УДК 517.948 + 512.13

Л. П. КУЧКО

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В [1] исследовано многомерное линейное уравнение

$$\varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x) = \gamma(x), \tag{1}$$

где $F: R^n \to \boldsymbol{R}^n$ — линейный оператор, $Q: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^{m^2}$ и $\gamma: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$ — заданные C^∞-отображения. При таких условиях удается полностью выяснить вопрос о существовании и единственности локальных решений φ класса C^∞. Если отображение F нелинейно, то при исследовании аналогичных вопросов возникают дополнительные трудности, связанные с поведением итераций F. Настоящая работа посвящена изучению уравнения (1) в одномерном случае ($n = 1$).

Для разрешимости уравнения (1) в какой-нибудь окрестности начала координат необходима его формальная разрешимость, т. е. существование такого формального отображения $\varphi: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{C}^m$, для которого

$$\hat{\varphi}(\hat{F}x) - \hat{Q}(x)\hat{\varphi}(x) = \hat{\gamma}(x).$$

Здесь $\hat{F}$, $\hat{Q}$, $\hat{\gamma}$ — формальные ряды Тейлора в нуле. Формальной разрешимости уравнения (1), однако, недостаточно для его локальной разрешимости (например, в случае, если $F(x) = x$, $Q(x) = E$). Обозначим через $h(x) = |\det Q(x)|$.

Теорема. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

a) $|F'(0)| \neq 1$, $h(0) \neq 0$;

в) $F^2(x) = x + f(x)$, $f \neq 0$, *матрица* $Q(x)$ *треугольна*, $h(0) \neq 0$;

c) $F'(0) = 0$, $h(x) > C|x|^k$ *при некоторых* k *и* $C > 0$.

Тогда для всякого формального решения $\hat{\varphi}$ *уравнения (1) существует такое его локальное* C^∞*-решение* φ, *ряд Тейлора которого в нуле равен* $\hat{\varphi}$.

Схема доказательства теоремы. Предположим сначала, что выполнено условие *a*). Пусть $\hat{\varphi}$ — формальное решение (1). Зафиксируем какое-нибудь C^∞-отображение $\varphi_0: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{C}^m$ с рядом Тейлора $\hat{\varphi}$. Будем искать решение уравнения (1) в виде $\varphi = \varphi_0 + \psi$, где $\hat{\psi} = 0$. Тогда для ψ получим уравнение

$$\psi(Fx) = Q(x)\psi(x) + \tau(x), \tag{2}$$

где $\tau(x) = \gamma(x) + Q(x)\varphi_0(x) - \varphi_0(Fx)$ имеет нулевой ряд Тейлора в начале координат. Пусть $|F'(0)| < 1$. Умножая (2) на $(Q(x))^{-1}$, получим уравнение

$$\psi(x) = (Q(x))^{-1}\psi(F(x)) - (Q(x))^{-1}\tau(x). \tag{3}$$

Ряд

$$\psi(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{k}(Q(F^i x))^{-1}\tau(F^k x)$$

сходится в топологии пространства C^∞-отображений. Действительно, так как $\hat{\tau} = 0$, то $\|\tau^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}|x|^\nu$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ и некоторых $C_{s\nu} > 0$. Зафиксируем такое $\delta > 0$, что $|F(x)| \leqslant \alpha|x|$, $\alpha < 1$ при $|x| \leqslant \delta$, и положим $\beta = \max\limits_{|x|<\delta}\|(Q(x))^{-1}\|$. Тогда

$$\Big\|\prod_{i=0}^{k}(Q(F^i x))^{-1}\tau(F^k x)\Big\| \leqslant C_{0\nu}\beta^{k+1}\alpha^{k\nu}.$$

Выбрав ν достаточно большим, получим, что ряд ψ мажорируется сходящимся рядом. Аналогично оцениваются ряды, полученные почленным дифференцированием ряда ψ. Таким образом, $\psi(x)$ — C^∞-отображение, удовлетворяющее уравнению (2).

Если $|F'(0)| > 1$, то уравнение (2) сводится к уравнению

$$\psi(x) = Q(F^{-1}x)\psi(F^{-1}x) + \tau(F^{-1}x), \tag{4}$$

решение которого представляется рядом:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}Q(F^{-i}x)\tau(F^{-k-1}x) + \tau(F^{-1}x).$$

Предположим теперь, что выполнено условие *b*). Так как матрица $Q(x)$ треугольна, достаточно доказать локальную C^∞-разрешимость уравнения вида (1) при $m = 1$. Пусть сначала $F'(0) = 1$.

Можно считать, что полуоси $\boldsymbol{R}_+$, $\boldsymbol{R}_-$ инвариантны относительно F, поэтому достаточно решить уравнение (2) для каждой полуоси. Пусть, для определенности, $x \geqslant 0$, и $F(x) = x + \alpha x^{k+1} + \ldots$, $\alpha \neq 0$, $|Q(x)| = q + r(x)$, $r(0) = 0$, $q \neq 0$. Пусть, кроме того, $q > 1$. Преобразуем уравнение (2) к виду (3). Рассмотрим два случая: $\alpha < 0$ и $\alpha > 0$. В первом случае отображение F является квазисжатием. Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим выпуклый компакт K таких C^∞-отображений $\psi: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{C}^1$ с нулевым рядом Тейлора в нуле, для которых

$$|\psi^{(s)}(x)| \leqslant C_{s\nu} x^\nu,\ \nu \geqslant \nu_s,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 0 \leqslant x \leqslant \delta. \tag{5}$$

Так как $|Q^{-1}(x)| \leqslant \tilde{q} < 1$, $0 \leqslant x \leqslant \delta$, если δ достаточно мало, то можно подобрать константы $\{C_{s\nu}\}$, $\{\nu_s\}$ и δ таким образом, чтобы оператор, стоящий в правой части уравнения (3), отображал компакт K в себя. В сил принципа неподвижной точки [2], уравнение (3) имеет решение в этом компакте.

В случае $\alpha > 0$ отображение F является квазирастяжением. Рассмотрим выпуклый компакт K, определяемый неравенствами

$$|\psi^{(s)}(x)| \leqslant \begin{cases} C_{s\nu} x^\nu, & 0 \leqslant x \leqslant \delta_{s\nu}, \\ C_{s\nu}\varepsilon_{s\nu} x^{-\nu}, & \delta_{s\nu} < x \leqslant \delta, \end{cases}\ \nu \geqslant \nu_s,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{6}$$

и условием $\psi(x) = 0$, $x > \delta$. Учитывая, что $q^{-1} < 1$, можно подобрать числа $\{\delta_{s\nu}\}$, $\{\varepsilon_{s\nu}\}$, $\{C_{s\nu}\}$, $\{\nu_s\}$ и δ таким образом, чтобы компакт K переводился в себя оператором, стоящим в правой части уравнения (3). Следовательно, уравнение (3) имеет решение $\psi \in K$.

Если $q < 1$, то уравнение (2) преобразуется к виду (4), и дальнейшие рассуждения аналогичны.

Пусть теперь $q = 1$, $r'(0) = \ldots = r^{(l-1)}(0) = 0$, $r^{(l)}(0) \neq 0$. Если $l \geqslant k$ (в частности, $l = \infty$), то уравнение (2) преобразуется к виду (3) либо (4) в зависимости от того, является F или F^{-1} квазисжатием. После этого решение отыскивается в компакте вида (5). Если же $l < k$, то уравнение (2) преобразуется к виду (3) либо (4) в зависимости от того, будет ли $|Q(x)| < 1$ или $|Q(x)| > 1$ при малых $x \neq 0$. В этом случае решение ищется в компакте вида (6).

Пусть, наконец, $F'(0) = -1$. Тогда $F^2(x) = x + f(x)$. Согласно предыдущему, уравнение

$$\psi_0(F^2 x) = Q(Fx)\,Q(x)\,\psi_0(x) + Q(Fx)\,\tau(x) + \tau(Fx)$$

имеет локальное C^∞-решение ψ_0 с нулевым рядом Тейлора в нуле. Полагая

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_0(x), & x \geqslant 0, \\ Q(F^{-1}x)\,\psi_0(F^{-1}x) + \tau(F^{-1}x), & x < 0, \end{cases}$$

получим решение уравнения (2).

Если выполнено условие c), то преобразовываем уравнение (2) к виду (3). Повторяя оценки, аналогичные рассмотренным в случае a), доказываем сходимость ряда ψ в топологии пространства C^∞-отображений.

Замечание 1. Решение уравнения (1), вообще говоря, не единственно: из теоремы вытекает, что каждое формальное решение однородного уравнения (при $\gamma(x) = 0$) восстанавливается до локального C^∞-решения.

Замечание 2. Из доказательства теоремы следует, что при выполнении ее условий уравнение (1) имеет решение при любой правой части с нулевым рядом Тейлора в нуле.

Список литературы: 1. *Кучко Л. П.* Линейные функциональные уравнения. — Изв. АН СССР, 1978, **42**, № 2, с. 379—395. 2. *Tychonoff A. N.* Ein Fixpunktsatz. — Math. Ann., 1935, **111**, № 5, p. 767—776.

Поступила в редколлегию 11.12.84.