\frac{1}{\delta^4} \frac{K_\delta^2}{\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2} u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) + \frac{\alpha\tau}{2}\left(\frac{1}{\delta^4} \frac{K_\delta^2}{\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2} u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) +$$

$$+ \frac{\tau}{2\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta u_k^{(\delta)},\ \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta u_k^{(\delta)}\right) + \frac{\tau\alpha}{2}\left(\frac{1}{\delta^4} \frac{K_\delta^2}{\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2} u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) +$$

$$+ \frac{\tau}{2\alpha}(a u_k^{(\delta)},\ a u_k^{(\delta)}) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) +$$

$$+ 0(\tau)\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right) + 0(\tau)\,(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)})\ ^{**}.$$

---

* Возможность обращения оператора $1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta$ вытекает из положительности числа β и положительности оператора K_δ.

** $\dfrac{1 + \tau^2\alpha^2 \frac{1}{\delta^4} K_\delta^2}{\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2} \leqslant \dfrac{1 + \tau^2\beta^2 \frac{1}{\delta^4} K_\delta^2}{\left(1 + \tau\beta \frac{1}{\delta^2} K_\delta\right)^2} < 1$, так как $\alpha < \beta$ по предположению.

Отсюда

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) \leqslant (1+0(\tau))\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right) + 0(\tau)\,(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}). \qquad (7,4)$$

Умножив (5.4) на $u_{k+1}^{(\delta)}$, находим:

$$(u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) = \left(\left(1+\tau\beta\frac{1}{\delta^2}K_\delta\right)^{-1}\left(1-\tau\alpha\frac{1}{\delta^2}K_\delta\right)u_k^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) +$$

$$+\tau\left(\left(1+\tau\beta\frac{1}{\delta^2}K_\delta\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{1}{\delta}H_i^\delta u_k^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) + \tau\left(\left(1+\tau\beta\frac{1}{\delta^2}K_\delta\right)^{-1} a u_k^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}) + \frac{1}{2}(u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}) + 0(\tau)\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right) +$$

$$+\,0(\tau)\,(u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}) + 0(\tau)\,(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}),$$

или

$$(u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}) \leqslant (1+0(\tau))\,(u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}) + 0(\tau)\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right). \qquad (8.4)$$

Складывая (7.4) и (8.4), приходим к окончательному неравенству

$$\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}\right) + (u_{k+1}^{(\delta)},\ u_{k+1}^{(\delta)}) \leqslant$$

$$\leqslant (1+0(\tau))\left(\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)}\right) + (u_k^{(\delta)},\ u_k^{(\delta)})\right). \qquad (9.4)$$

Переходим к рассмотрению неявных схем для гиперболического уравнения. Соображения, которыми мы руководствуемся здесь, вполне аналогичны изложенным выше для параболического уравнения. Отметим лишь, что матричный оператор T_δ, определяемый формулой

$$T_\delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{\delta^2}K_\delta & 0 \end{pmatrix}, \qquad (10.4)$$

является косоэрмитовым в метрике

$$\| W \|^2 = \left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u,\ \bar{u}\right) + (v,\ \bar{v}). \qquad (4.2')$$

Поэтому если мы введем в рассмотрение ту же функцию

$$\varphi(x) = \frac{1-\alpha x}{1+\beta x},$$

которая при соблюдении условий $|\alpha| < |\beta|$, очевидно, не превосходит по абсолютной величине единицы для всех чисто мнимых x, то сможем сразу заключить, что порождаемая ею схема

$$(1+\beta\tau T_\delta)\, W_{k+1}^{(\delta)} = (1-\alpha\tau T_\delta)\, W_k^{(\delta)} \qquad (11.4)$$

является устойчивой.

При наличии младших членов зададим схему следующим образом:

$$(1+\beta\tau T_\delta)\, W_{k+1}^{(\delta)} = \left(1-\alpha\tau T_\delta + \tau\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{1}{\delta}H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) W_k^{(\delta)}. \qquad (12.4)$$

Покажем, что последовательности $\{(u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)})\}$, $\{(v_k^{(\delta)},\ v_k^{(\delta)})\}$, $\left\{\left(\frac{1}{\delta^2}K_\delta u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right)\right\}$

равномерно ограничены. Для этого разрешим (12.4) относительно вектора $W_{k+1}^{(\delta)}$ * и, сравнивая скалярные квадраты от обеих частей полученного равенства в метрике (4.2), найдем:

$$
\begin{aligned}
(W_{k+1}^{(\delta)}, W_{k+1}^{(\delta)}) &= \left(\frac{1-\alpha\tau T_\delta}{1+\beta\tau T_\delta} W_k^{(\delta)}, \ \frac{1-\alpha\tau T_\delta}{1+\beta\tau T_\delta} W_k^{(\delta)}\right) + \\
&+ \tau\left(\frac{1-\alpha\tau T_\delta}{1+\beta\tau T_\delta} W_k^{(\delta)}, \frac{1}{1+\beta\tau T_\delta}\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}\right) + \\
&+ \tau\left(\frac{1}{1+\beta\tau T_\delta}\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}, \frac{1-\alpha\tau T_\delta}{1+\beta\tau T_\delta} W_k^{(\delta)}\right) +
\end{aligned}
$$

$$
+ \tau^2\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}, \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}\right) \leqslant (W_k^{(\delta)}, W_k^{(\delta)}) +
$$

$$
+ 2\tau \sqrt{(W_k^{(\delta)}, W_k^{(\delta)})} \times
$$

$$
\times \sqrt{\left(\frac{1}{1+\beta\tau T_\delta}\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}, \frac{1}{1+\beta\tau T_\delta}\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\right)} +
$$

$$
+ \tau^2\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}, \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}\right) \leqslant
$$

$$
\leqslant (W_k^{(\delta)}, W_k^{(\delta)}) + 2\tau \sqrt{(W_k^{(\delta)}, W_k^{(\delta)})} \times
$$

$$
\times \sqrt{\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}, \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}\right)} +
$$

$$
+ \tau^2\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)}, \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right)\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} W_k^{(\delta)},\right) =
$$

$$
= (W_k^{(\delta)}, W_k^{(\delta)}) + 2\tau \sqrt{(W_k^{(\delta)}, W_k^{(\delta)})} \times
$$

$$
\times \sqrt{\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right) u_k^{(\delta)}, \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right) u_k^{(\delta)}\right)} +
$$

$$
+ \tau^2\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right) u_k^{(\delta)}, \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{\delta} H_i^\delta + a\right) u_k^{(\delta)}\right).
$$

Отсюда

$$
\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) + \left(v_{k+1}^{(\delta)}, v_{k+1}^{(\delta)}\right) \leqslant
$$

$$
\leqslant (1 + 0(\tau))\left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right) + (v_k^{(\delta)}, v_k^{(\delta)})\right) + 0(\tau)(u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}). \qquad (13.4)
$$

* Матричным оператором, обратным к $1 + \beta\tau T_\delta$, будет оператор

$$
(1 + \beta\tau T_\delta)^{-1} = \frac{1}{1 + \tau^2\beta^2 \frac{1}{\delta^2} K_\delta} \begin{pmatrix} 1 & \tau\beta \\ -\beta\tau\frac{1}{\delta^2} K_\delta & 1 \end{pmatrix}.
$$

С другой стороны, умножая скалярно верхнее равенство схемы (12.4) на $u_{k+1}^{(\delta)}$, получим:

$$(u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) - \tau\beta (v_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) = (u_k^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) + \alpha\tau (v_k^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}),$$

откуда

$$(1 - 0(\tau)) (u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) \leqslant (u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}) + 0(\tau) (v_k^{(\delta)}, v_k^{(\delta)}) + \\ + 0(\tau) (v_{k+1}^{(\delta)}, v_{k+1}^{(\delta)}). \tag{14.4}$$

Наконец, складывая (13.4) и (14.4), получаем:

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}\right) + (v_{k+1}^{(\delta)}, v_{k+1}^{(\delta)}) + (u_{k+1}^{(\delta)}, u_{k+1}^{(\delta)}) \leqslant \\ \leqslant (1 + 0(\tau)) \left(\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)}\right) + (v_k^{(\delta)}, v_k^{(\delta)}) + (u_k^{(\delta)}, u_k^{(\delta)})\right). \tag{15.4}$$

Этим доказательство заканчивается.

§ 5. Построение конечноразностных операторов для 2-й смешанной задачи

Укажем один способ построения операторов H_i^δ. Будем исходить из какого-нибудь конечного набора n-мерных векторов $\bar{S}_p$ с целочисленными компонентами $S_p^{(k)}$ ($p = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$) и чисел μ_p^i, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\sum_{p=1}^{m} \mu_p^i = 0; \qquad \sum_{p=1}^{m} S_p^{(k)} \mu_p^i = \delta_{ik}. \tag{1.5}$$

Пусть D_δ — некоторая внутренняя подобласть основной области D, такая, что ширина полоски, заключенной между их границами, имеет порядок δ и для всех p $x + \bar{s}_p\delta \in D$, если $x \in D_\delta$.
Положим

$$H_i^\delta u = \begin{cases} \sum\limits_{p=1}^{m} u(x + \bar{s}_p\delta)\mu_p^i, & \text{если } x \in D_\delta \\ 0 & \text{если } x \in D_\delta. \end{cases} \tag{2.5}$$

Так, определенный оператор H_i^δ, очевидно, удовлетворяет требованиям 1—3, 4, перечисленным в § 1.

Если обозначить через $\widetilde{H}_i^\delta$ оператор, определенный на функциях, заданных во всем пространстве E_n, с помощью формулы

$$\widetilde{H}_i^\delta u = \sum_{p=1}^{m} u(x + \bar{s}_p\delta)\mu_p^i, \tag{3.5}$$

то мы найдем, что

$$(H_i^\delta)^* v(x) = (\widetilde{H}_i^\delta)^* \sigma_\delta(x) v(x) \quad (x \in D), \tag{4.5}$$

где $\sigma_\delta(x)$ — характеристическая функция области D_δ и

$$(\widetilde{H}_i^\delta)^* u(x) = \sum_{p=1}^{m} u(x - s_p\delta)\mu_p^i. \tag{5.5}$$

В самом деле, продолжая функцию $u(x)$ нулем на все пространство E_n, мы имеем:

$$\int\limits_D H_i^\delta u(x)\cdot v(x)\,dx = \int\limits_{E_n}\sum_{p=1}^m u(x+\bar{s}_p\delta)\,\mu_p^i\sigma_\delta(x)\,v(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_D u(x)\,(\widetilde{H}_i^\delta)^*\,\sigma_\delta(x)\cdot v(x)\,dx.$$

Если непрерывно дифференцируемая в D функция $u(x)$ равна нулю в некоторой фиксированной граничной полоске, то при достаточно малом δ

$$(H_i^\delta)^*\,u(x) = (\widetilde{H}_i^\delta)^*\,\sigma_\delta(x)u(x) = (\widetilde{H}_i^\delta)^*\,u(x).$$

Отсюда сразу следует свойство 4.

Таким образом, все предъявляемые к операторам H_i^δ требования оказываются выполненными.

Следует отметить, что при составлении разностных схем может оказаться целесообразным выбирать области D_δ по-своему для каждого из операторов H_i^δ; это может привести к некоторым упрощениям схемы вблизи границы.

Итак, резюмируя изложенные только что соображения, мы можем сформулировать следующее правило построения устойчивой схемы для второй краевой задачи.

Следует взять некоторую внутреннюю подобласть D_δ, такую, что ширина граничной полоски имеет порядок δ, и все точки $x+\bar{s}_p\delta$ лежат в D, если $x\in D_\delta$. Взять определенный во всем пространстве разностный оператор $\widetilde{H}_i^\delta u = \sum\limits_p u(x+\bar{s}_p\delta)\,\mu_p^i$ и положить $H_i^\delta = \sigma_\delta(x)\,\widetilde{H}_i^\delta$, где $\sigma_\delta(x)$ — характеристическая функция области D_δ. Оператор K_δ при этом выразится формулой

$$K_\delta = \sum_{i,\ j=1}^n (\widetilde{H}_i^\delta)^*\,\sigma_\delta(x)\,a_{ij}\sigma_\delta(x)\,\widetilde{H}_j^\delta.$$

Разностную схему получаем, подставив этот оператор в формулы (1.2).

§ 6. Построение устойчивых разностных схем для первой краевой задачи

До сих пор мы рассматривали вторую краевую задачу. Остановимся теперь коротко на первой краевой задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Ku \\ u\,|_\Gamma = 0 \end{cases} \quad u(x,\ 0) = u_0(x);\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = v_0(x).$$

При этом мы ограничимся гиперболическим уравнением и только тем случаем, когда младшие члены в уравнении отсутствуют, так как все остальные случаи не представляют ничего нового.

Как известно, обобщенным решением задачи (16) называется функция $u(x,t)$, принадлежащая в цилиндре Q классу $D_1^{(0)}(Q)$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_D v_0g_0dx + \int\limits_Q \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}\,dQ = \int\limits_Q\sum_{i,\ j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\,dQ, \tag{1.6}$$

где $g(x,\ t)$ — произвольная функция из $D_2^{(0)}(Q)$ $(g_0(x) = g(x,\ 0))$. В дальнейшем предполагается, что $u_0(x)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области D и обращается в нуль на границе области, а $v_0(x) \in L_2(D)$. Начальное условие удовлетворяется, как и для второй краевой задачи, в сильном смысле.

Пусть D_δ — некоторая внутренняя подобласть области D.

Положим

$$u_0^{(\delta)}(x) = u_0(x); \quad v_0^{(\delta)}(x) = v_0(x). \tag{2.6}$$

Пусть H_i^δ есть операторы, удовлетворяющие условиям 1, 2, 3′, 4′ из § 1, и K_δ — оператор, заданный формулой (3.1). Отправляясь от функций $u_0^{(\delta)}(x)$, $v_0^{(\delta)}(x)$, строим последовательность функций $u_\kappa^{(\delta)}(x)$, $v_\kappa^{(\delta)}(x)$ по схеме (1.2). Повторяя дословно рассуждения § 2, мы получим ограниченность последовательностей $\{u_\kappa^{(\delta)}\}$, $\{v_\kappa^{(\delta)}\}$ и $\left\{\frac{1}{\delta} H_i^{(\delta)} u_\kappa^\delta\right\}$. При этом нам прийдется пользоваться оценкой (6.2) из § 2, в которую входит величина $\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_0^{(\delta)},\, u_0^{(\delta)}\right)$. Ограниченность этой величины нам теперь гарантирует свойство 3′ операторов H_i^δ:

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta u_0^{(\delta)},\, u_0^{(\delta)}\right) \leqslant C_1 \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{1}{\delta} H_i^\delta u_0^{(\delta)} \right\|^2.$$

Это же свойство 3′ существенно и для доказательства интегрального тождества (1.6), которое сейчас достаточно установить только для непрерывно дифференцируемых функций g, обращающихся в нуль в граничной полоске области D, так как класс этих функций всюду плотен в $D_2^{(0)}(Q)$.

Далее мы легко убеждаемся, что условие 4′ влечет за собой принадлежность предельной функции $u(x, t)$ к требуемому классу $D_1^{(0)}(Q)$.

Действительно,

$$\int_D \frac{1}{\delta} H_i^\delta u^{(\delta)} v(x)\, dx = \int_D u^{(\delta)}(x, t) \frac{1}{\delta} (H_i^\delta)^* v(x)\, dx. \tag{3.6}$$

Но левая часть этого равенства стремится при $\delta \to 0$ к $\int\limits_D \frac{\partial u}{\partial x_i} v(x) dx$, а правая в силу условия 4′ имеет пределом $-\int\limits_D u(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$. Таким образом, для произвольной непрерывно дифференцируемой в замкнутой области D функции $v(x)$ мы имеем равенство

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_D u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \tag{4.6}$$

из которого уже легко заключить, что $u(x, t) \in D_1^{(0)}(Q)$.

Нам остается только фактически построить операторы, удовлетворяющие требованиям 1, 2, 3′, 4′.

Взяв ту же область D_δ, что и в предыдущем параграфе, те же векторы $\bar{s}_p$ и числа μ_p^i, положим

$$H_i^\delta u = -(\widetilde{H}_i^\delta)^* \sigma_\delta(x) \cdot u. \quad (x \in D) \tag{5.6}$$

Тогда

$$(H_i^\delta)^* u = -\sigma_\delta(x) \widetilde{H}_i^\delta u.$$

Свойства 1 и 2 очевидны. Проверим выполнимость свойств 3′, 4′. Пусть $u(x)$ обращается в нуль на границе области D и непрерывно дифференцируема во всей этой области. Пусть $u^{(\delta)}(x) = \sigma_\delta(x)\, u(x)$,

$$\frac{1}{\delta} H_i^\delta u^{(\delta)}(x) = \frac{1}{\delta} \sum_p u^{(\delta)}(x - \bar{s}_p \delta)\, \mu_p^i .$$

Эта величина ограничена при $\delta \to 0$, так как вдоль возможной линии разрыва (границы области D_δ) скачок функции $u^{(\delta)}(x)$ имеет порядок δ. Это следует из дифференцируемости функции $u(x)$, равенства ее нулю на границе области D и того, что ширина граничной плоскости имеет порядок δ. Свойство 4′ проверяется очевидным образом.

Резюмируем изложенное в настоящем параграфе следующим правилом построения устойчивой разностной схемы для первой краевой задачи.

Следует взять некоторую внутреннюю подобласть D_δ такую, что ширина граничной полоски имеет порядок δ и все точки $x + \bar{s}_p \delta$ находятся в области D_δ, когда $x \in D_\delta$. Взять определенный во всем пространстве разностный оператор $\widetilde{H}_i^\delta u = \sum\limits_p u(x + \bar{s}_p \delta)\, \mu_p^i$ и положить $H_i^\delta u = -(\widetilde{H}_i^\delta)^* \sigma_\delta(x) u$, где $\sigma_\delta(x)$ — характеристическая функция области D_δ. При этом оператор K_δ выразится с помощью формулы

$$K_\delta = \sum_{i,\ j=1}^{n} \sigma_\delta(x)\, \widetilde{H}_i^\delta a_{ij}\, (\widetilde{H}_j^\delta)^*\, \sigma_\delta(x).$$

Затем, исходя из функций $u_0^{(\delta)}$ и $v_0^{(\delta)}$, определенных формулами (2.6), построить разностную схему (1.2), в которую и подставить этот оператор.

§ 7. Добавление

Здесь на некоторых примерах динамической теории упругости будет показано, как изложенный нами метод построения устойчивых схем может быть применен к другим задачам. В качестве одного из таких примеров мы рассмотрим задачу о поперечных колебаниях тонкого упругого стержня, шарнирно закрепленного на концах. Эта задача приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{1.7}$$

и краевым условиям $u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ при $x = 0$, $x = l$. Зададим также начальные условия

$$u\,\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Нам будет удобнее вместо (1.7) и дополнительных условий взять эквивалентную систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

с краевыми условиями $v = w = 0$ при $x = 0$, $x = l$ и начальными условиями

$$v\,|_{t=0} = \psi_1(x) = \psi(x); \quad w\,|_{t=0} = \psi_2(x) = a\varphi''(x)\,^*.$$

---

* Ниже мы предполагаем, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывно дифференцируемы соответственно три раза и один раз и обращаются в нуль на концах интервала $[0, l]$.

Чтобы перейти от (1.7) к (2.7), достаточно положить

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad w = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Закон сохранения энергии для нашей задачи выражается равенством

$$\int\limits_0^l (v^2 + w^2)\,dx = \text{const}. \tag{3.7}$$

Под обобщенным решением задачи (2.7) мы будем понимать пару функций $v(x, t)$, $w(x, t)$, обладающих обобщенными производными $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ из $L_2(Q)$ и удовлетворяющих интегральным тождествам

$$-\int\limits_0^l \psi_1(x)\,v_1^{(0)}(x)\,dx - \int\limits_0^T\int\limits_0^l v\,\frac{\partial v_1}{\partial t}\,dx\,dt = a\int\limits_0^T\int\limits_0^l \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x}\,dx\,dt \tag{4.7}$$

$$\int\limits_0^l \psi_2(x)\,w_1^{(0)}(x)\,dx + \int\limits_0^T\int\limits_0^l w\,\frac{\partial w_1}{\partial t}\,dx\,dt = a\int\limits_0^T\int\limits_0^l \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\,dx\,dt,$$

где $v_1(x, t)$, $w_1(x, t) \in D_2^{(0)}(Q)$; $v_1^{(0)} = v_1(x, 0)$, $w_1^{(0)}(x) = w_1(x, 0)$, удовлетворяющих в сильном смысле начальным условиям и удовлетворяющих краевым условиям в следующем смысле.

Каковы бы ни были непрерывно дифференцируемые функции $v_1(x)$, $w_1(x)$, справедливы равенства

$$\int\limits_0^l \frac{\partial v}{\partial x}\,v_1 dx = -\int\limits_0^l v\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x}\,dx \tag{5.7}$$

$$\int\limits_0^l \frac{\partial w}{\partial x}\,w_1 dx = -\int\limits_0^l w\,\frac{\partial w_1}{\partial x}\,dx.$$

Разностная схема, соответствующая системе уравнений (2.7), запишется в виде

$$\begin{cases} v_{\kappa+1}^{(\delta)}(x) = v_\kappa^{(\delta)} + a\tau\,\frac{1}{\delta^2}\,K_\delta w_{\kappa+1}^{(\delta)}(x) & v_0^{(\delta)} = \psi_1(x) \\ w_{\kappa+1}^{(\delta)}(x) = w_\kappa^{(\delta)} - a\tau\,\frac{1}{\delta^2}\,K_\delta v_\kappa^{(\delta)}(x), & w_0^{(\delta)} = \psi_2(x) \end{cases} \tag{6.7}$$

где K_δ есть оператор, соответствующий первой краевой задаче, построенный в предыдущем параграфе.

Введя операторную матрицу

$$T_\delta = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau^2}{\delta^4}\,a^2 K_\delta^2 & \tau\,\frac{1}{\delta^2}\,aK_\delta \\ -\tau\,\frac{1}{\delta^2}\,aK_\delta & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.7}$$

с помощью которой схема (6.7) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} v_{\kappa+1}^{(\delta)} \\ w_{\kappa+1}^{(\delta)} \end{pmatrix} = T_\delta \begin{pmatrix} v_\kappa^{(\delta)} \\ w_\kappa^{(\delta)} \end{pmatrix}, \tag{8.7}$$

мы замечаем, что ее «характеристические корни»

$$z_{1,2} = 1 - \frac{\tau^2}{2\delta^4}\,a^2 K_\delta^2 \pm i\,\frac{\tau}{\delta^2}\,aK_\delta \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{4\delta^4}\,a^2 K_\delta^2}$$

являются унитарными операторами в $L_2(0, l)$ при условии $\frac{\tau}{\delta^2} < \frac{2}{a\|K_\delta\|}$. Повторяя затем рассуждения леммы 3 из § 2, мы находим, что преобразование T_δ сохраняет величину $(v, v) + (w, w) - \tau\left(\frac{a}{\delta^2} K_\delta v, w\right)$, которая для нашей схемы является аналогом полной энергии. С помощью простой оценки, подобной проведенным при доказательстве леммы 4 из § 2, мы убеждаемся, что при условии

$$\frac{\tau}{\delta^2} < \frac{2-\varepsilon}{a\|K_\delta\|} \tag{9.7}$$

норма вектора $g = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, вводимая с помощью формулы

$$\|g\|_{\mathrm{II}}^2 = (v, v) + (w, w) - \tau\left(\frac{a}{\delta^2} K_\delta v, w\right),$$

эквивалентна норме

$$\|g\|_{\mathrm{I}}^2 = (v, v) + (w, w).$$

Отсюда вытекает ограниченность последовательностей $\{v_k^{(\delta)}\}$ и $\{w_k^{(\delta)}\}$.

Если к обеим частям (6.7) применить оператор $\sqrt{\frac{1}{\delta^2} K_\delta}$, то получим также ограниченность последовательностей $\left\{\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta v_k^{(\delta)}, v_k^{\delta}\right)\right\}$, $\left\{\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta w_k^{(\delta)}, w_k^{(\delta)}\right)\right\}$. При этом нам прийдется только предположить, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, l]$ и обращаются в нуль на концах интервала.

Все перечисленное обеспечивает устойчивость разностной схемы (6.7) и вместе с тем выполнимость интегральных тождеств (4.7) и (5.7). Неизвестную функцию $u(x, t)$ найдем, как предел последовательности функций $u^{(\delta)}(x, t)$, определяемых соотношениями:

$$u_{u+1}^{(\delta)} = u_k^{(\delta)} + \tau v_k^{(\delta)}$$

$$k\tau \leqslant t \leqslant (k+1)\tau$$

$$u^{(\delta)}(x, t) = \frac{t - k\tau}{\tau} u_{k+1}^{(\delta)}(x) + \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} u_k^{(\delta)}.$$

Рассмотрение более общего случая уравнения поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b^2 u \tag{10.7}$$

(предполагается, что стержень лежит на упругом основании с пренебрежимо малой массой) проводится также просто.

Уравнение (10.7) заменяется системой

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b^2 u, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = a \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases} \tag{11.7}$$

для которой строится схема

$$g_{k+1}^{(\delta)} = T_\delta g_k^{(\delta)},$$

где $g_k^{(\delta)} = \begin{pmatrix} u_k^{(\delta)} \\ v_k^{(\delta)} \\ w_k^{(\delta)} \end{pmatrix}$ и $T_\delta = \begin{pmatrix} 1 & \tau & 0 \\ -\tau b^2 & 1 - \tau^2 a^2 \frac{1}{\delta^4} K_\delta^2 & \tau a \frac{1}{\delta^2} K_\delta \\ 0 & -\tau a \frac{1}{\delta^2} K_\delta & 1 \end{pmatrix}$.

«Характеристические корни» матрицы T_δ следующие:

$$z_1 = 1;\ z_{2,3} = 1 - \frac{\tau^2 a^2}{2} \frac{1}{\delta^4} K_\delta^2 \pm \sqrt{-\tau b^2 - \tau^2 a^2 \frac{1}{\delta^4} K_\delta^2 + \tau^4 a^4 \frac{1}{4\delta^8} K_\delta^4}.$$

При соблюдении условия $\frac{\tau}{\delta^2} < \frac{2-\varepsilon}{a\,\|K_\delta\|}$ z_2 и z_3 будут комплексно сопряженными и $\|z_2^2\| = \|z_3^2\| = 1 + \tau^2 b^2$, что и обеспечивает устойчивость схемы.

Приведенные только что примеры относились к одномерному случаю. Рассмотрение многомерного случая может быть проведено буквально таким же образом.

В качестве последнего примера рассмотрим плоскую задачу теории упругости.

Соответствующая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\[2mm] \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} X_x &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \\ Y_y &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\ X_y &= Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \quad (\lambda_1 \mu) > 0) \end{aligned} \tag{17.7}$$

Вторая краевая задача для этой системы состоит в нахождении вектор-функции $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, удовлетворяющей начальным условиям

$$w\Big|_{t=0} = w_0 = \begin{pmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \eta_0 = \begin{pmatrix} \varphi_0(x, y) \\ \psi_0(x, y) \end{pmatrix} \tag{18.7}$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} X_x l + X_y m|_\Gamma &= 0 \\ X_y l + Y_y m|_\Gamma &= 0, \end{aligned} \tag{19.7}$$

где l и m — направляющие косинусы внешней нормали к границе области. Под обобщенным решением этой задачи мы будем понимать вектор-функцию $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, такую, что существуют обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial t}$ из $L_2(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\int\limits_D (\varphi_0(x, y)\bar{u}_0(x, y) + \psi_0(x, y)\bar{v}_0(x, y)\, dxdy + \int\limits_Q \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right) dQ =$$

$$= \int\limits_Q \left\{X_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + X_y\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) + Y_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right\} dQ, \tag{20.7}$$

где $\bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$ — любая непрерывно дифференцируемая в Q вектор-функция, X_x и Y_y выражаются с помощью обобщенных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ по формулам (2.7), а функция $X_y \in L_2(Q)$ и обладает тем свойством, что для всякой непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$, обращающейся в нуль на границе области D, выполняется соотношение

$$\int\limits_Q X_y f dQ = -\int\limits_Q \left\{u \frac{\partial f}{\partial y} + v \frac{\partial f}{\partial x}\right\} dQ.$$

Билинейной формой, соответствующей матричному дифференциальному оператору, стоящему в левой части системы (17.7), будет

$$A(w, \bar{w}) = \int\limits_D \left(X_x \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + X_y\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) + Y_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) dxdy.$$

Квадратичная форма $\frac{1}{2} A(w, w))$ представляет собой потенциальную энергию деформации. Закон сохранения энергии для нашей системы выражается равенством

$$\iint\limits_{D} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \right\} dxdy + A(w, w) = \text{const}.$$

Вводя разностный аналог матричного дифференциального оператора $\frac{1}{\delta^2} K_\delta$ с помощью формулы

$$A_\delta(w, \overline{w}) = = \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta w, \overline{w}\right), \tag{21.7}$$

где $A_\delta(w, \overline{w})$ — разностный аналог формы $A(w, \overline{w})$:

$$A_\delta(w, \overline{w}) = \int\limits_{D} \left\{ \left[(\lambda + 2\mu) \frac{1}{\delta} H_1^{(\delta)} u + \lambda \frac{1}{\delta} H_2^{(\delta)} v \right] \frac{1}{\delta} H_1^{(\delta)} \overline{u} + \right.$$
$$+ \mu \left(\frac{1}{\delta} H_2^{(\delta)} u + \frac{1}{\delta} H_1^{(\delta)} v \right) \left(\frac{1}{\delta} H_2^{(\delta)} \overline{u} + \frac{1}{\delta} H_1^{(\delta)} \overline{v} \right) +$$
$$\left. + \left[(\lambda + 2\mu) \frac{1}{\delta} H_2^{(\delta)} v + \lambda \frac{1}{\delta} H_1^{(\delta)} u \right] \frac{1}{\delta} H_2^{(\delta)} v \right\} dxdy$$

и операторы $\frac{1}{\delta} H_1^{(\delta)}$, $\frac{1}{\delta} H_2^{(\delta)}$ — разностные аналоги операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ соответственно, построенные в § 6, получаем:

$$K_\delta = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)(H_1^\delta)^* H_1^\delta + \mu (H_2^\delta)^* H_2^\delta & (\lambda + \mu)(H_2^\delta)^* H_1^\delta \\ (\lambda + \mu)(H_1^\delta)^* H_2^\delta & (\lambda + 2\mu)(H_2^\delta)^* H_2^\delta + \mu (H_1^\delta)^* H_1^\delta \end{pmatrix}.$$

Оператор K_δ симметричен и неотрицателен в естественной метрике

$$\| w \|^2 = (u, u) + (v, v),$$

и

$$\begin{aligned} (K_\delta w, w) = \lambda \| H_1^\delta u + H_2^\delta v \|^2 + \\ + 2\mu \| H_1^\delta u \|^2 + 2\mu \| H_2^\delta v \|^2 + \mu \| H_2^\delta u + H_1^\delta v \|^2. \end{aligned} \tag{23.7}$$

Если мы введем далее клеточный матричный оператор

$$T_\delta = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau^2}{\delta^2} K_\delta & \tau \\ -\frac{\tau}{\delta^2} K_\delta & 1 \end{pmatrix} \tag{24.7}$$

и построим с помощью него схему

$$g_{k+1}^{(\delta)} = T_\delta g_k^{(\delta)}, \tag{25.7}$$

где g_k — четырехмерный вектор $\begin{pmatrix} w_k^{(\delta)} \\ \eta_k^{(\delta)} \end{pmatrix}$, $g_0^{(\delta)} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$, то мы сможем в точности повторить все рассуждения § 2, получив при этом, что преобразование T_δ сохраняет величину

$$\left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta w, w\right) + (\eta, \eta) - \tau \left(\frac{1}{\delta^2} K_\delta w, \eta\right),$$

которая является для нашей разностной схемы аналогом полной энергии.

Последнее и означает устойчивость схемы (25.7).

Вытекающая отсюда ограниченность последовательностей

$$\{w^{(\delta)}(x,\ t)\} = \begin{Bmatrix} u^{(\delta)}(x,\ t) \\ v^{(\delta)}(x,\ t) \end{Bmatrix},\quad \left\{\frac{1}{\delta} H_1^{\delta} u^{(\delta)}(x,\ t)\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{\delta} H_2^{(\delta)} v^{(\delta)}(x,\ t)\right\},\quad \left\{\frac{1}{\delta} H_2^{\delta} u^{(\delta)}(x,\ t) + \frac{1}{\delta} H_1^{\delta} v^{(\delta)}(x,\ t)\right\}$$

позволяет установить справедливость интегрального тождества (20.7).

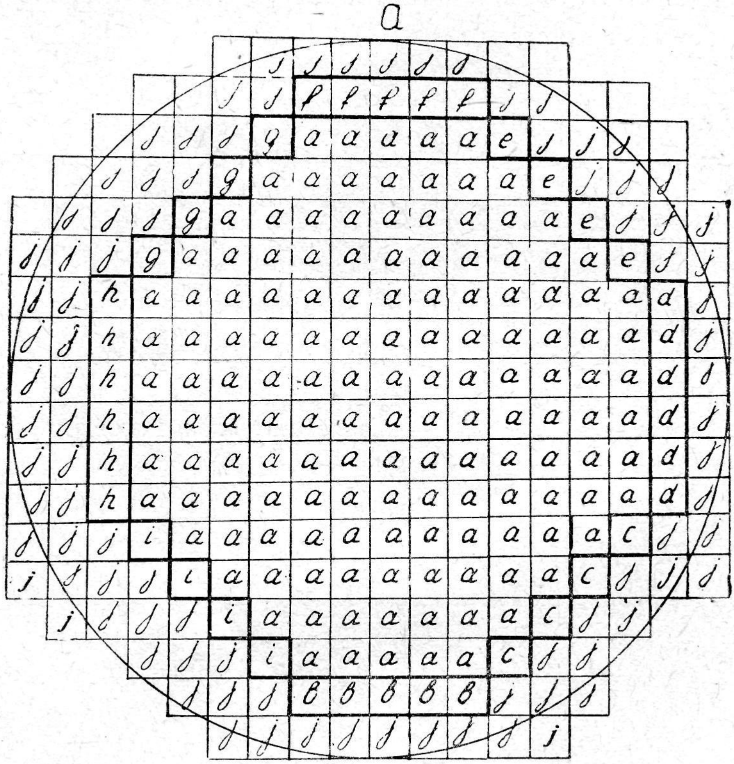

Рис. 1.

В заключение настоящего параграфа приведем пример разностной схемы для простейшего уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

В качестве области возьмем круг. Примем при этом краевое условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0.$$

Основная цель состоит в том, чтобы указать вид схемы вблизи границы области, вызываемой спецификой данного краевого условия.

На прилагаемом рисунке область разбита сеткой с шагом $\frac{1}{18}$ и все квадраты сетки отнесены к одной из групп, обозначаемых через a, b, c, d, e, f, g, h, i, j. Оператор K_δ определяется на этих группах квадратов следующим образом:

на группе a $K_\delta u = -\{u(x+\delta,\ y) - 2u(x,\ y) + u(x-\delta,\ y)\} -$
$$-\{u(x,\ y+\delta) - 2u(x,\ y) + u(x,\ y-\delta)\}$$

на группе b $K_\delta u = -u(x, y+\delta) + u(x, y)$

» c $K_\delta u = \{-u(x-\delta, y) + u(x, y)\} + \{-u(x, y+\delta) + u(x, y)\}$

» d $K_\delta u = -u(x-\delta, y) + u(x, y)$

» e $K_\delta u = \{-u(x, y-\delta) + u(x, y)\} + \{-u(x-\delta, y) + u(x, y)\}$

» f $K_\delta u = -u(x, y-\delta) + u(x, y)$

» g $K_\delta u = \{-u(x+\delta, y) + u(x, y)\} + \{-u(x, y-\delta) + u(x, y)\}$

» h $K_\delta u = -u(x+\delta, y) + u(x, y)$

» i $K_\delta u = \{-u(x+\delta, y) + u(x, y)\} + \{-u(x, y+\delta) + u(x, y)\}$

» j $K_\delta u = 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская. Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953, М., Гостехиздат.

2. Д. М. Эйдус. ДАН СССР, т. LXXXIII, № 2, 1952.