

Взаимодействие винтовых потоков с нестационарными плотностями

В.Д. Гордевский

*Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина,
пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина*

Получено описание процесса взаимодействия между двумя потоками в газе из твердых сфер, каждый из которых является винтом с ускорением и уплотнением, для случая плотностей, зависящих от времени. Соответствующее бимодальное распределение минимизирует равномерно-интегральную норму разности между частями уравнения Больцмана.

Гордевський В.Д., **Взаємодія гвинтових течій з нестационарними густинами**. Здобуто описання процесу взаємодії між двома течіями в газі з пружних куль, кожна з яких є гвинтом з прискоренням та згущенням, у випадку густин, які залежать від часу. Відповідний бимодальний розподіл мінімізує рівномірно-інтегральну норму різниці між частинами рівняння Больцмана.

V.D. Gordevskyy, **Interaction of spiral flows with non-stationary densities**. The description of the process of interaction between two flows in a gas of hard spheres is obtained. Each of the flows is a screw with acceleration and packing, besides their densities depend on time. Corresponding bimodal distribution minimizes the uniform-integral norm of the difference between the sides of the Boltzmann equation.

2000 Mathematics Subject Classification: 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

1. Введение.

Основным кинетическим уравнением, описывающим поведение достаточно разреженного газа, является уравнение Больцмана [1, 2]. В случае газа из твердых сфер оно имеет вид:

$$D(f) = Q(f, f), \quad (1)$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2)$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v_1 - v, \alpha)| \cdot \left[f(t, x, v') f(t, x, v'_1) - f(t, x, v) f(t, x, v_1) \right], \quad (3)$$

$$v'_1 = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha); \quad v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \quad (4)$$

где $f(t, v, x)$ — функция распределения частиц; $t \in R^1$ — время; $v = (v^1, v^2, v^3) \in R^3$ и $x = (x^1, x^2, x^3)$ — скорость молекулы и ее пространственная координата; $\frac{\partial f}{\partial x}$ (или просто f') — градиент функции f по переменной x ; $d > 0$ — диаметр частиц; v, v_1, v', v'_1 — скорости молекул до и после столкновения соответственно; $\alpha \in \Sigma \subset R^3$; Σ — единичная сфера.

Максвеллианы являются единственным известным до сих пор точным решением этого уравнения. Наиболее общий вид локальных (т.е. зависящих от t и x) максвелловских распределений был найден в [2 - 4]; в работе [5] он был детально исследован с точки зрения геометрической структуры и физического смысла. В частности, одним из важных и интересных типов максвеллианов являются ускоряющиеся и уплотняющиеся винты. Они соответствуют потокам, вращающимся вокруг неподвижных осей с постоянной угловой скоростью и обладающим ускорением вдоль этих осей.

В работах [6 - 8] получено описание переходного режима между двумя максвелловскими потоками указанного типа, но для различных частных случаев — когда отсутствует либо ускорение (а вместе с ним, и уплотнение), либо вращение.

Общему случаю посвящены работы [9,10], где рассмотрены ситуации полной либо частичной зависимости плотностей потоков от их температур, причем в последней ситуации эти плотности являются неоднородными, но стационарными (зависят лишь от x , но не от t).

Целью данной работы является построение таких бимодальных распределений с винтовыми модами, имеющими нестационарные плотности, которые позволяли бы сделать сколь угодно малой равномерно-интегральную невязку между частями уравнения Больцмана.

Точная постановка задачи приведена в разделе 2.

Основные результаты и их краткое обсуждение помещены в раздел 3.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать два потока, которым соответствуют максвеллианы вида [5 - 10]

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i(v - \bar{v}_i)^2}, \quad (5)$$

$$\rho_i = \bar{\rho}_i(t, x) e^{\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2}, \quad (6)$$

$$\bar{\rho}_i(t, x) = \bar{\rho}_i \exp \left\{ \beta_i \left[\left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i^2} (\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - \bar{u}_i t \right)^2 + 2 \bar{u}_i x \right] \right\}, \quad (7)$$

$$r_i^2 = \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} [\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})]^2, \quad (8)$$

$$x_{0i} = \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} [\bar{\omega}_i \times \bar{v}_i], \quad (9)$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_i + [\bar{\omega}_i \times x] - \bar{u}_i t, \quad (10)$$

$$[\bar{u}_i \times \bar{\omega}_i] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Здесь гидродинамические параметры таковы: ρ_i — плотности, $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$ — обратные температуры, $\bar{v}_i$ — массовые скорости потоков, а $\bar{\rho}_i > 0$, $\bar{v}_i, \bar{\omega}_i, \bar{u}_i \in R^3$ — некие скалярные и векторные константы, $i = 1, 2$.

Бимодальные распределения будем искать в виде:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \quad (12)$$

где $\varphi_i = \varphi_i(t, x) \in C^1(R^4)$, $\varphi_i \geq 0$ — коэффициентные функции, ограниченные вместе с $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$, $i = 1, 2$ на R^4 .

Требуется найти такие φ_i и такое поведение всех параметров, чтобы плотности потоков, входящих в (12), оставались нестационарными, и в то же время равномерно-интегральная (или "смешанная") невязка вида [5, 6, 8 - 10]

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in R^4} \int_{R^3} dv |D(f) - Q(f, f)| \quad (13)$$

была произвольно малой.

Приведем теперь несколько возможных решений указанной задачи.

3. Основные результаты

Теорема 1. Пусть функции φ_1, φ_2 имеют вид:

$$\varphi_i(t, x) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} e^{-\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} C_i(x + \lambda_i(t) \bar{\omega}_i), \quad (14)$$

где

$$\lambda_i(t) = \frac{t^2 \bar{u}_i^2}{2 \bar{u}_i \bar{\omega}_i}, \quad (15)$$

константы $l_i \geq 1/2$, $D_i > 0$, а $C_i \geq 0$ — произвольные гладкие финитные либо быстроубывающие функции, $i = 1, 2$. Пусть, кроме того,

$$\bar{\omega}_i = \frac{\bar{\omega}_{0i}}{\beta_i^{m_i}}, \quad (16)$$

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}, \quad (17)$$

где

$$m_i > \frac{1}{2}, \quad (18)$$

$$n_i \geq 1, \quad (19)$$

а вектори $\bar{\omega}_{0i}, \bar{u}_{0i}, i = 1, 2$ постійні, причем

$$(\bar{\omega}_{0i}, \bar{v}_i) = 0. \quad (20)$$

Тоді:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall D_1, D_2 : 0 < D_1, D_2 < \delta, \exists \beta_0 > 0, \forall \beta_1, \beta_2 > \beta_0, \quad \Delta < \varepsilon. \quad (21)$$

Доказательство. Подстановка (12) в (2), (3) и затем — в (13), с учетом (5) — (11), известных свойств максвеллианов [1, 2] и очевидных упрощений, связанных с предположением (20), а также с использованием техники, развитой в [6 - 10], приводит к следующей оценке сверху для невязки Δ :

$$\begin{aligned} \Delta \leq \Delta' = & \sup_{(t,x) \in R^4} \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \left[\int_{R^3} \left| \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right\} e^{\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} \right. \right. \\ & + d^2 \varphi_i \varphi_j e^{\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2 + \beta_j \bar{\omega}_j^2 r_j^2} \frac{\hat{\rho}_j(t, x)}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} F_{ij}(u, t, x, w) e^{-w^2} dw \left| \hat{\rho}_i(t, x) \pi^{-3/2} e^{-u^2} du \right. \\ & \left. \left. + d^2 \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \bar{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega}_2^2 r_2^2} \frac{\hat{\rho}_1(t, x) \hat{\rho}_2(t, x)}{\pi^2} \int_{R^6} F_{ij}(u, t, x, w) e^{-u^2 - w^2} dudw \right] \right], \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$F_{ij}(u, t, x, w) = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i - \tilde{v}_j - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \quad i \neq j, \quad (23)$$

$$\hat{\rho}_i(t, x) = \bar{\rho}_i e^{\beta_i [\bar{u}_i^2 t^2 + 2 \bar{u}_i x]} \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Подставим теперь в (22) вместо $\varphi_i, i = 1, 2$ выражения (14) с учетом (15), которые дают:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = D_i e^{-\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{t}{(1+t^2)^{l_i}} \left[\frac{-2l_i}{1+t^2} C_i(y) + (C'_i(y), \bar{\omega}_i) \frac{\bar{u}_i^2}{\bar{u}_i \bar{\omega}_i} \right], \quad (25)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} e^{-\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} \{ -2\beta_i [[\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \bar{\omega}_i] C_i(y) + C'_i(y) \}, \quad (26)$$

где ради краткости введено обозначение:

$$y = x + \lambda_i(t) \bar{\omega}_i, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Поскольку супремум, взятый по $(t, x) \in R^4$, очевидно, можно теперь брать по $(t, y) \in R^4$, то, вспоминая (10), вместо (22) из (24) — (27), (14) будем иметь:

$$\Delta' = \sup_{(t,y) \in R^4} \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \left[\int_{R^3} \left| \frac{-2l_i t}{1+t^2} C_i(y) + (C'_i(y), \bar{\omega}_i) \frac{\bar{u}_i^2 t}{\bar{u}_i \bar{\omega}_i} \right| \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\bar{\omega}_i \times y] - \bar{u}_i t \right) \\
& \cdot \left\{ -2\beta_i [(\bar{\omega}_i \times (y - x_{0i})) \times \bar{\omega}_i] C_i(y) + C'_i(y) \right\} \\
& + \frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}} C_i(y) C_j(y) \frac{\bar{\rho}_j d^2}{\sqrt{\pi}} e^{2\beta_j \bar{u}_j y} \int_{R^3} F_{ij} e^{-w^2} dw \left| \bar{\rho}_i e^{2\beta_i \bar{u}_i y} \pi^{-3/2} e^{-u^2} du \right. \\
& \left. + \frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}} \frac{\bar{\rho}_i \bar{\rho}_j d^2}{\pi^2} C_i(y) C_j(y) e^{2y(\beta_i \bar{u}_i + \beta_j \bar{u}_j)} \int_{R^6} F_{ij} e^{-u^2 - w^2} du dw \right]. \quad (28)
\end{aligned}$$

Благодаря тому, что теперь, очевидно, (23) приобретает вид

$$F_{ij} = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\bar{\omega}_i \times y] - \bar{u}_i t - \bar{v}_j - [\bar{\omega}_j \times y] + \bar{u}_j t - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \quad (29)$$

то условия, наложенные на функции C_i и константы $l_i, i = 1, 2$, в нашей теореме, как видно из (28), гарантируют существование конечного супремума по t, y (сходимость всех интегралов тем более очевидна). Значит, величина Δ' корректно определена. Подставляя теперь в (28) выражения (16), (17) и переходя затем к пределу при $\beta_1, \beta_2 \rightarrow +\infty$ так же, как это было сделано в [9, 10], с учетом (18), (19), откуда легко видеть, что

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} e^{2\beta_i \bar{u}_i y} = \mu_i(y) = \begin{cases} 1, & n_i > 1, \\ e^{2\bar{u}_{0i} y}, & n_i = 1, \end{cases} \quad (30)$$

и

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} F_{ij} = |\bar{v}_i - \bar{v}_j|, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \quad (31)$$

получим:

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} \Delta' &= \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \bar{\rho}_i \sup_{(t,y) \in R^4} \left[\mu_i(y) \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \left| \bar{v}_i C'_i(y) - \frac{2l_i t}{1+t^2} C_i(y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}} C_i(y) C_j(y) \bar{\rho}_j \mu_j(y) \pi d^2 |\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right] \right. \\
&\quad \left. + 2\pi d^2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 D_1 D_2 \sup_{y \in R^3} [\mu_1(y) \mu_2(y) C_1(y) C_2(y)]. \quad (32)
\end{aligned}$$

Из (32) благодаря (30) и свойствам функций $C_i, i = 1, 2$, обеспечивающим конечность супремумов по t и y , непосредственно следует (21). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть

$$\varphi_i(t, x) = D_i C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) E_i(t) e^{-\beta_i \{[\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})]^2 + 2\bar{u}_i x\}}, \quad i = 1, 2, \quad (33)$$

где функции C_i и константы D_i таковы же, как в теореме 1, а $E_i(t) \geq 0$ – финитные либо быстроубывающие гладкие функции. Кроме того, пусть выполнены условия (16) – (18) и

$$n_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (34)$$

Тогда вновь справедливо (21).

Доказательство. Поскольку теперь, вследствие (20), выражение (24) сохранится, но после подстановки (33) в (22) второе слагаемое в показателе сократится, а производные функций φ_i будут выглядеть так:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = D_i C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) E'_i(t) e^{-\beta_i \{[\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})]^2 + 2\bar{u}_i x\}}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = D_i E_i(t) e^{-\beta_i \{[\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})]^2 + 2\bar{u}_i x\}}$$

$$\cdot \left\{ [C'_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) \times \bar{\omega}_{0i}] - 2C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) \beta_i ([\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \bar{\omega}_i) + \bar{u}_i \right\}, \quad i = 1, 2, \quad (36)$$

то в результате подстановки всех этих величин в (22) и преобразований, использующих (7) – (11) и (20), будем иметь (существование всех супремумов, очевидно, вытекает из (33) и условий теоремы):

$$\begin{aligned} \Delta' = & \sup_{(t,x) \in R^4} \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \left[\int_{R^3} \left| D_i C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) E'_i(t) + D_i E_i(t) \right. \right. \\ & \cdot \left\{ \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i \right) [C'_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) \times \bar{\omega}_{0i}] + 2C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) \sqrt{\beta_i} \right. \\ & \cdot \left. \left. (-\bar{\omega}_i^2(u, x) + (u, \bar{\omega}_i, \bar{v}_i) + (u, \bar{\omega}_i)(x, \bar{\omega}_i) - (u, \bar{u}_i) + \sqrt{\beta_i} t \bar{u}_i^2) \right\} \right. \\ & + D_i D_j C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) C_j([\bar{\omega}_{0j} \times x]) E_i(t) E_j(t) \frac{\bar{\rho}_j d^2}{\sqrt{\pi}} \\ & \cdot e^{\beta_j \bar{u}_j^2 t^2} \int_{R^3} F_{ij} e^{-w^2} dw \left| e^{\beta_i \bar{u}_i^2 t^2} \bar{\rho}_i \pi^{-3/2} e^{-u^2} du \right. \\ & + \exp\{t^2(\beta_1 \bar{u}_1^2 + \beta_2 \bar{u}_2^2)\} \frac{\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 d^2}{\pi^2} D_1 D_2 \\ & \left. \left. C_1([\bar{\omega}_{01} \times x]) C_2([\bar{\omega}_{02} \times x]) E_1(t) E_2(t) \int_{R^6} F_{ij} e^{-u^2 - w^2} du dw \right] \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

Далее, поскольку (31) сохраняется, а в силу (17) и (34)

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} e^{\beta_i \bar{u}_i^2 t^2} = 1, \quad (38)$$

то, вспоминая еще (16), (18) и учитывая, что, как легко видеть,

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i \right) [C'_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) \times \bar{\omega}_{0i}] = (\bar{v}_i, C'_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]), \bar{\omega}_{0i}), \quad (39)$$

получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} \Delta' = & \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 D_i \bar{\rho}_i \sup_{(t,x) \in R^4} \left| C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) E'_i(t) + E_i(t) (\bar{v}_i, C'_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]), \bar{\omega}_{0i}) \right. \\ & \left. + D_j \bar{\rho}_j \pi d^2 |\bar{v}_i - \bar{v}_j| C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) C_j([\bar{\omega}_{0j} \times x]) E_i(t) E_j(t) \right| \\ & + 2\pi d^2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 D_1 D_2 \sup_{t \in R^1} \{ (E_1(t) E_2(t)) \} \sup_{x \in R^3} \{ C_1([\bar{\omega}_{01} \times x]) C_2([\bar{\omega}_{02} \times x]) \}, \end{aligned} \quad (40)$$

откуда, как и ранее, следует (21). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть

$$\bar{v}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (41)$$

а функции φ_i имеют вид:

$$\varphi_i(t, x) = D_i C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) E_i(t) e^{-2\beta_i \bar{u}_i x}, \quad i = 1, 2, \quad (42)$$

где D_i, C_i и E_i таковы же, как в теореме 2, причем вновь предполагается (16) – (18) и (34). Тогда (21) остается в силе.

Доказательство. Благодаря (41), во-первых, сохраняется формула (24), а во-вторых, как видно из (8), (9),

$$\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2 = \beta_i [\bar{\omega}_i \times x]^2, \quad i = 1, 2. \quad (43)$$

Значит, подстановка (42) в (22) с учетом (10) и вновь (41), дает:

$$\begin{aligned} \Delta' = & \sup_{(t,x) \in R^4} \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \left[\int_{R^3} \left\{ D_i E'_i(t) C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) + D_i E_i(t) \right. \right. \\ & \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + [\bar{\omega}_i \times x] - \bar{u}_i t \right) \left([C'_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) \times \bar{\omega}_{0i}] - 2\beta_i \bar{u}_i C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) \right) \Big\} e^{\beta_i [\bar{\omega}_i \times x]^2} \\ & + D_i D_j C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) C_j([\bar{\omega}_{0j} \times x]) E_i(t) E_j(t) \frac{\bar{\rho}_j d^2}{\sqrt{\pi}} \exp\{ \beta_i [\bar{\omega}_i \times x]^2 + \beta_j [\bar{\omega}_j \times x]^2 + \beta_j \bar{u}_j^2 t^2 \} \\ & \cdot \int_{R^3} F_{ij} e^{-w^2} dw \Big| e^{\beta_i \bar{u}_i^2 t^2} \bar{\rho}_i \pi^{-3/2} e^{-u^2} du \\ & + D_i D_j C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) C_j([\bar{\omega}_{0j} \times x]) E_i(t) E_j(t) \frac{\bar{\rho}_i \bar{\rho}_j d^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$\cdot \exp\{t^2(\beta_i \bar{u}_i^2 + \beta_j \bar{u}_j^2) + \beta_i [\bar{\omega}_i \times x]^2 + \beta_j [\bar{\omega}_j \times x]^2\} \int_{R^6} F_{ij} e^{-u^2 - w^2} du dw \quad (44)$$

(эта величина конечна, как и ранее, ибо F_{ij} сохраняют вид (29) при $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$ и переменной x вместо y , т.е. функции C_i и E_i обеспечивают ограниченность всех возникающих здесь произведений по переменным t и $[\bar{\omega}_{0i} \times x]$). При переходе к пределу по $\beta_i, i = 1, 2$ следует учесть, что благодаря (18) и (34) равенство (38) остается в силе, выражение (43) просто стремится к нулю, а (31) сильно упрощается:

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} F_{ij} = 0. \quad (45)$$

Отсюда:

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} \Delta' = \sum_{i=1}^2 D_i \bar{\rho}_i \sup_{t \in R^1} |E'_i(t)| \sup_{x \in R^3} C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]), \quad (46)$$

что, очевидно, и влечет (21). Теорема 3 доказана.

Замечание 1. В последней теореме наложено условие (41), которое жестче предыдущих (а именно, (20)), что и приводит к наиболее простому виду (46) для предела величины Δ' , впрочем, при ином выражении для $\varphi_i, i = 1, 2$ (т.е. (42) вместо (33) или (14), (15)).

Замечание 2. В рамках данной работы векторы $\bar{v}_i$ либо попросту равны нулю, либо перпендикулярны векторам $\bar{\omega}_i, i = 1, 2$. Интересно отметить, что в работе [10], где аналоги выражений (14), (33) и (42) таковы, что зависимость от времени в плотностях потоков исчезает (стационарный случай — см. Введение), указанные векторы, наоборот, либо вообще произвольны, либо параллельны $\bar{\omega}_i$ (при этом на числа $m_i, n_i, i = 1, 2$ также иногда накладываются несколько иные ограничения, чем (18), (19) или (34)).

Замечание 3. Укажем также на то, что можно существенно расширить количество приведенных здесь результатов за счет изменения параметров m_i, n_i в более широких рамках и наложения тех или иных дополнительных условий на функции и параметры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.-495 с.
2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИИЛ, 1960.- 118 с.
3. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases// Comm. Pure and Appl. Math.-1949.- V. 2, No.4.-P.331-407.

4. Фридлендер О.Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана// Прикл. мат. и мех.-1965.- Т. 29, вып. 5.-С.973-977.
5. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians// Math. Meth. Appl. Sci. -2004.- V.27, No. 2.- P.231-347.
6. Гордевский В.Д. Двухпотокное распределение с винтовыми модами// Теор. и мат. физика.- 2001.- Т. 126, №2.- С. 283-300.
7. Gordevsky V.D. Transitional Regime Between Spiral Equilibrium States of a Gas.// Vysnik Kharkiv Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mech.-2001.- 514.-P.17-33.
8. Gordevskyy V.D., Andriyasheva N.V. Interaction between "accelerating-packing" flows in a low-temperature gas// Math. Phys., Anal., Geom.-2009.- V.5, No. 1.- P.38-53.
9. Gordevskyy V.D. Rotating flows with acceleration and compacting in a model of hard spheres // Teoret. i Matem. Fiz.- 2009.- V. 161, No. 2.-P.278-286.
10. Гордевский В.Д. Винтовые потоки с плотностями, частично зависящими от температур// Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Сер. "Математика, прикладна математика і механіка", - 2009.- 850. - с. 37-44.

Статья получена: 20.10.2009; окончательный вариант: 11.11.2009;
принята: 15.11.2009.

© Гордевский В.Д., 2009

Исследование математической модели механической суффозии

А. Ю. Кузнецов, С. А. Пославский

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина,

пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина

kuant@rambler.ru, s.poslavsky@gmail.com

В работе рассматривается задача о перераспределении суффозионных частиц при впитывании жидкости в грунт. Принимается кинематическая модель, в которой объемный расход жидкости, поступающей в грунт, является заранее заданной функцией, а скорость подвижных суффозионных частиц линейно зависит от скорости жидкости.

Кузнецов А. Ю., Пославський С. О. **Дослідження математичної моделі механічної суфозії.** У роботі розглядається задача про перерозподіл суфозійних частинок при вбиранні рідини до ґрунту. Приймається кінематична модель, у якій об'ємна витрата рідини, що поступає до ґрунту, є завчасно заданою функцією, а швидкість рухомих суфозійних частинок лінійно залежить від швидкості рідини.

A. Yu. Kuznietsov, S. A. Poslavsky, **Investigation of a mathematical model of the mechanical suffosion.** In the work the problem of suffosion particles redistribution during the liquid infiltration into the soil is considered. A kinematic model is accepted, in which the volumetric flow rate of the liquid, which flows into the soil, is a known function, and the moving suffosion particles velocity depends on the liquid velocity linearly.

2000 Mathematics Subject Classification: 76S05.

Введение

Интенсивные фильтрационные течения жидкостей в пористых средах могут сопровождаться структурными изменениями твердой фазы и, как следствие, изменением проницаемости среды. В работах В. Л. Полякова [1] и Н. Н. Хлапука [2] рассмотрена математическая модель механической суффозии в несвязных грунтах - внутрипочвенного размыва, переноса твердых частиц фильтрационным потоком жидкости. Основное положение этой модели состоит в том, что, если абсолютная величина истинной

(осредненной по физически бесконечно малому объему) скорости течения жидкости u превышает некоторое критическое значение u_k , то суффозионные частицы приобретают скорость $(u - u_k)$; а при $u < u_k$ скорости суффозионных частиц равны нулю. В данной работе скорость суффозионных подвижных частиц полагается равной $\alpha(u - u_k)$, где α - постоянный коэффициент, лежащий в пределах $0 < \alpha \leq 1$.

Неструктурные (суффозионные) частицы перераспределяются в грунте с образованием суффозионных зон (из которых частицы выносятся) и аккумулярующих зон (в которых частицы накапливаются). Увеличение концентрации суффозионных частиц может приводить к значительному уменьшению проницаемости грунта (в десятки раз), поскольку неструктурные частицы способны занимать значительную долю порового пространства. В свою очередь, изменение фильтрационных свойств грунта приводит к существенной перестройке течения жидкости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерную постановку задачи [1]. Будем считать, что на горизонтальной поверхности первоначально однородного и сухого грунта (рис. 1) задан объемный расход воды (в расчете на единицу площади поверхности) в виде функции времени: $I = I(t)$, $t \geq t_0$. Далее примем $t_0 = 0$. Обеспечить такой расход можно, например, создав на поверхности грунта слой воды, глубина которого соответствующим образом регулируется.

Скорости воды и неструктурных частиц имеют вертикальное направление, которое примем за направление координатной оси z . Частицы будут вымываться водой, и вблизи поверхности грунта возможно возникновение зоны "полной деформации" [1], в которой частиц нет. Аккумуляющей зоной назовем заполненную водой область, в каждой точке которой концентрация суффозионных частиц отлична от нуля. Аккумуляющая зона ограничена снизу фронтом промачивания (рис. 2).

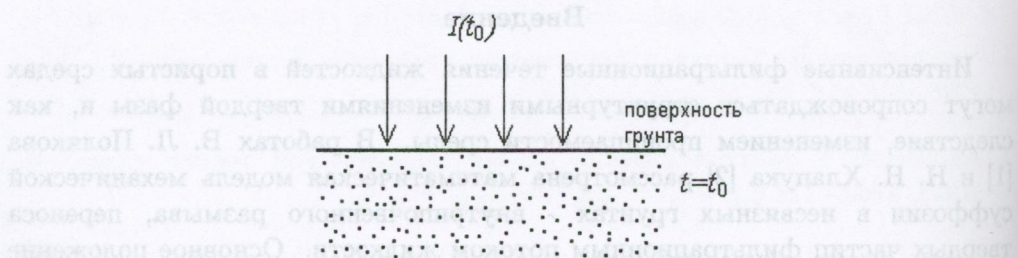


Рис. 1



Рис. 2

Пусть n_w – объемная доля пор в грунтовом пространстве, m_s – объемная концентрация структурных частиц (скелета), n_c – объемная концентрация неструктурных (т. е. не входящих в состав недеформируемого твердого скелета) частиц, u – действительная (средняя) скорость течения воды в порах, m_c – начальная объемная концентрация суффозионных частиц.

Первоначальное распределение суффозионных частиц в грунте предполагается равномерным: $m_c = \text{const}$. Закон движения фронта промачивания запишем в виде

$$z = z_a(t). \quad (1)$$

Будем считать, что за этим фронтом поровое пространство полностью насыщено водой, т. е. при $0 < z < z_a(t)$ объемная доля пор n_w совпадает с объемной концентрацией воды в грунте. Все переменные величины, характеризующие фильтрационный поток, представляем в виде функций времени t и эйлеровой координаты z :

$$n_w = n_w(t, z), \quad n_c = n_c(t, z), \quad u = u(t, z). \quad (2)$$

Переменные n_w и n_c подчинены уравнению связи

$$n_w + n_c = 1 - m_s. \quad (3)$$

Суффозионные частицы предполагаются мало различающимися формой и размерами. Поэтому считается, что все они имеют одинаковую скорость $\alpha(u - u_k)$, если скорость воды превышает некоторое критическое значение: $u > u_k$ (В работе [1] $\alpha = 1$).

Рассмотрим случай, когда движение суффозионных частиц начинается одновременно с промачиванием грунта, т. е. когда поток $I(0)$ достаточно велик, так что выполняется условие

$$u_a = \frac{dz_a}{dt} = u|_{z=z_a} > u_k. \quad (4)$$

Случай, когда промачивание поначалу не сопровождается движением неструктурных частиц, рассматривается аналогично с соответствующей корректировкой начальных и граничных условий.

Совместное движение воды и неструктурных частиц описывается системой уравнений

$$\frac{\partial n_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_w u) = 0; \quad \frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_c \alpha(u - u_k)) = 0, \quad (5)$$

причем n_w и n_c подчинены условию (3).

Из (5) с учетом (3) ($m_s = \text{const}$) вытекает

$$\frac{\partial}{\partial z}(n_w u + n_c \alpha(u - u_k)) = 0, \quad (6)$$

или

$$n_w u + n_c \alpha(u - u_k) = I(t), \quad (7)$$

поскольку $I(t)$ – это суммарный объемный расход через площадку единичной площади (перпендикулярную оси Oz), который совпадает с расходом воды на поверхности грунта.

Из (3), (7) получаем связь между u и n_c :

$$n_c = \frac{(1 - m_s)u - I}{\alpha u_k + (1 - \alpha)u}. \quad (8)$$

Тогда система (5) сводится к квазилинейному уравнению первого порядка [3] для функции $u(t, z)$:

$$\left(1 + \frac{l(\alpha)}{(1 - m_s)u_k} I\right) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \left(2u - u_k - \frac{1 + l(\alpha)}{1 - m_s} I + \frac{l(\alpha)}{u_k} u^2\right) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_k + l(\alpha)u}{(1 + l(\alpha)I)u_k} \frac{dI}{dt}, \quad (9)$$

где $l(\alpha) = (1 - \alpha)/\alpha$.

Заметим, что уравнение (9) справедливо только там, где $u > u_k$. Последнее неравенство определяет на плоскости (z, t) область, в которой решается уравнение (9).

На фронте промачивания объемная концентрация неструктурных частиц скачком меняется. Величина этого изменения определяется из условия непрерывности объемного расхода частиц:

$$m_c u_a = n_{ca}(\alpha u_k + (1 - \alpha)u_a). \quad (10)$$

где n_{ca} – объемная концентрация суффозионных частиц непосредственно за этим фронтом. Действительно, в системе координат, движущейся вместе с фронтом (т. е. в системе отсчета, где фронт промачивания неподвижен), скорость суффозионных частиц перед фронтом равна u_a , а за фронтом – $(\alpha u_k + (1 - \alpha)u_a)$, что представлено на следующей схеме:

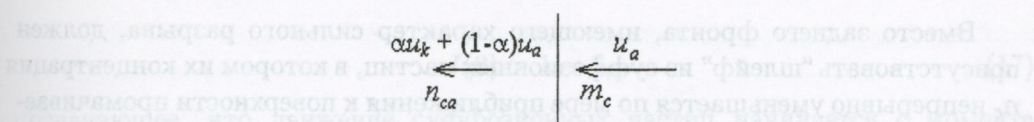


Рис. 3

Этот и все последующие рисунки ориентированы так, что ось z имеет горизонтальное направление (слева направо).

Из (3), (10) и условия (7) (записанного для $z = z_a$) получаем выражение для скорости фронта промачивания:

$$\frac{dz_a}{dt} = u_a = \frac{I}{1 - m_s - m_c}. \quad (11)$$

Очевидно, что такое же выражение для скорости фронта промачивания получается и в том случае, когда неструктурные частицы за фронтом остаются неподвижными.

Для того, чтобы твердые частицы за фронтом двигались, необходимо выполнение условия

$$u_a > u_k, \text{ или } I > (1 - m_s - m_c)u_k. \quad (12)$$

Закон движения фронта промачивания определяется интегрированием уравнения (11) (считаем $I(t)$ заданной функцией).

$$z_a(t) = \int_0^t \frac{I(\tau)}{1 - m_s - m_c} d\tau. \quad (13)$$

После этого уравнение (9) решается в области $\{(z; t) \mid t \geq 0, 0 < z < z_a(t)\}$.

Решение, представленное в [1], использует ошибочную гипотезу о том, что задний фронт $z = z_b(t)$ области, занятой движущимися суффозионными частицами, является поверхностью сильного разрыва, на которой концентрация частиц n_c скачком уменьшается до нуля. Однако такой разрыв не обладает свойством эволюционности (несмотря на то, что формально условие непрерывности объемного расхода на нем выполнено).

Неэволюционность заднего фронта можно объяснить и чисто физическими соображениями: суффозионные частицы, расположенные вплотную к заднему фронту (рис. 4), не могут увлекаться потоком воды со скоростью $\alpha(u_b - u_k)$ (здесь $u_b = u|_{z_b+0}$), поскольку их подталкивает вода, движущаяся со скоростью $u|_{z_b-0}$, но $u|_{z_b-0} < u_b$.

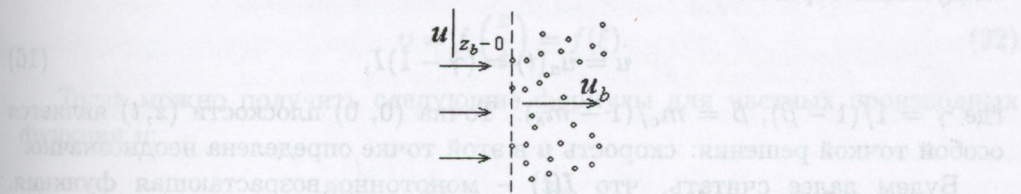


Рис. 4

Вместо заднего фронта, имеющего характер сильного разрыва, должен присутствовать “шлейф” из суффозионных частиц, в котором их концентрация n_c непрерывно уменьшается по мере приближения к поверхности промачиваемого грунта.

2. Решение

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_k}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{Z}, \quad \tilde{t} = \frac{u_k t}{Z}, \quad \tilde{I} = \frac{I}{u_k(1 - m_s)}, \quad (14)$$

где Z – некоторый характерный линейный размер.

Перепишем уравнение (9) в безразмерных переменных (знаки $\sim$ над переменными далее будем опускать):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha(2u - 1 + l(\alpha)u^2) - I}{1 + l(\alpha)I} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1 + l(\alpha)u}{1 + l(\alpha)I} \frac{dI}{dt}. \quad (15)$$

Решение уравнения ищется в области плоскости (z, t) , ограниченной снизу кривой $z = z_a(t)$ – траекторией фронта промачивания (рис. 5).

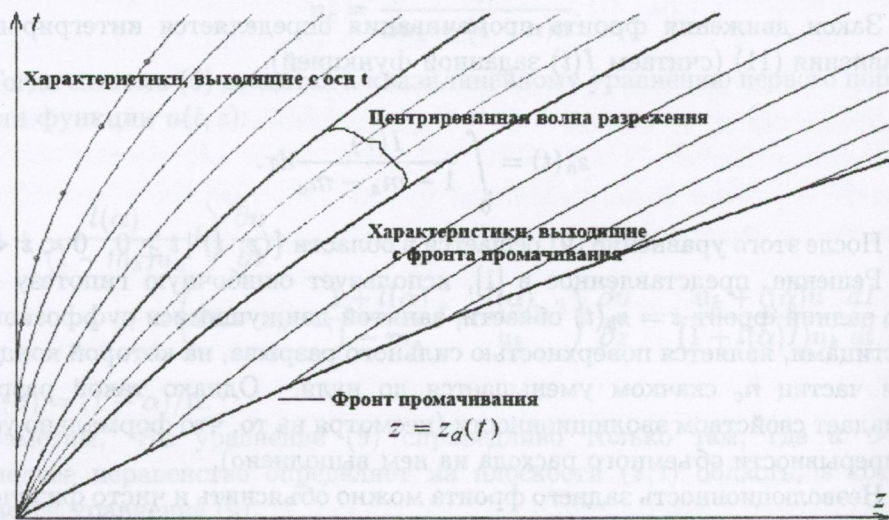


Рис. 5

На нижней границе области (при $z = z_a(t)$) граничное условие выглядит следующим образом:

$$u = u_a(t) = (\gamma - 1)I, \quad (16)$$

где $\gamma = 1/(1 - \beta)$, $\beta = m_c/(1 - m_s)$. Точка $(0, 0)$ плоскости (z, t) является особой точкой решения: скорость u в этой точке определена неоднозначно.

Будем далее считать, что $I(t)$ – монотонно возрастающая функция. Кроме того, будем предполагать выполненным условие

$$I(0) > 1 - \beta, \quad (17)$$

означаюче, що движение суффузионних частиц починається з моменту времени $t = 0$.

Если вблизи поверхности грунта ($z = 0$) вымылась только часть суффузионных частиц, т. е. $n_c(0, t) > 0$, то это означает, что за счет освобождения частицами пор уменьшилась скорость течения жидкости в порах. Причем она может уменьшиться только до граничного значения $u = 1$, при котором движение частиц прекращается. Если поток $I(t)$ увеличивается, то некоторая доля частиц, находящихся вблизи границы $z = 0$, приходит в движение. Следовательно, до тех пор, пока вблизи поверхности грунта имеются суффузионные частицы, на левой границе области будет выполняться условие $u = 1$.

Выражение (8) для концентрации n_c суффузионных частиц переписывается в следующем виде:

$$n_c(z, t) = \frac{(1 - m_s)(u(z, t) - I(t))}{\alpha + (1 - \alpha)u(z, t)}. \quad (18)$$

Выполним замену функции u на новую функцию v :

$$v(u, t) = \frac{u - I(t)}{1 + l(\alpha)I(t)}, \quad u = v(1 + l(\alpha)I) + I, \quad v(z, t) = v(u(z, t), t). \quad (19)$$

Уравнение относительно функции $v(z, t)$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha [(2v + l(\alpha)v^2)(1 + l(\alpha)I) + I - 1] \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Граничные и начальные условия тогда запишутся в виде:

$$v(z_a(t), t) = v(u = u_a(t), t) = \frac{(\gamma - 1)I(t)}{1 + l(\alpha)I(t)}, \quad v(z, t)|_{t=0} = 0. \quad (21)$$

2.1. Случай постоянного потока. Автомоделное решение

В случае $\alpha = 1$ ($l(\alpha) = 0$), $I = \text{const}$ легко получить автомоделное решение задачи (20, 21). Из анализа размерностей следует, что величину v можно представить как функцию отношения z/t :

$$v = f\left(\frac{z}{t}\right) = f(\xi). \quad (22)$$

Тогда можно получить следующие формулы для частных производных функции v :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} f'(\xi), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{t} f'(\xi). \quad (23)$$

Подставив эти выражения в уравнение (20), получим:

$$\frac{f'(\xi)}{t} (-\xi + 2f(\xi) + I - 1) = 0, \quad (24)$$

откуда следуют две возможности:

$$1) f(\xi) = \text{const}, \quad (25)$$

$$2) f(\xi) = \frac{1-I}{2} + \frac{\xi}{2}. \quad (26)$$

Первое решение соответствует однородному потоку, а второе – центрированной простой волне.

На рис. 6 представлены графики концентрации частиц $n_c(z/t)$ в автомодельном решении при $I(t) \equiv \text{const}$ для различных значений I .

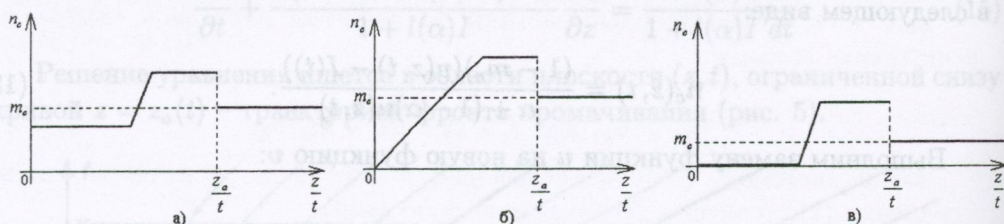


Рис. 6

Если объемный расход I меньше 1, то в промоленном грунте имеются две зоны с постоянной концентрацией частиц и зона с концентрацией, линейной по координате z (рис. 7а).

При значении объемного расхода, равном единице (рис. 7б), заднему фронту центрированной волны отвечает характеристика $z(t) \equiv 0$, причем на ней $u = 1$. На поверхности грунта частиц нет. Концентрация частиц линейно возрастает по мере углубления в грунт до некоторого значения, далее имеется зона, в которой концентрация частиц постоянна.

Если объемный расход больше 1 (рис. 7в), то заднему фронту центрированной волны отвечает характеристика, на которой $n_c = 0$. Вблизи поверхности грунта концентрация частиц равна нулю. Далее имеются две зоны: зона с концентрацией, линейно зависящей от z , и зона с постоянной концентрацией.

2.2. Случай переменного потока

Дифференциальное уравнение характеристик для задачи (20, 21) имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \alpha [(2v + l(\alpha)v^2)(1 + l(\alpha)I) + I - 1], \quad (27)$$

причем $v = \text{const}$ вдоль характеристик.

Семейство характеристик, выходящих с фронта промачивания, описывается следующим уравнением:

$$z(t, \xi) = z_F(t, v) - z_F(\xi, v) + z_a(\xi), \quad \xi \geq 0, \quad (28)$$

где

$$v = v(u_a(\xi), \xi), \quad (29)$$

$$z_F(t, v) = \alpha \left[(2v + l(\alpha)v^2) \left(t + l(\alpha) \int_0^t I(\tau) d\tau \right) + \int_0^t I(\tau) d\tau - t \right]. \quad (30)$$

Отметим, что $z(\xi, \xi) = z_a(\xi)$, т. е. ξ – это момент выхода соответствующей характеристики с траектории фронта промачивания (1). Функция $z_F(t, v)$ – это вспомогательная функция, которая соответствует уравнению характеристики, выходящей из начала координат.

В области, располагающейся на графике (z, t) выше характеристики, выходящей из начала координат, будет иметь место центрированная волна разрежения, подобная той, что возникает в задаче газовой динамики о движении поршня в трубе с газом [4]. Левая граница центрированной волны – кривая, на которой $v = v(u = 1, t = 0)$.

Семейство характеристик в центрированной волне описывается уравнением:

$$z(t, v) = z_F(t, v), \quad (31)$$

где $v(u = 1, t = 0) < v < v(u_a(0), t = 0)$.

В оставшейся области, лежащей левее центрированной волны (см. рис. 6), находится семейство характеристик, выходящих с оси t , которое описывается уравнением:

$$z(t, \xi) = z_F(t, v) - z_F(\xi, v), \quad (32)$$

где $v = v(u = 1, t = \xi)$, ξ – момент времени выхода характеристики с оси t , $\xi \geq 0$.

3. Анализ результатов

На рис. 7-10 представлены изображения характеристик и графики зависимости концентрации суффозионных частиц n_c от координаты z для различных наборов значений определяющих параметров. Графики зависимости n_c от координаты z при фиксированном t получены следующим образом. Для данной точки с координатами (z, t) восстанавливается характеристика, на которой эта точка находится. Зная значение u в точке на границе области, из которой выходит данная характеристика, и, пользуясь

тождеством $v = \text{const}$ на характеристике, находим значение u в точке (z, t) . Далее вычисляем искомое значение концентрации n_c .

На графиках концентрации $n_c(z)$ участок, соответствующий волне разрежения, при $\alpha = 1$ является линейным, а при $\alpha < 1$ - отрезком параболы.

С уменьшением α уменьшается скачок концентрации частиц на фронте промачивания, а в случае постоянного объемного расхода I также расширяется участок с постоянным значением концентрации.

На рис. 10 представлены изображения характеристик и график зависимости $n_c(z)$ для случая монотонно возрастающего расхода $I(t)$. Кружками обозначена характеристика, на которой $v = 0$, а, следовательно, и $n_c = 0$, т. е. левее этой характеристики частиц нет. В этом случае нет участка с постоянной концентрацией n_c .

На рис. 11 показана эволюция во времени распределения частиц в грунте для случаев постоянного и монотонно возрастающего объемного расхода I .

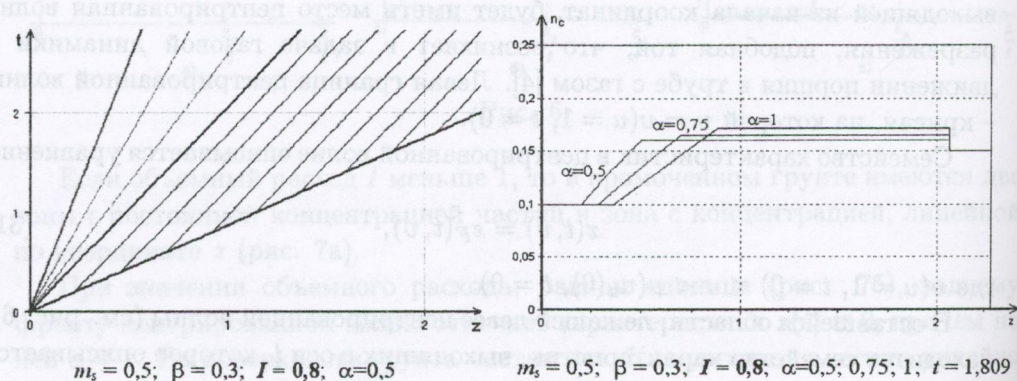


Рис. 7

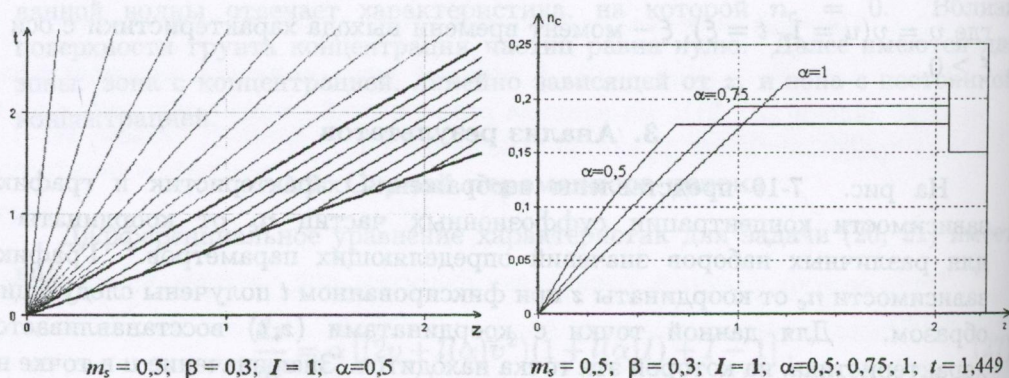


Рис. 8

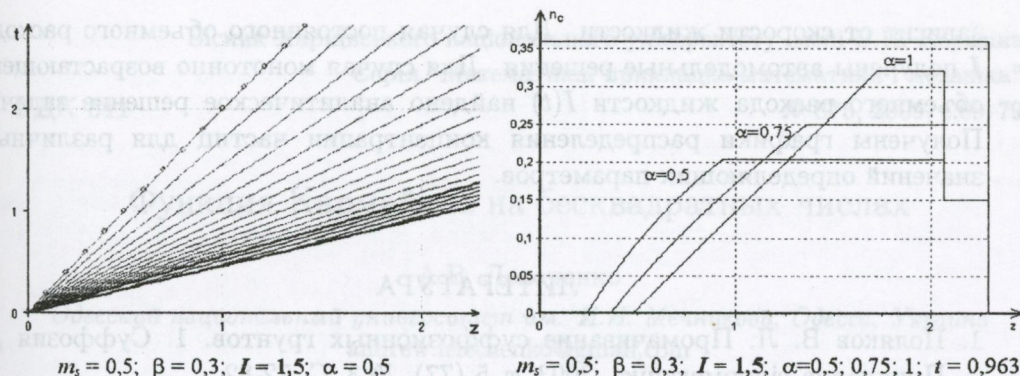


Рис. 9

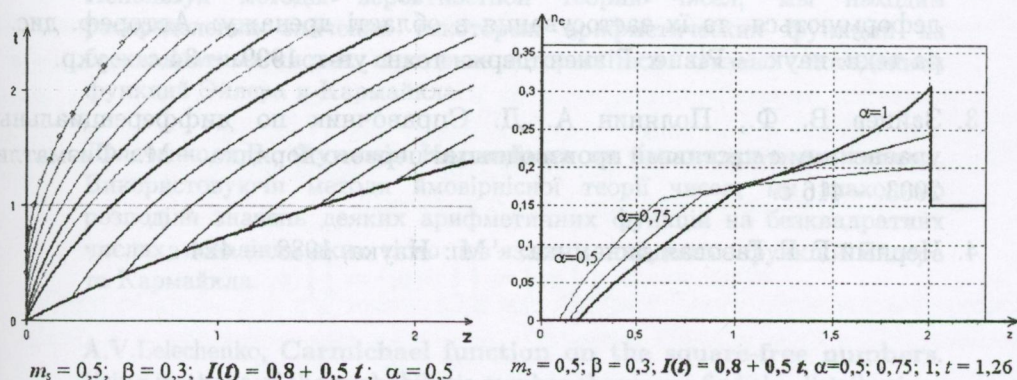


Рис. 10

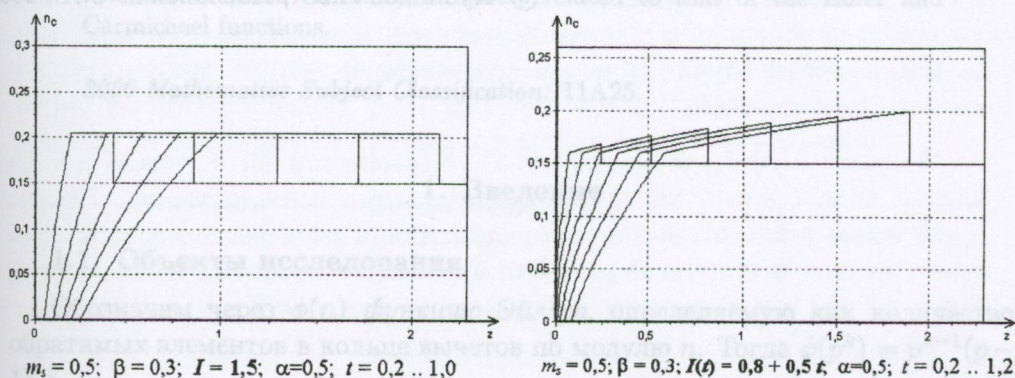


Рис. 11

Заключение

В работе рассмотрена задача о перераспределении суффозионных частиц при впитывании жидкости в грунт. Принимается кинематическая модель, в которой объемный расход жидкости, поступающей в грунт, является заранее заданной функцией, а скорость подвижных суффозионных частиц линейно

зависит от скорости жидкости. Для случая постоянного объемного расхода I получены автомодельные решения. Для случая монотонно возрастающего объемного расхода жидкости $I(t)$ найдено аналитическое решение задачи. Получены графики распределения концентрации частиц для различных значений определяющих параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляков В. Л. Промачивание суффозионных грунтов. 1. Суффозия // Прикладна гідромеханіка, 2003, т. 5 (77), № 3, С. 72-82.
2. Хлапук М. М. Теоретичні основи фільтрації в середовищах, що деформуються, та їх застосування в області дренажу: Автореф. дис. д-ра техн. наук. – Рівне: Рівнен. держ. техн. ун-т, 1999. – 34 с. – укр.
3. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.
4. Черный Г. Г. Газовая динамика. – М.: Наука, 1988. – 424 с.

Статья получена: 29.10.2009; принята: 15.11.2009.

© Кузнецов А.Ю., Пославский С.А., 2009

Функция Кармайкла на бесквадратных числах

А.В. Лелеченко

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Одесса, Украина

andrew.lelechenko@gmail.com

Используя методы вероятностной теории чисел, мы находим распределения значений некоторых арифметических функций на бесквадратных числах, поведение которых тесно связано с поведением функций Эйлера и Кармайкла.

Лелеченко А.В., **Функція Кармайкла на безквадратних числах.**

Використовуючи методи ймовірнісної теорії чисел, ми знаходимо розподіли значень деяких арифметичних функцій на безквадратних числах, поведінка яких тісно пов'язана з поведінкою функцій Ейлера та Кармайкла.

A.V.Lelechenko, **Carmichael function on the square-free numbers.**

Using methods of the probabilistic number theory, we find the distributions of values on the square-free numbers of some arithmetical functions. The behavior of these functions is closely related to that of the Euler and Carmichael functions.

2000 Mathematics Subject Classification: 11A25.

1. Введение

1.1. Объекты исследования

Обозначим через $\phi(n)$ функцию Эйлера, определяемую как количество обратимых элементов в кольце вычетов по модулю n . Тогда $\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ и

$$\phi\left(\prod_i p_i^{k_i}\right) = \prod_i \phi(p_i^{k_i}) = \prod_i p_i^{k_i-1}(p_i - 1).$$

Обозначим через $\lambda(n)$ функцию Кармайкла, которая ставит в соответствие натуральному n наибольший из порядков элементов $\mathbb{Z}_n^*$. Тогда

$$\lambda(p^k) = \begin{cases} \phi(2) = 1, & p = 2, k = 1, \\ \phi(4) = 2, & p = 2, k = 2, \\ \phi(p^k)/2, & p = 2, k \geq 3, \\ \phi(p^k), & p \geq 3. \end{cases}$$

Из теорем о порядках элементов в группах следует, что

$$\lambda\left(\prod_i p_i^{k_i}\right) = \text{lcm}_i \lambda(p_i^{k_i}),$$

где $\text{lcm}_i \alpha_i$ обозначает наименьшее общее кратное всех элементов множества $\{\alpha_i\}$. Отметим, что множества простых делителей $\phi(n)$ и $\lambda(n)$ совпадают.

Наконец, введем $\xi(n) = \phi(n)/\lambda(n)$. Из $\lambda(p^k) \mid \phi(p^k)$ и $\text{lcm}_i \alpha_i \mid \prod_i \alpha_i$ следует, что $\lambda(n) \mid \phi(n)$, а значит $\xi(n)$ — целочисленная функция. Этот факт также следует из теоретико-групповой интерпретации: порядок любого элемента группы всегда делит порядок группы нацело.

Особенно ясное строение приобретают эти функции, если ограничить рассмотрение только бесквадратными n . Напомним, что натуральное n называется *бесквадратным*, если из $p \mid n$ следует $p^2 \nmid n$. Отсюда всякое бесквадратное число может быть записано как $\prod_i p_i$, где все p_i различны. Удобно использовать $\mu^2(n)$ как индикатор бесквадратности, где μ — функция Мёбиуса. Итак, для бесквадратных n получим

$$\phi(n) = \phi\left(\prod_i p_i\right) = \prod_i \phi(p_i) = \prod_i (p_i - 1),$$

$$\lambda(n) = \lambda\left(\prod_i p_i\right) = \text{lcm}_i \lambda(p_i) = \text{lcm}_i (p_i - 1).$$

Здесь, аналогично введенному ранее обозначению $\text{lcm}_i \alpha_i$, $\text{gcd}_i \alpha_i$ обозначает наибольший общий делитель всех элементов множества $\{\alpha_i\}$. Понятно, что за исключением случая $n = p_1 p_2$ соотношение $\xi(n) = \text{gcd}_i (p_i - 1)$ будет выполняться не всегда.

Функция $\lambda(n)$ была введена Р. Д. Кармайклом [3] в начале XX века, однако долгое время не привлекала внимания исследователей. Толчком к изучению стало открытие ее приложений в ряде разделов математики, в частности — в криптографии. Это произошло в конце 80-х — начале 90-х годов и с тех пор количество публикаций о функции Кармайкла дискретно растет.

1.2. Элементарные свойства

Равенство $\phi(n) = \lambda(n)$ (т. е. $\xi(n) = 1$) эквивалентно утверждению о том, что группа $\mathbb{Z}_n^*$ является циклической, а значит $n = 2, 4, p^k, 2p^k$, где $p \neq 2, k \in \mathbb{N}$. При всех прочих значениях $n = \prod_i p_i^{k_i}$ значение $\lambda(n)$ представляет собой наименьшее общее кратное двух или более четных чисел, а значит $\prod_i \lambda(p_i^{k_i})$ и тем более $\phi(n) = \prod_i \phi(p_i^{k_i})$ делятся на $2\lambda(n)$ и, значит, величина $\xi(n)$ четна. Очевидно также, что для таких значений n значение $\phi(n)$ делится на 4, а $\lambda(n)$ — четно.

Обобщим предыдущее рассуждение: если $p \mid \xi(n)$, $p > 2$, то степень множителя p в каноническом разложении $\phi(n)$ должна быть строго больше его степени в каноническом разложении $\lambda(n)$. Поскольку $\phi(n)$ может отличаться от $\prod_i \lambda(p_i^{k_i})$ только на степень 2, то в множестве $\{\lambda(p_i^{k_i})\}$ найдутся по крайней мере два элемента, делящиеся на p (а значит $p \mid \lambda(n)$). Но это тем более верно для множества, составленного из $\phi(p_i^{k_i})$, поэтому $p^2 \mid \prod_i \phi(p_i^{k_i}) = \phi(n)$. Обратное неверно: из $p^2 \mid \phi(n)$ не обязательно следует, что $p \mid \xi(n)$. Например, $9 \mid \phi(19)$, но $\xi(19) = 1$.

Это свойство объясняет важность изучения $\xi(n)$, ибо поведение этой функции дает нам информацию и о поведении функции Кармайкла, и о поведении функции Эйлера одновременно.

Отсюда можно вывести грубую оценку: наибольший простой делитель q числа $\xi(n)$ не превосходит $\sqrt{\phi(n)} < \sqrt{n}$. В [1] элементарными методами получена лучшая оценка: для всех $n \geq 276$ выполняется $q \leq \frac{\sqrt{3n+1}-2}{6}$.

Отметим также, что большое количество результатов об асимптотическом росте и арифметических свойствах $\lambda(n)$ и $\xi(n)$ приводится в работах [1], [2] и [5].

1.3. Обозначения

Как обычно, p и q с индексами или без них будут обозначать простые числа; x — возрастающий параметр. Символы Ландау o , O и $\sim$, символы Виноградова $\gg$, $\ll$ и $\asymp$ будут рассматриваться при $x \rightarrow \infty$. Всюду под символом $\log$ подразумевается натуральный логарифм и используются сокращения: $x_1 = \log x$ и $x_k = \log x_{k-1}$. Введем функции $P(n)$, равную наибольшему простому делителю n , и $\Omega(n)$, равную числу простых делителей n с учетом их кратности. Функцию $\pi(x)$ положим равной количеству простых чисел, не превосходящих x , а функция $\pi(x, k, l)$ будет равна количеству простых чисел, не превосходящих x и сравнимых с l по модулю k .

2. Свойства $P(\xi(n))$

2.1. Цель настоящей работы

Недавно в работе [1] изучались арифметические свойства функций $\phi(n)$, $\lambda(n)$, $\xi(n)$. Основной результат работы этих авторов связан с распределением значений функции $P(\xi(n))$. Они доказали, что при любой убывающей к 0 функции $\epsilon(x)$ такой, что $\epsilon(x)x_2$ возрастает к $+\infty$, почти для всех n выполнено неравенство

$$\epsilon(n) \log \log n \leq P(\xi(n)) \leq \frac{(\log \log n)^2}{\epsilon(n) \log \log n}.$$

В работе [7] был использован аппарат вероятностной теории чисел для изучения локального поведения функций $P(\xi(n))$.

В настоящей работе мы, используя идеи [7] и [8], доказываем следующие утверждения:

Теорема 1. Введем функцию двух переменных Y и n , определяемую как

$$E_Y(n) := \#\{q > Y \mid q^2 \mid \phi(n)\}$$

и зафиксируем некоторое действительное b . Тогда для $Y = Y(x) = bx_2^2/x_3$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{n \leq x \mid E_Y(n) = k, \mu^2(n) = 1\} = \frac{6}{\pi^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda = 1/2b$.

Теорема 2. Пусть $\gamma(n)$ обозначает такое наибольшее простое q , что $q^2 \mid \phi(n)$. Зафиксируем некоторые $0 < c_1 < c_2 < +\infty$. Тогда для каждого простого $q \in [c_1 x_2^2/x_3, c_2 x_2^2/x_3]$ равномерно

$$\frac{1}{x} \#\{n \leq x \mid \gamma(n) = q, \mu^2(n) = 1\} = (1 + o(1)) \frac{6}{\pi^2} \frac{x_2^2}{2q^2} e^{-\lambda_q},$$

где $\lambda_q = \frac{x_2^2}{2qx_3}$.

Из теоремы 2 и очевидного факта о том, что для бесквадратных n значения $\gamma(n)$ и $P(\xi(n))$ совпадают, вытекает основной результат работы.

Следствие 1

$$\frac{1}{x} \#\{n \leq x \mid P(\xi(n)) = q, \mu^2(n) = 1\} = (1 + o(1)) \frac{6}{\pi^2} \frac{x_2^2}{2q^2} e^{-\lambda_q}.$$

Перечисленные результаты можно трактовать и с теоретико-вероятностной позиции. Например, теорема 1 говорит о том, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P\{E_Y(n) = k, \mu^2(n) = 1\} = \frac{6}{\pi^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

(Здесь возникла коллизия обозначений: $P\{A\}$ — вероятность события A , а $P(n)$ — арифметическая функция наибольшего простого делителя.)

2.2. Вспомогательные утверждения

Леммы 1 и 2, а также следствие 2 суть классические результаты (см. напр. [11] и [12]).

Лемма 1 (преобразование Абеля) Пусть задана произвольная последовательность комплексных чисел $\{a_k \in \mathbb{C}\}$ и непрерывно дифференцируемая функция $g: [t, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$. Тогда

$$\sum_{t \leq k \leq T} a_k g(k) = A(T)g(T) - \int_t^T A(x)g'(x) dx,$$

где $A(x) = \sum_{t \leq k \leq x} a_k$. Если к тому же ряд $\sum_{k=t}^{\infty} a_k g(k)$ сходится и при этом $A(T)g(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, то

$$\sum_{k=t}^{\infty} a_k g(k) = - \int_t^{\infty} A(x) g'(x) dx.$$

Следствие 2 (суммирование степеней простых чисел)

$$\sum_{p > x} p^{-k} \ll x^{1-k} x_1^{-1}, \quad k > 1.$$

Лемма 2 (плотность бесквадратных чисел)

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + O(x^{1/2}).$$

Лемма 3 Пусть $z_1, z_2, \dots, z_M$ — последовательность из 0 и 1, и пусть $T = \sum_{i=1}^M z_i$. Тогда для каждого $r = 1, \dots, M$ выполнено

$$\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_r \\ \alpha \neq \beta \rightarrow i_\alpha \neq i_\beta}} z_{i_1} \dots z_{i_r} = T(T-1) \dots (T-r+1).$$

Доказательство. Справедливость леммы очевидно вытекает из комбинаторного тождества

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} z_{i_1} \dots z_{i_r} = \binom{T}{r}.$$

Введем функцию $U(x, D) := \#\{n \leq x \mid D \mid \phi(n)\}$, обозначающую число таких не превосходящих x натуральных n , что заданное число D делит $\phi(n)$.

Лемма 4 Пусть $D = (p_1 \dots p_t)^2$, $p_1 < \dots < p_t$ — простые числа, $x_2^\delta \leq p_j \leq \leq x_2^L$, $0 < \delta < 1/2$, L — фиксированное число. Тогда

$$U(x, D) = \frac{x}{2^t} \cdot \frac{x_2^{2t}}{D} \left(1 + O\left(x_2^{-\delta}\right)\right).$$

Доказательство. См. [6].

Лемма 5 Пусть $l = \pm 1$. Тогда равномерно по $k < x$ выполняется

$$\sum_{\substack{p \equiv l \pmod{k} \\ p \leq x}} \frac{1}{p} = (1 + o(1)) \frac{x_2}{\phi(k)}.$$

Доказательство. См. [9, лемма 6.3] или [10, теорема 1].

2.3. Доказательство теоремы 1

Ниже мы докажем, пользуясь асимптотическими оценками плотностей элементов с определенными свойствами тот факт, что в условиях теоремы выполнено

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{n \leq x \mid E_Y(n) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Отсюда и из леммы 2 будет следовать утверждение теоремы.

Мы построим близкую к $E_Y(n)$ функцию более простой природы и оценим ее факториальные моменты. Мы увидим, что они совпадают с факториальными моментами распределения Пуассона, откуда и будет следовать утверждение теоремы.

Пусть $z = x_2^2$. Тогда, применяя лемму 4,

$$\sum_{n \leq x} E_z(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{q > z \\ q^2 \mid \phi(n)}} 1 = \sum_{x^{1/2} \geq q > z} U(x, q^2) \ll x x_2^2 \sum_{x^{1/2} \geq q > x_2^2} q^{-2}.$$

Последняя величина по следствию 2 асимптотически меньше $x x_2^2 \frac{x_2^{-2}}{x_3} = x x_3^{-1} = o(x)$. Введя новую функцию

$$\Delta_Y(n) := \#\{q \in [Y, z] \mid q^2 \mid \phi(n)\},$$

видим, что если для некоторого n значения $\Delta_Y(n)$ и $E_Y(n)$ различны, то $E_z(n) > 0$. Отсюда

$$\frac{1}{x} \#\{n \leq x \mid \Delta_Y(n) \neq E_Y(n)\} \leq \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} E_z(n) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Пусть $q \in [Y, z]$. Для простых $p_1 < p_2$ определим функцию, являющуюся индикатором делимости $p_1 - 1$ и $p_2 - 1$ на q :

$$f_q(p_1, p_2) := \begin{cases} 1, & \text{если } q \mid (p_1 - 1), q \mid (p_2 - 1), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда из $f_q(p_1, p_2) = 1$ следует $q^2 \mid \phi(p_1 p_2)$. Далее, положим

$$\kappa_q(n) := \sum_{\substack{p_1 p_2 \mid n \\ p_1 < p_2}} f_q(p_1, p_2),$$

т. е. это количество упорядоченных пар (p_1, p_2) простых чисел, делящих n , для которых $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{q}$. Наконец, просуммируем $\kappa_q(n)$ по некоторому отрезку значений q :

$$\Delta_Y^*(n) := \sum_{q \in [Y, z]} \kappa_q(n).$$

Теперь мы хотим показать, что

$$\frac{1}{x} \#\{n \leq x \mid \Delta_Y^*(n) \neq \Delta_Y(n)\} \rightarrow 0.$$

Действительно, если $\Delta_Y(n) \neq \Delta_Y^*(n)$, то существует по крайней мере одно $q \in [Y, z]$, что либо $\kappa_q(n) \geq 2$, либо $\kappa_q(n) = 0$, но в то же время $q^2 \mid \phi(n)$.

Вклад целых $n \leq x$ для второй ситуации есть $o(x)$: по лемме 5 для фиксированного q их не более, чем

$$\sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p \mid n \\ p \equiv 1 \pmod{q^2}}} 1 \leq \sum_{\substack{p \leq x \\ q^2 \mid p-1}} \frac{x}{p} \sim xx_2 q^{-2}.$$

Если же просуммировать последнее выражение по $q \in [Y, z]$, то получится (аналогично вышеприведенным выкладкам для $\sum_{n \leq x} E_z(n)$) выражение, действительно равное $o(x)$.

Наконец, покажем, что и ситуация $\kappa_q(n) \geq 2$ асимптотически редка. Поскольку при $\kappa_q(n) \geq 2$ верно $\kappa_q(n) \leq \kappa_q(n)(\kappa_q(n) - 1)$, то перемножая суммы почленно, получим

$$\begin{aligned} \kappa_q(n) &\leq \left(\sum_{\substack{p_1 p_2 \mid n \\ p_1 < p_2}} f_q(p_1, p_2) \right) \left(\sum_{\substack{p_1 p_2 \mid n \\ p_1 < p_2}} f_q(p_1, p_2) - 1 \right) = \\ &= \sum_{\substack{p_1 p_2 \mid n \\ p'_1 p'_2 \mid n}} f_q(p_1, p_2) f_q(p'_1, p'_2) - \sum_{\substack{p_1 p_2 \mid n \\ p_1 < p_2}} f_q(p_1, p_2) = \sum_{\substack{\text{lcm}(p_1 p_2, p'_1 p'_2) \mid n \\ (p_1, p_2) \neq (p'_1, p'_2)}} f_q(p_1, p_2) f_q(p'_1, p'_2). \end{aligned}$$

Отсюда запишем, для краткости опуская далее условия $p_1 < p_2$ и $p'_1 < p'_2$,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \kappa_q(n) \geq 2}} \kappa_q(n) \leq \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{\text{lcm}(p_1 p_2, p'_1 p'_2) \mid n \\ (p_1, p_2) \neq (p'_1, p'_2)}} f_q(p_1, p_2) f_q(p'_1, p'_2). \quad (*)$$

Правая часть (*) меньше, чем

$$x \sum_{m=3}^4 \sum_{\substack{p_1 \dots p_m \leq x \\ p_j \equiv 1 \pmod{q}}} \frac{1}{p_1 \dots p_m} \ll x \sum_{m=3}^4 \left(\frac{x_2}{q} \right)^m \ll \frac{xx_2^3}{q^3}.$$

(Для получения первой оценки мы применили лемму 5.) В силу следствия 2 имеем

$$\sum_{Y < q} q^{-3} \ll \frac{Y^{-2}}{\log Y} \ll \frac{x_2^2}{x_2^4 x_3} = x_2^{-4} x_3,$$

а значит

$$\sum_{Y \leq q \leq z} \sum_{\substack{n \leq x \\ \kappa_q(n) \geq 2}} \kappa_q(n) \ll \frac{xx_3}{x_2} = o(x). \quad (**)$$

Этим и завершается доказательство того, что $\frac{1}{x} \#\{n \leq x \mid \Delta_Y^*(n) \neq \Delta_Y(n)\} \rightarrow 0$.

Пусть

$$\tau_l(n) = \Delta_Y^*(n)(\Delta_Y^*(n) - 1) \dots (\Delta_Y^*(n) - l + 1),$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$. В таком случае $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \tau_l(n)$ по определению есть l -й факториальный момент функции $\Delta_Y^*(n)$.

Применяя лемму 3 к определению $\tau_l(n)$, получим

$$\tau_l(n) = \sum_{\substack{p_1^{(k)} p_2^{(k)} \mid n \\ q_k \in [Y, z] \\ k=1, \dots, l}} \prod_{j=1}^l f_{q_j}(p_1^{(j)}, p_2^{(j)}),$$

Пусть $\tau_l(n) = \tau_l^{(1)}(n) + \tau_l^{(2)}(n)$, где $\tau_l^{(1)}(n)$ — сумма по всем тем слагаемым, для которых из $i \neq j$ следует $q_i \neq q_j$ и $\{p_1^{(i)}, p_2^{(i)}\} \cap \{p_1^{(j)}, p_2^{(j)}\} = \emptyset$. К $\tau_l^{(2)}(n)$ отнесем все остальные слагаемые. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_2 &:= \sum_{n \leq x} \tau_l^{(2)}(n) \ll \sum_{n \leq x} \sum_q \sum_{\substack{p_1^{(i)} p_2^{(i)} \mid n \\ i=1, 2}} f_q(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}) f_q(p_1^{(2)}, p_2^{(2)}) + \\ &+ \sum_{n \leq x} \sum_{q_1 \neq q_2} \sum_{\substack{p_1^{(i)} p_2^{(i)} \mid n \\ i=1, 2}}^* f_{q_1}(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}) f_{q_2}(p_1^{(2)}, p_2^{(2)}) =: \sum_{21} + \sum_{22}. \end{aligned}$$

Здесь $q, q_1, q_2 \in [Y, z]$, а звездочка над $\sum_{22}^*$ указывает на то, что

$$2 \leq \Omega(\text{lcm}(p_1^{(1)} p_2^{(1)}, p_1^{(2)} p_2^{(2)})) \leq 3.$$

В силу (**) имеем оценку

$$\sum_{21} = o(x).$$

Далее, меняя порядок суммирования, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{22} &\ll \sum_{q_1 \neq q_2} \sum_{\substack{p_1^{(k)} p_2^{(k)} \\ k=1, 2}}^* f_{q_1}(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}) f_{q_2}(p_1^{(2)}, p_2^{(2)}) \cdot \frac{x}{\text{lcm}(p_1^{(1)} p_2^{(1)}, p_1^{(2)} p_2^{(2)})} \ll \\ &\ll x \sum_{q_1 \neq q_2} \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \sum_{j=2}^3 x_2^j \ll \frac{x}{x_2} \left(\sum_{Y \leq q \leq z} \frac{x_2^2}{q^2} \right)^2. \end{aligned}$$

А в силу леммы 1

$$\frac{x}{x_2} \left(\sum_{Y \leq q \leq z} \frac{x_2^2}{q^2} \right)^2 \ll \frac{x}{x_2} \left(\frac{x_2^2}{Y \log Y} \right)^2 = o(x),$$

ибо $\frac{x_2^2}{Y \log Y} \ll x_3$.

Отсюда вся $\sum_2 = o(x)$. Остается оценить $\tau_l^{(1)}$. Запишем по лемме 4, что

$$\begin{aligned} \sum_1 &:= \sum_{n \leq x} \tau_l^{(1)}(n) = \sum_{\substack{q_1 < \dots < q_l \\ q_j \in [Y, z]}} U(x, q_1^2 \dots q_l^2) = \frac{x}{2^l} \sum_{\substack{q_1 < \dots < q_l \\ q_j \in [Y, z]}} \frac{x_2^{2l}}{q_1^2 \dots q_l^2} + O\left(\frac{x}{x_2^\delta}\right) = \\ &= \frac{x}{2^l l!} \left(\sum_{q \in [Y, z]} \frac{x_2^2}{q^2} \right)^l + O\left(\frac{x}{x_2^\delta}\right). \end{aligned}$$

Здесь множитель $l!$ появляется в знаменателе правой части, т. к. там уже не учитывается упорядоченность q_i по возрастанию. Далее, в силу леммы 1

$$\begin{aligned} \sum_{Y < q < z} q^{-2} &= \frac{\pi(z-1) - \pi(Y)}{z^2} + \int_{Y+1}^{z-1} 2\pi(u) u^{-3} du \sim 2 \int_Y^z \frac{du}{u^2 \log u} \sim \\ &\sim [\text{в силу } 2x_3 = \log z \sim \log Y] \sim x_3^{-1} \int_Y^z u^{-2} du = x_3^{-1} u^{-1} \Big|_Y^z \sim \frac{1}{bx_2^2}. \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{1}{x} \sum_1 = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{x_2^2}{bx_2^2} \right)^l + o(1) = \frac{1}{(2b)^l l!} + o(1).$$

Обозначим, как и в условии теоремы, $\lambda := 1/2b$.

Теперь, принимая во внимание теорему Frechet—Shohat (см. [4]) и то, что $\frac{\lambda^l}{l!}$ являются факториальными моментами распределения Пуассона, мы получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{n \leq x \mid E_Y(n) = k\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{n \leq x \mid \Delta_Y^*(n) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Действительно, характеристическая функция распределения Пуассона $\phi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ регулярна во всей комплексной плоскости, а значит моменты однозначно определяют значения вероятностей.

2.4. Доказательство теоремы 2

Пусть $q \in [c_1 x_2^2/x_3, c_2 x_2^2/x_3]$ — простое число, где $0 < c_1 < c_2$.

Введем $\mathfrak{M}_q$, состоящее из чисел вида $m = p_1 p_2$, где p_1 и p_2 — различные простые, причем $q \mid (p_1 - 1)$ и $q \mid (p_2 - 1)$. Для некоторого x обозначим через $E_{q, \epsilon}$ множество тех $m \in \mathfrak{M}_q$, для которых $P(m) = \max\{p_1, p_2\} \leq x^\epsilon$.

Пусть $N_{q, x} := \{n \mid n \leq x, \mu^2(n) = 1, q^2 \mid \phi(n)\}$. Тогда

$$\#N_{q, x} \asymp U(x, q^2) = \frac{xx_2^2}{2q^2} \asymp \frac{xx_3^2}{x_2^2}.$$

Множество $N_{q, x}$ состоит из чисел, делящихся на $m = p_1 p_2 \in \mathfrak{M}_q$.

Для фиксированного $\omega \in E_{q,\epsilon}$ введем $N_{q,x}^{(\omega)} := \{n\omega \leq x \mid \mu^2(n\omega) = 1\}$. Очевидно, что для любого ω верно вложение $N_{q,x}^{(\omega)} \subset N_{q,x}$. Тогда рассмотрим множество

$$N^* := N_{q,x} \setminus \bigcup_{\omega \in E_{q,\epsilon}} N_{q,x}^{(\omega)}.$$

Мы хотим показать, что $\#N^* = o(\#N_{q,x})$. В силу сказанного выше о составе $N_{q,x}$ остается получить оценку для чисел из него, обладающих простым делителем, превосходящим x^ϵ . Но совершенно очевидно, что

$$\frac{x}{x^\epsilon} \ll o(\#N_{q,x}).$$

Далее, в процессе доказательства теоремы 1 была введена функция $\kappa_q(n)$ и доказано, что

$$\#\{n \leq x \mid \kappa_q(n) \geq 2\} \ll \frac{xx_2^3}{q^3} \ll \frac{xx_3^3}{x_3^3}.$$

Ясно, что если $\omega_1 \neq \omega_2$ и $n \in N_{q,x}^{(\omega_1)} \cap N_{q,x}^{(\omega_2)}$, то $\kappa_q(n) \geq 2$. Поэтому

$$\sum_{\substack{\omega_1 \neq \omega_2 \\ \omega_1, \omega_2 \in E_{q,\epsilon}}} \#(N_{q,x}^{(\omega_1)} \cap N_{q,x}^{(\omega_2)}) = o(\#N_{q,x}).$$

Пусть $\omega \in E_{q,\epsilon}$ и пусть $q_1 \neq q$. Если $q_1^2 \mid \phi(n)$, то, очевидно, $q_1^2 \mid \phi(n\omega)$. Оценим количество $K(q_1)$ всех тех $n\omega \leq x$, для которых $\mu^2(n\omega) = 1$, $q_1^2 \mid \phi(n\omega)$, но $q_1^2 \nmid \phi(n)$. Пользуясь установленными выше фактами о N^* и $N_{q,x}^{(\omega_1)} \cap N_{q,x}^{(\omega_2)}$, имеем

$$K(q_1) \ll q_1^{-2} \#N_{q,x}.$$

Теперь, суммируя по $q_1 \in (q, x_2^2)$, мы получим, что общее количество тех $n\omega$, для которых $\mu^2(n\omega) = 1$, $q_1^2 \mid \phi(n\omega)$ и $q_1^2 \nmid \phi(n)$ хотя бы для одного из $q_1 \in (q, x_2^2)$ не больше, чем $o(\#N_{q,x})$. Действительно,

$$\sum_{q < q_1 < x_2^2} q_1^{-2} \ll \frac{\pi(x_2^2)}{q^2} = o(1).$$

По определению, ненулевое значение $E_q(n)$ как раз говорит о наличии $q_1 > q$, такого, что $q_1^2 \mid \phi(n)$, а значит $q_1^2 \mid \phi(n\omega)$. Поэтому, используя результат теоремы 1, получим оценку искомой величины в виде

$$\begin{aligned} \#\{n \leq x \mid \gamma(n) = q, \mu^2(n) = 1\} &= \sum_{\substack{n \leq x \\ q^2 \mid \phi(n) \\ \mu^2(n) = 1 \\ E_q(n) = 0}} 1 = \sum_{\omega \in E_{q,\epsilon}} \sum_{\substack{n \leq x/\omega \\ \mu^2(n) = 1 \\ E_q(n) = 0}} 1 + o(\#N_{q,x}) = \\ &= \sum_{\omega \in E_{q,\epsilon}} \#\{n \leq x/\omega \mid \mu^2(n) = 1, E_q(n) = 0\} + o(x) = \sum_{\omega \in E_{q,\epsilon}} \frac{6}{\pi^2} \frac{x}{\omega} e^{-\lambda_q} + o(x), \end{aligned}$$

где $\lambda_q = \frac{x_2^2}{2qx_3}$. Наконец, применяя лемму 5,

$$\sum_{\omega \in E_{q,\epsilon}} \frac{1}{\omega} = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq x^\epsilon \\ p_1 < p_2 \\ q|(p_1-1) \\ q|(p_2-1)}} \frac{1}{p_1 p_2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p_1 \leq x^\epsilon \\ q|(p_1-1)}} \frac{1}{p_1} \sum_{\substack{p_2 \leq x^\epsilon/p_1 \\ q|(p_2-1)}} \frac{1}{p_2} = (1 + o(1)) \frac{x_2^2}{2q^2}.$$

Подставив это в выражение для $\#\{n \leq x \mid \gamma(n) = q, \mu^2(n) = 1\}$, сразу получим утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Banks W. D., Luca F., Shparlinski I. E. Arithmetic properties of $\phi(n)/\lambda(n)$ and the structure of the multiplicative group modulo n . // Comm. Math. Helv.,— 2006.— **81**.— С. 1-22.
2. Cameron P. J., Preece D. A. Notes on primitive lambda-roots. — <http://www.maths.qmw.ac.uk/~pjc/csgnotes/lambda.pdf>.
3. Carmichael R. D. Note on a new number theory function. // Bull. Amer. Math. Soc.,— 1909-10.— **16**.— С. 232-238.
4. Elliot P. D. T. A. Probabilistic number theory.— New-York: Springer, 1973.— 476 с.
5. Erdős P., Pomerance C., Schmutz E. Carmichael's lambda function. // Acta Arith.,— 1991.— **58**.— С. 363-385.
6. Kátai I. On the prime power divisors of iterates of $\phi(n)$ and $\sigma(n)$.— Preprint, E. Lorand University, Budapest, 2007.
7. Kátai I. Some results on the Carmichael's and on the Euler's ϕ function. // Acta Math. Hungar., (to appear).
8. De Koninck J. M., Kátai I. On the distribution of subsets of primes in the prime factorization of integers. // Acta Arith.,— 1995.— **72**.— С. 169-200.
9. Norton K. K. On the number of restricted prime factors of an integer I. // Illinois J. Math.,— 1976.— **20**.— С. 681-705.
10. Pomerance C. On the distribution of amicable numbers. // J. Reine Angew. Math.,— 1977.— **293/294**.— С. 217-222.
11. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел.— М.: УРСС, 2004.— 184 с.
12. Прахар К. Распределение простых чисел.— М.: Мир, 1967.— 512 с.

Статья получена: 25.06.2009; окончательный вариант: 25.10.2009;
принята: 15.11.2009.

© Лелеченко А.В., 2009

Гравитационная седиментация эритроцитов: эксперименты и теоретическая модель

Н.Н.Кизилова, В.А.Черевко

*Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина,
пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина*

Представлены результаты численных расчетов задачи об оседании суспензии агрегирующих частиц на основе трехфазной модели, в которой учитывается захват и запираание жидкости в агрегатах. Приведены результаты экспериментальных исследований скорости оседания эритроцитов крови пациентов в норме и после добавления аллергенов. На основе теоретических расчетов и данных измерений получены показатели, которые могут быть использованы в медицинской диагностике.

Н.М.Кізілова, В.О.Черевко, **Гравітаційна седиментація еритроцитів: експерименти та теоретична модель.** Представлені результати чисельних розрахунків задачі про осідання суспензії агрегуючих частинок на основі трифазної моделі, в якій враховуються захват і замикання рідини в агрегатах. Приведені результати експериментальних досліджень швидкості осідання еритроцитів крові пацієнтів в нормі і після додавання алергенів. На основі теоретичних розрахунків і даних вимірювань отримані показники, які можуть бути використані в медичній діагностиці.

N.N. Kizilova, V.A.Cherevko, **Gravitational sedimentation of erythrocytes: experiments and a theoretical model.** The results of numerical calculations of sedimentation of aggregating particles suspension on the basis of a three-phase model are presented. The model takes into account fluid capture and locking in the aggregates. The results of experimental investigations of the erythrocyte sedimentation rate in normalcy and after addition of allergens are given. On the basis of theoretical calculations and experimental data some indexes useful for medical diagnostics are obtained.
2000 Mathematics Subject Classification: 76T20, 83C55.

Введение

Исследование скорости оседания эритроцитов (СОЭ) крови является одним из самых распространенных клинических тестов. Оседание эритроцитов определяется скоростью образования эритроцитарных агрегатов, а

скорость агрегатообразования существенно изменяется при различных заболеваниях [1]. Изменения состава крови, приводящие к снижению поверхностного заряда эритроцитов, ведут к ускорению агрегации, а изменения, приводящие к переходу эритроцитов от формы двояковогнутого диска к сфере или полусфере, снижают агрегацию. Скорость v оседания одиночной клетки можно оценить, используя обобщенную формулу Стокса $v = \lambda \cdot \delta\rho \cdot g \cdot w^{2/3} \mu^{-1}$, где $\delta\rho = \rho_s - \rho_f$, ρ_s и ρ_f – плотности эритроцитов и плазмы, μ – вязкость плазмы, w – объем клетки, λ – коэффициент, учитывающий форму клетки, g – ускорение силы тяжести. Оценки по формуле Стокса показывают, что $v = 0.3 - 0.8$ мкм/с), поэтому в пробах крови тех животных, эритроциты которых не образуют агрегатов, оседания практически не наблюдается [1].

В разных странах приняты различные стандарты проведения теста СОЭ. В странах СНГ используются стеклянные трубки Панченкова длиной $L = 10$ см и внутренним диаметром $d = 1$ мм, которые заполняются артериальной кровью, взятой из пальца пациента. Диагностическим показателем считается высота h столбика чистой плазмы в верхней части трубки через 1 час после начала оседания. В странах Европы и США используются трубки Westergren и Wintrobe ($L = 20$ см, $d = 3$ мм), которые заполняются венозной кровью пациента, взятой из локтевой вены. Пробы крови, размеры трубок и время проведения тестов различны, так что сопоставление результатов по часовому показателю затруднительно. Для всех методик существуют рекомендации относительно диапазонов значений h , отвечающих норме или патологии, полученные эмпирическим путем. Однако специально проведенные эксперименты показали, что в 27-28 % случаев повышенный показатель СОЭ по методу Westergren соответствует нормальным показателям СОЭ по Wintrobe [2].

Более информативным является регистрация динамических кривых оседания $h(t)$ каждые 10–15 мин в течение 1.5–2 часов (фракционная СОЭ) [3]. В последние годы разрабатываются промышленные установки для автоматической регистрации кривых $h(t)$ с помощью оптических методов, основанных на различии светопропускания чистой плазмы и крови (automated Erythrocyte Sedimentation Rate systems). Оптическая аппаратура малоинерционна и удобна для непрерывной регистрации динамических кривых [4–6]. Проведение теста СОЭ в центрифуге, снабженной фотоэлектрическим устройством для регистрации светопропускания, позволяет достичь существенного ускорения теста (10–20 мин вместо 1–2 ч) и, кроме этого, оценить содержание эритроцитов в крови по объему полученного в центрифуге осадка [7,8].

Для учета динамики начальных стадий процесса оседания предложены модификации стандартного показателя СОЭ, которые в медицинской литературе получили название «тест сигма-СОЭ», что подразумевает учет S-образной формы кривой $h(t)$ [9,10]. При этом диагностический показатель представляет собой среднее арифметическое пяти–шести значений h_j , измеренных через каждые 15–20 мин. Иногда в качестве весовых коэффициентов

для величин h_j используются показатели крови, такие как содержание гемоглобина в эритроцитах и концентрация некоторых белков плазмы. При этом ряд заболеваний можно диагностировать именно по величине сигма-СОЭ, в то время как обычный часовой показатель остается в пределах нормы [11].

Задача об оседании эритроцитов крови как суспензии агрегирующих частиц рассматривалась на основе двухфазной модели (эритроциты и плазма крови) в одномерной [12,13] и двумерной [14] постановках. Было показано, что время достижения максимальной скорости оседания, которое определяется из дифференциальных кривых $h'(t)$, является более информативным показателем для диагностики, чем стандартный часовой показатель.

Сближение эритроцитов, образование агрегата и ускоренное оседание более крупных агрегатов приводит к неустойчивости гравитационной седиментации по отношению к малым возмущениям начального однородного распределения клеток [13,14]. Так, если в начале оседания в верхней части трубки образуется крупный агрегат, то он будет оседать с существенно большей скоростью, чем малые агрегаты, укрупняясь и все более ускоряясь по мере объединения с последними [1]. В результате при проведении теста в нескольких трубках с порциями крови одного и того же пациента можно получить различные седиментационные кривые, отличающиеся динамикой и часовыми показателями [14]. При проведении теста СОЭ в центрифуге с 12 трубками Панченкова, заполненными кровью одного и того же пациента, различия в полученных кривых становятся еще более выраженными за счет действия неоднородного поля центробежных сил [7,8]. Неустойчивость оседания, проявляющаяся в различии седиментационных кривых, усиливается при заболеваниях, в частности, при остром инфаркте миокарда, в связи с чем было предложено использовать численные характеристики дифференциальных кривых $h'(t)$, такие как неоднородность скорости оседания, общее число и величины максимумов скорости, а также ряд других, как самостоятельные диагностические параметры [6]. В связи с этим в литературе обсуждается сама целесообразность проведения теста СОЭ в стандартной постановке [15]. Тем не менее, часовой показатель СОЭ существенно увеличивается при всех видах воспалительных заболеваний, инфаркте миокарда и новообразованиях, при наличии хронических заболеваний, что делает его таким же важным неспецифическим диагностическим показателем, как и температура тела.

Теория, позволяющая дать физическое обоснование поведения и биомеханическую интерпретацию параметров седиментационных кривых, а также сравнить эффективность различных предложенных в литературе показателей сигма-СОЭ, в настоящее время отсутствует. Часовой показатель, как и вид кривых $h(t)$ и $h'(t)$ сильно зависит от начальной концентрации эритроцитов и геометрии трубки [12,13]. В соответствии с некоторыми методиками рекомендуется разводить пробу крови для достижения стандартной массовой концентрации эритроцитов $C = 0.35$, что в повседневной клинической практи-

ке не делается. Таким образом, актуальной является задача выявления такого диагностического показателя, который не зависит от используемого метода, условий проведения теста и индивидуальной концентрации эритроцитов в пробе крови. В данной работе приведены результаты собственных экспериментальных исследований и численных расчетов по модели крови как трехфазной суспензии агрегирующих частиц с целью получить искомый диагностический показатель.

1. Трехфазная модель суспензии крови.

Простейшая двухфазная модель крови включает твердую (эритроциты) и жидкую (плазма крови) фазы. При нормальных значениях кислотности рН плазмы осмотические явления несущественны и массообменом между фазами (обмен водой и белками между клеткой и плазмой через мембрану клетки) во время седиментации можно пренебречь. При этом в седиментационной трубке можно выделить три зоны (рис.1) [1]. В верхней части трубки имеется зона, состоящая только из фазы свободной жидкости (I), а в нижней – только из твердой фазы осевших клеток (III). Центральная часть трубки занята областью оседающих агрегатов (II), в которой присутствуют обе фазы. Граница раздела между зонами I и II визуально различима, в то время как между зонами II и III – практически не видна. Довольно часто в экспериментах наблюдается, что граница раздела между зонами I и II несколько размыта, так что в центральной зоне визуально и с помощью оптической аппаратуры можно выделить 2–3 подзоны (рис.1): спокойная верхняя подзона (II а), в которой клетки и небольшие агрегаты оседают независимо с примерно равными скоростями; центральная подзона потоков (II б), в которой имеются нисходящие и восходящие потоки плазмы с агрегатами, а оседание медленнее, чем в спокойной верхней подзоне; нижняя спокойная подзона (II в), в которой агрегаты не перемещаются с потоками плазмы, а расположены в виде эритроцитарного остова, при уплотнении которого в поле силы тяжести плазма отфильтровывается и устремляется в зону II б. Наличие и протяженность подзон сильно зависит от начальной концентрации клеток в пробе крови [1]. Для описания образования отдельных подзон необходимо усложнить модель и рассмотреть три фазы: свободную жидкость (фаза 1), частицы (фаза 2) и жидкость, захваченную частицами и запертую внутри агрегатов (фаза 3).

При образовании агрегата часть плазмы может остаться запертой внутри него и удерживаться за счет адсорбции. Даже после центрифугирования крови в образующемся эритроцитарном осадке содержится 2-4% запертой плазмы [13]. При гравитационном оседании доля запертой плазмы может быть значительно выше, в зависимости от поверхностного заряда и адгезивных свойств клеточной поверхности. Агрегаты, содержащие большую долю захваченной плазмы, существенно отличаются от компактных агрегатов, содержащих незначительный объем плазмы, в том числе, по оптическим свойствам [16].

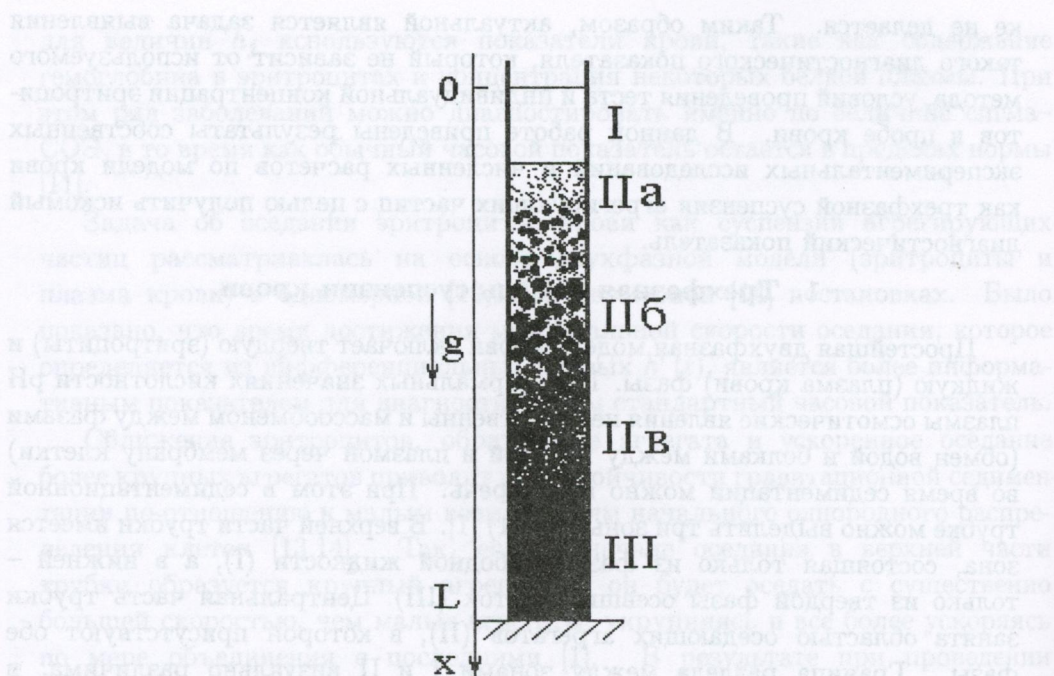


Рис.1: Распределение отдельных зон при оседании эритроцитов крови в вертикальной трубке.

Математическая модель крови как трехфазной суспензии изложена в работе [17] и базируется на термодинамической модели суспензии агрегирующих частиц, разработанной в [18,19]. Предполагается, что агрегаты могут образовываться в ходе столкновений частиц, сопровождающихся их слипанием. Процессы агрегации характеризуются функцией распределения $f(t, \vec{r}, v, \vartheta)$ такой, что $f(v, \vartheta) dv d\vartheta$ – это число агрегатов, находящихся в единице объема суспензии, имеющих объем $V \in [v, v + dv]$ и содержащих объем $\Theta \in [\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ запертой жидкости. При таком описании численная N , объемная H и истинная объемная C (без учета запертой жидкости) концентрации агрегатов будут, соответственно:

$$N(t, \vec{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \vec{r}, v, \vartheta) dv d\vartheta,$$

$$H(t, \vec{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty v \cdot f(t, \vec{r}, v, \vartheta) dv d\vartheta,$$

$$C(t, \vec{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty (v - \vartheta) \cdot f(t, \vec{r}, v, \vartheta) dv d\vartheta$$

При этом кинетика процессов агрегации описывается уравнением баланса для числа агрегатов N :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} (N \vec{u}^2) = \varphi \quad (1)$$

где φ – скорость образования агрегатов, u^2 – скорость движения агрегатов (второй фазы).

Законы сохранения массы и импульсов фаз можно записать в общем виде [17-19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho^\alpha \vec{u}^\alpha) &= \theta^\alpha \\ \rho^\alpha \frac{d_\alpha \vec{u}^\alpha}{dt} &= -\operatorname{div} \hat{P}^\alpha + \rho^\alpha \vec{f}^\alpha + \vec{R}^\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

$$\rho^1 = (1 - H) \rho_f; \quad \rho^2 = C \rho_s; \quad \rho^3 = (H - C) \rho_f, \quad (3)$$

где значения $\alpha = 1, 2, 3$ соответствуют фазам свободной плазмы, частиц и запертой плазмы соответственно, $\vec{u}^\alpha$ и $\hat{P}^\alpha$ – скорости движения и тензоры напряжений фаз; ρ_s, ρ_f – истинные плотности частиц и жидкости; θ^α – скорости межфазного массообмена ($\theta^2 = 0$, θ^3 – скорость запираания жидкости в агрегатах, $\theta^1 = -\theta^3$); $\vec{f}^\alpha$ – плотности внешних массовых сил; $\vec{R}^\alpha$ – объемные силы межфазного взаимодействия.

Таким образом, массообмен возможен между фазами свободной и запертой в агрегатах жидкости (фазами 1 и 3). Условия несжимаемости фаз имеют вид [17-19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (1 - H)}{\partial t} + \operatorname{div} ((1 - H) \vec{u}^1) &= -\theta \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div} (C \vec{u}^2) &= 0 \\ \frac{\partial (H - C)}{\partial t} + \operatorname{div} ((H - C) \vec{u}^3) &= \theta \end{aligned} \quad (4)$$

где $\theta = \theta^3 / \rho_f$.

Суммируя уравнения (4), получим условие несжимаемости суспензии:

$$\operatorname{div} ((1 - H) \vec{u}^1 + C \vec{u}^2 + (H - C) \vec{u}^3) = 0 \quad (5)$$

Выражения для тензоров напряжений фаз и сил межфазного взаимодействия имеют вид [18,19]:

$$\begin{aligned}
\hat{P}^1 &= [(p + p_H^1)(1 - H) - \mu_1 e_{kk}^1] \hat{\delta} - 2\mu_2 \hat{e}^1 \\
\hat{P}^2 &= [(p - p^1 - p^2 - p^3 - p_H^3)C - \mu_3 (e_{kk}^2 - \varsigma_{kk})] \hat{\delta} - 2\mu_4 (\hat{e}^2 - \hat{\varsigma}^2) \\
\hat{P}^2 + \hat{\sigma}^2 &= [(p - p^1 - p^2 - p^3 - p_H^3)C - \mu_5 \varsigma_{kk}] \hat{\delta} - 2\mu_6 \hat{\varsigma}^2 \\
\hat{P}^3 &= [(p - p_H^2 - p_H^3)(H - C) - \mu_7 e_{kk}^3] \hat{\delta} - 2\mu_8 \hat{e}^3 \\
\vec{R}^1 &= F(\vec{u}^2 - \vec{u}^1) - p \nabla H + p^1 \nabla C \\
\vec{R}^3 &= D(\vec{u}^2 - \vec{u}^3) + (p - p_H^2) \nabla (H - C) + (p^3 + p_H^3) \nabla C
\end{aligned} \tag{6}$$

где $p_H^\alpha(C, H)$, $p_C^\alpha(C, H)$, $\mu_j(C, H)$ – термодинамические параметры, $\hat{\varsigma}^2$ – тензор скоростей упругих деформаций фазы 2, F – коэффициент Стокса сопротивления агрегата, движущегося в жидкости, D – коэффициент, описывающий проницаемость пористого каркаса осевших агрегатов для фильтрующей через него жидкости.

Предложенный подход к описанию агрегации и термодинамическая модель суспензии [18,19] использовались при расчетах группировки агрегатов эритроцитов в поле стоячей звуковой волны [13], гравитационного оседания агрегатов в сдвиговом потоке [20], течения суспензии в канале с проницаемыми стенками [21], оседания намагничивающихся агрегирующих частиц во внешнем однородном и неоднородном магнитном полях [14] и ряде других задач. Было показано хорошее соответствие теоретических расчетов результатам экспериментов по течению крови в щели ротационного вискозиметра [20], аппаратах для искусственной оксигенации крови [21] и многочисленным экспериментам по агрегации и оседанию клеток крови во внешних электромагнитных полях [14].

2. Одномерная задача об оседании агрегирующих частиц в вертикальной трубке.

Предполагая рассмотрение гравитационного оседания в квазиодномерной постановке, запишем уравнения, полученные после подстановки (3) и (6) в (2), в проекции на ось Ox (рис.1). Пренебрегая инерционными членами, вязкими напряжениями в фазах $\mu_j = 0$, а также полагая $p_C^{1,3} = p_H^{1,3} = 0$, $p_{C,H}^2 = p_{C,H}$, получим уравнения движения в виде:

$$\begin{aligned}
-(1 - H) \frac{\partial p}{\partial x} + (1 - H) \rho_f G + F(u^2 - u^1) &= 0 \\
-C \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p_C C}{\partial x} + p_H \frac{\partial (H - C)}{\partial x} - F(u^2 - u^1) - \\
-D(u^2 - u^3) + C \rho_s G &= 0 \\
-(H - C) \frac{\partial (p - p_H)}{\partial x} + D(u^2 - u^3) + (H - C) \rho_f G &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $G = a + bx$ в случае поля центробежных сил, где коэффициенты a и b зависят от частоты вращения центрифуги и расположения трубки относительно оси вращения, и $G = g$ для гравитационного оседания.

Записывая (5) в проекции на ось Ox и учитывая условие непротекания суспензии на дне трубки, получим связь между скоростями фаз:

$$(1 - H)u^1 + Cu^2 + (H - C)u^3 = 0 \quad (8)$$

Из (7), (8) получим выражения для скоростей фаз:

$$\begin{aligned} u^1 &= -\frac{H(1-H)}{F}\xi_1 + \frac{(H-C)^2}{D}\xi_2 \\ u^2 &= \frac{(1-H)^2}{F}\xi_1 + \frac{(H-C)^2}{D}\xi_2 \\ u^3 &= \frac{(1-H)^2}{F}\xi_1 + \frac{(H-C)(1-H+C)}{D}\xi_2 \end{aligned} \quad (9)$$

где $\xi_1 = C\delta\rho \cdot G + \partial[p_C C + p_H(H-C)]/\partial x$, $\xi_2 = \xi_1 - \partial p_H/\partial x$

Подставляя (9) в (1), (4), получим систему квазилинейных уравнений для определения неизвестных C, H, N . Введем вместо числовой концентрации N средний объем твердой фазы в агрегатах $w = C/N$ и из (1), (4), (9) получим систему квазилинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u^2 \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\varphi w^2}{C} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial x} &= \theta \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_4 \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_5 \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_6 \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

где $\gamma_1 = u^1 - (1-H)\partial u^1/\partial H$, $\gamma_2 = -(1-H)\partial u^1/\partial C$, $\gamma_3 = -(1-H)\partial u^1/\partial w$, $\gamma_4 = C\partial u^2/\partial H$, $\gamma_5 = u^2 + C\partial u^2/\partial C$, $\gamma_6 = C\partial u^2/\partial w$,

$$u^1 = \left[-H(1-H)/F + (H-C)^2/D \right] CG\delta\rho,$$

$$u^2 = \left[(1-H)^2/F + (H-C)^2/D \right] CG\delta\rho.$$

Вид зависимостей F, D, φ, θ от C, H, w может быть определен, например, с помощью теории размерностей, а безразмерные коэффициенты оценены на основе эмпирических данных [13,14,20,21]. В соответствии с результатами [13,17,19-21], для дальнейших численных расчетов примем

$$\begin{aligned} F &= \alpha\mu H(1-H)^{-\eta_1} (H/C)^{2/3} w^{-2/3} \\ D &= \beta\mu C(1-C/H)^{-\eta_2} w_0^{-2/3} \\ \varphi &= kHCw^{-2}, \quad p_{C,H} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

где w_0 – объем одиночной частицы, определяющий размер «зерна» пористой среды, образованной осевшими агрегатами, μ – вязкость свободной плазмы, $\alpha, \beta, k, \eta_1, \eta_2$ – коэффициенты, а k характеризует скорость агрегации частиц. Начальные и граничные условия задачи (10) имеют вид:

$$\begin{aligned} 0 \leq x < L: \quad H(0, x) = H_0, \quad C(0, x) = C_0, \quad w(0, x) = w_0 \\ x = L, \quad t \geq 0: \quad u^{1,2} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

3. Численное решение основной задачи и анализ результатов.

Система уравнений (10) гиперболическая, и ее решение можно получить методом характеристик. Рассмотрим подробнее случай гравитационного оседания ($G = g$). Тогда уравнения характеристик и условия на них примут вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)_1 &= u^2 \\ \left(\frac{dx}{dt} \right)_{2,3} &= \frac{\gamma_1 + \gamma_5 \pm \sqrt{(\gamma_1 - \gamma_5)^2 + 4\gamma_2\gamma_4}}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -\frac{\varphi w^2}{C} \\ \frac{1}{2} (A_1 + A_2) (1 \pm S) \left(S_{2,3} \left(\frac{dH}{dt} - \theta \right) + \gamma_2 \frac{dC}{dt} \right) + \\ &+ R_{2,3} \left(\frac{dw}{dt} + \frac{\varphi w^2}{C} \right) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

где $A_1 = H \partial u_s / \partial H - (1 - H) \partial u_f / \partial H$,
 $A_2 = C \partial u_s / \partial C + C \partial u_f / \partial C$, $A = A_1 + A_2$, $S_{2,3} = 1/2 (A_1 (1 \pm S) - A_2 (1 \mp S))$,
 $R_{2,3} = S_{2,3} \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_6$, $S = \sqrt{A^2 - B/A}$,
 $B = 4C (\partial u_s / \partial H \cdot \partial u_f / \partial C - \partial u_s / \partial C \cdot \partial u_f / \partial H)$, $u_s = (1 - H)^2 C \delta \rho g / F$,
 $u_f = (H - C)^2 C \delta \rho g / D$, $u_s + u_f = u^2$.

Отсюда с учетом (11) получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1 + (3\eta_1 + 5)H}{3(1 - H)} u_s - \frac{(2 + \eta_2 C/H)(1 - H)}{H - C} u_f \\ A_2 &= \frac{1}{3} u_s - \frac{(2 + \eta_2)C}{H - C} u_f \\ A &= -\frac{(\eta_1 + 2)H}{1 - H} u_s - \left[\frac{2(1 - H + C) + \eta_2 C/H}{H - C} \right] u_f \\ B &= \frac{4C}{H - C} \left[\frac{1 + (3\eta_1 + 5)H}{3H(1 - H)} (2 + \eta_2) - \frac{(2 + \eta_2 C/H)}{3C} \right] u_s u_f \\ \gamma_2 &= \frac{H}{3C} u_s + \frac{(1 - H)(2 + \eta_2)}{H - C} u_f \end{aligned} \quad (15)$$

Решение задачи (10)–(12) может быть получено методом характеристик. В соответствии с (13) наклон первого семейства характеристик определяется скоростью u^2 движения твердой фазы. Характеристика этого семейства, проходящая через начало координат ($t = 0, x = 0$), соответствует разрыву между зонами I и II [13,14]. У третьего семейства характеристик наклон отрицательный $(dx/dt)|_3 < 0$, и характеристика этого семейства, проходящая через точку $t = 0, x = L$, разделяет зоны II и III (рис.2). Наклон характеристик второго семейства $(dx/dt)|_2$ может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от значений коэффициентов в (11) и начальной концентрации частиц в суспензии. Таким образом, возможны две картины распределения подзон зоны II и, соответственно, динамики оседания (рис.2а,б). Проводя оценки (12) с учетом (14), получим:

$$\begin{aligned} 1) \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 &> 0, & 0 < H_0 < \frac{1}{\eta_1 + 3} \\ 2) \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 &< 0, & \frac{1}{\eta_1 + 3} < H_0 < 1 \end{aligned} \quad (16)$$

В первом случае (16) при $t < t^*$ (рис.2а) существуют зоны чистой плазмы, подзоны свободно оседающих агрегатов, потоков и спокойная подзона, переходящая в компактную зону. При $t = t^*$ зона потоков исчезает. Концентрация агрегатов достаточно мала, чтобы они успевали осесть, не укрупняясь, на остов осевших частиц. При $t > t^{**}$ скорость перемещения границы раздела зон I и II достигает максимума и дальнейшее увеличение протяженности первой зоны обусловлено фильтрацией жидкости через остов осевших частиц и медленное уплотнение осадка.

Во втором случае (16) при $t = t^*$ исчезает зона свободно оседающих агрегатов (рис.2б). Объемная концентрация агрегатов настолько велика, что они образуют остов с большой пористостью, в порах которого происходит перемещение жидкости и вместе с ней отдельных небольших агрегатов. При $t < t^*$ и $t > t^{**}$ картина оседания та же, что и в первом случае.

Величина t^* – время достижения максимальной скорости оседания – может быть легко вычислена по измеренным седиментационным кривым. На основе двухфазной модели крови было показано, что величина t^* существенно зависит от скорости агрегации частиц и малочувствительна к значениям начальной концентрации C_0 частиц в пробе и эмпирических коэффициентов в зависимостях вида (11) [13]. Аналогичный вывод был получен для случая неоднородного поля сил [7,8]. Для двухфазной модели выражение для t^* можно получить в аналитической форме, что в рамках трехфазной модели невозможно без дополнительных упрощений, поэтому проведем расчет значений t^* в зависимости от значений H_0 и k при фиксированных остальных параметрах задачи (10)–(12). В качестве иллюстрации расчетные зависимости $t^*(H_0)$ и $t^*(k)$ при различных физиологических значениях H_0 и k приведены на рис.3а,б соответственно. Таким образом, и в случае агрегации эритроцитов с учетом записи плазмы в агрегате, величину t^* можно

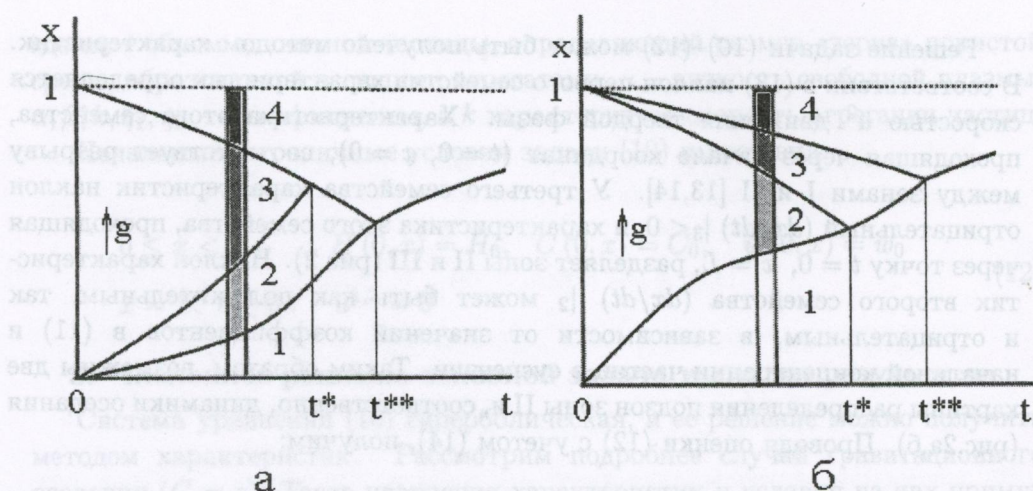


Рис.2: Картина характеристик задачи. а – при первом условии (16); б – при втором условии (16).

рекомендовать в качестве удобного диагностического показателя, который слабо зависит от концентрации эритроцитов и агрегатов в исходной пробе крови, а определяется, в основном, агрегационной способностью клеток, величина которой существенно меняется при заболеваниях.

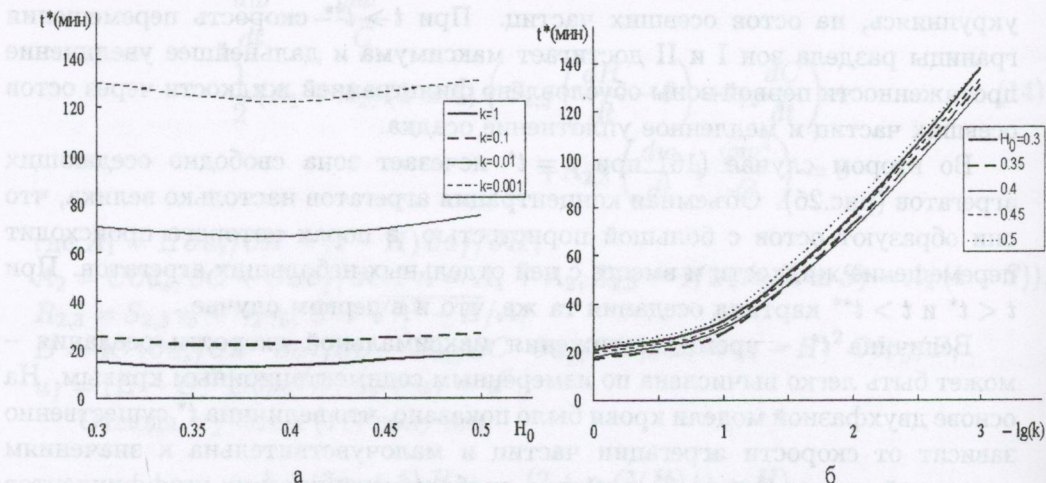


Рис.3: Зависимость времени достижения максимальной скорости оседания от скорости агрегации частиц k при разных значениях начальной концентрации агрегатов.

4. Экспериментальное исследование СОЭ.

Измерения проводились на базе лаборатории аллергологии Института дерматологии (г.Харьков). Использовались пробы венозной крови пациентов, которые обращались в лабораторию для проведения теста на аллергию к назначенным им лекарственным препаратам. Для предотвращения

свертывания кровь стабилизировалась цитратом натрия в стандартном соотношении (4:1), а в отдельные порции крови добавлялись аллергены. Чаще всего при наличии у пациента аллергии на препарат в пробе наблюдается значительное ускорение оседания (повышенная СОЭ), иногда замедление, но, в любом случае, реакция на добавление аллергена была выражена. Порции нативной крови и крови с добавленными аллергенами набирались в трубки Панченкова и размещались вертикально. Седиментационные кривые строились путем измерений величины h в каждой из трубок каждые 10 мин (ФРОЭ). Кроме этого, для выяснения возможности проведения СОЭ с использованием малых доз крови, тест параллельно проводился в микрокапиллярах ($L = 5$ см, $d = 0.5$ мм). Всего было исследовано более 87 проб крови 9 пациентов, для которых обнаружены сходные закономерности. Типичные зависимости $h(t)$ и $h'(t)$, полученные для проб крови пациента в стандартных и микрокапиллярах, приведены на (рис.4а,б) и (рис.5а,б) соответственно.

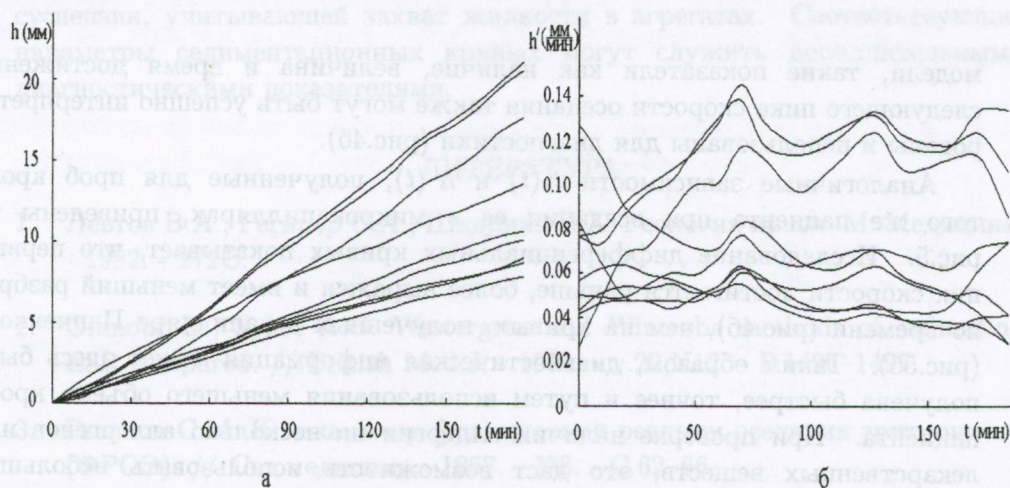


Рис.4: Результаты измерения кривых $h(t)$ (а) и дифференциальных кривых $h'(t)$ (б) при проведении теста СОЭ для крови одного и того же пациента в нескольких трубках Панченкова одновременно.

Во-первых, была обнаружена различная динамика седиментационных кривых проб крови одного испытуемого. На рис.4а приведены динамические кривые $h(t)$, полученные в результате проведения теста СОЭ для крови одного и того же пациента в нескольких трубках. Кривые отличаются между собой по часовому показателю, что можно объяснить неустойчивостью процесса седиментационного оседания суспензии агрегирующих частиц.

При всех различиях седиментационных кривых на дифференциальных кривых времена достижения первого максимума скорости оседания расположены в достаточно узком диапазоне значений (на рис. 4 для 9 проб это $t^* \in [69.5, 72.5]$ мин). Таким образом, значения t^* более информативны, чем стандартные показатели динамических кривых. На основе предложенной

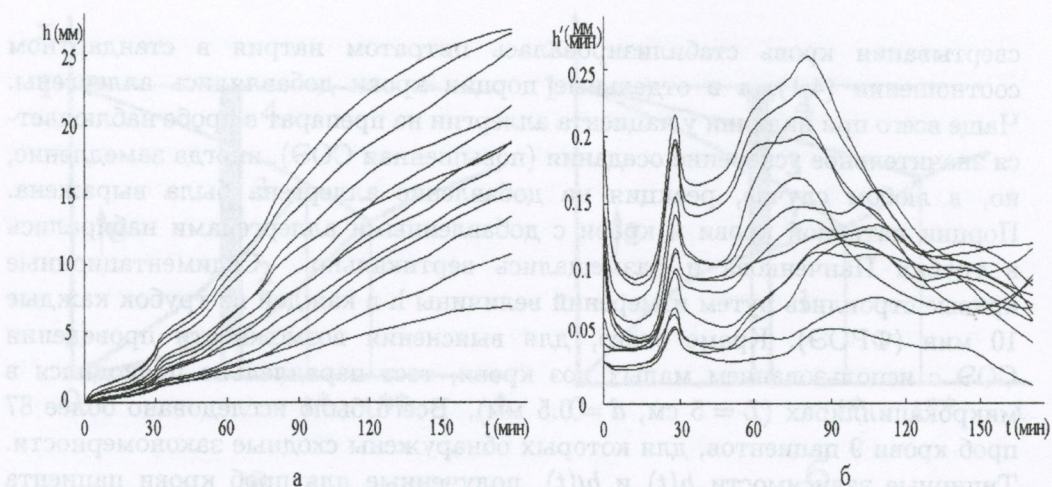


Рис.5: Результаты измерения кривых $h(t)$ (а) и дифференциальных кривых $h'(t)$ (б) при проведении теста СОЭ в микрокапиллярах.

модели, такие показатели как наличие, величина и время достижения следующего пика скорости оседания также могут быть успешно интерпретированы и использованы для диагностики (рис.4б).

Аналогичные зависимости $h(t)$ и $h'(t)$, полученные для проб крови того же пациента при оседании ее в микрокапиллярах, приведены на рис.5. Исследование дифференциальных кривых показывает, что первый пик скорости достигается раньше, более выражен и имеет меньший разброс по времени (рис.4б), чем на кривых, полученных в капилляре Панченкова (рис.5б). Таким образом, диагностическая информация может здесь быть получена быстрее, точнее и путем использования меньшего объема крови пациента. При проверке наличия аллергии на несколько аллергенов или лекарственных веществ, это даст возможность использовать небольшой объем артериальной крови из пальца, что значительно упрощает процедуру проведения теста и уменьшает степень ее болезненности для пациента.

5. Заключение.

На основании численных расчетов по одномерной модели оседания трехфазной суспензии агрегирующих частиц и результатов экспериментов по оседанию нативной стабилизированной крови и проб крови с добавлением аллергенов в стандартных капиллярах Панченкова и в микрокапиллярах можно сделать следующие выводы:

1. Процесс оседания эритроцитов является неустойчивым, так что при проведении теста в нескольких трубках с пробой крови одного человека получаются различные динамические кривые и разные значения часового показателя.

2. Биомеханическая интерпретация параметров кривых оседания может быть успешно проведена на основе математической модели крови как

суспензии агрегирующих частиц.

3. Однозначную оценку агрегационной способности эритроцитов можно получить путем регистрации времени достижения максимальной скорости оседания. Это параметр можно рекомендовать для клинической диагностики.

4. Закономерности оседания крови в стандартных и микрокапиллярах различаются временными показателями, однако в обоих случаях время достижения максимальной скорости оседания однозначно характеризует агрегационную способность эритроцитов. При этом в микрокапиллярах первый пик скорости достигается раньше, выражен значительно и имеет меньший разброс по времени, чем в стандартных капиллярах Панченкова. Следовательно, тест СОЭ можно проводить быстрее, точнее и с использованием малых объемов крови пациента, регистрируя кривые оседания в микрокапиллярах.

Детализацию расположения и протяженности отдельных зон в столбике крови, появление размытой границы раздела кровь-плазма и ускорение оседания после остановки можно описать только в рамках трехфазной модели суспензии, учитывающей захват жидкости в агрегатах. Соответствующие параметры седиментационных кривых могут служить дополнительными диагностическими показателями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Реология крови. М.: Медицина. - 1982. - 272С.
2. Gilmour D., Sykes A.G. Westergren and Wintrobe methods of estimating ESR compared. // British Med.J. - 1951. - v.22,N12. - P.1496-1497.
3. Гавалов С.М. К механизму фракционной реакции оседания эритроцитов (ФРОЭ). // Сов.медицина. -1957. - №8. - С.62-66.
4. Singh M., Meyyappan A., Ramachandran N., Sivaram B.M. Erythrocyte distribution profiles during sedimentation as determined by helium-neon laser light. // Med.Biol.Eng.Comput. - 1980. - v.18,№7. - P.391-395.
5. Muralidharan E., Tateishi N., Maeda N. A new laser photometric technique for the measurement of erythrocyte aggregation and sedimentation kinetics. // Biorheology. - 1994. - v.31,№3. - P.277-285.
6. Воейков В.Л. Дмитриев А.Ю. О биофизических механизмах реакции оседания эритроцитов. // Биофизика - 1998. - Т.43,вып.4. - С.575-579.
7. Дацок О.М., Жолонский Е.Н., Кизилова Н.Н. Анализ оседания эритроцитов в неоднородном поле сил. // Электроника и связь. - 2002. - №15. - С.145-149.

8. Дацок О.М., Жолонский Е.Н., Кизилова Н.Н. Двухфазная модель оседания эритроцитов в неоднородном поле сил // Вестник ХГПУ. - 2002. - №135. - С.61-66.
9. Pawlotsky Y., Bourel M. Vitesse de sedimentation et Sigma VS en medicine interne. // Ann. Med. Interne (Paris). - 1976. - v.127. - P.698-702.
10. Pawlotsky Y., Goasguen J. An erythrocyte sedimentation rate adjusted for the hematocrit and hemoglobin concentration. // Amer. J. Clin. Pathol. - 2004. - v.122. - P.802-810.
11. Шади Исса, Свирид С.Г. Сигма-СОЭ у больных микотической экземой. // Український журнал дерматології, венерології, косметології. - 2003. - №4. - С.23-24.
12. Лосев Е.С. К гидродинамической теории оседания эритроцитов // Мех. композит. матер. 1980. - №1. - С.136-141.
13. Лосев Е.С. Некоторые задачи гидромеханики суспензий с переменной плотностью: приложение к крови. Дисс. ... канд.физ.-мат.наук. М., - 1984. - 135с.
14. Кизилова Н.Н. Влияние некоторых физических полей на механические процессы в биологических тканях. - Дисс. ... канд.физ.-мат.наук. - Харьков:ХГУ. - 1993. - 161с.
15. Jurado R.L. Why shouldn't we determine the erythrocyte sedimentation rate? // Clinical Infectious Diseases. - 2001. - vol.33. - P.548-549.
16. Наumenko Е.К. Влияние агрегации эритроцитов на рассеивающие свойства крови. // Журн. прикл. спектроск. - 2003. - т.70, №3. - С. 375-380.
17. Лосев Е.С. Моделирование оседания агрегирующих частиц. // Изв. АН СССР. Сер.МЖГ. - 1983. - №3. - С.71-78.
18. Попель А.С., Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Об уравнениях кинетики агрегационных процессов в суспензиях. //ПММ.-1975.-т.39(5) - С.130-143.
19. Регирер С.А., Шадрина Н.Х. О моделях тиксотропных жидкостей. ПММ. - 1978. - т.42, №5. - С.856-865.
20. Лосев Е.С., Нетребко Н.В., Орлова И.В. Гравитационное оседание агрегирующих частиц в сдвиговом потоке. // Известия АН СССР. Сер. МЖГ. - 1989. - №2. - С.95-98.
21. Лосев Е.С., Пичугина И.А., Регирер С.А. Течение суспензии в плоском канале с пористыми стенками. // Известия АН СССР. Сер. МЖГ. - 1987. - №6. - С.37-43.

Статья получена: 20.10.2009; окончательный вариант: 10.11.2009;
принята: 15.11.2009.

© Кизилова Н.Н., Черевко В.А., 2009

Visit our Web-page

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Editorial Board
- Abstracts
- Full-texts available (PDF)

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
№ 875 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Збірник наукових праць

Російською, українською, англійською мовами

Підписано до друку 1.12.09 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. – 5,6

Обл.- вид. арк. – 6,5

Тираж 100 пр.

Ціна договірна

61077, м.Харків, пл. Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна

Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна

61077, м.Харків, пл. Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідцтво про державну реєстрацію ДК № 3367 від 13.01.09

9-00

8. Давок О.М., Жовановский Е.Н., Кизилова Н.Н. Влияние эритроцитной массы на гематокрит и гемоглобин // Учен. зап. киевского ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 2002. - №135. - С. 23-24.
 <http://www-mechmath.univer.kharlvov.ua/vesnik>
9. Pawlatsky Y., Bourel M., Vitteas de Saint-Martin V. et al. Vitesse de sédimentation et viscosité intrinsèque // Ann. Med. Interne (Paris). - 1978. - №128. - P. 698-702.
10. Pawlatsky Y., Bourel M., Vitteas de Saint-Martin V. et al. Vitesse de sédimentation et viscosité intrinsèque // Ann. Med. Interne (Paris). - 1978. - №128. - P. 698-702.
11. Шади Носа, Саврица С.Г. Сигма-СОЭ у больных хроническим воспалением // Украинский журнал дерматологии, венерологии, фтизиатрии. - 2004. - №122. - P. 802-810.
12. Лосев Е.С. К гидродинамической теории оседания эритроцитов в композит. матер. 1980. - №1. - С. 141-161.
13. Лосев Е.С. Некоторые задачи гидромеханики суспензий с переменной плотностью: приложение к крови. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М. - 1984. - 135с.
14. Кизилова Н.Н. Влияние некоторых физических полей на биологические процессы в биологических тканях. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков: ХГУ. - 1993. - 161с.
15. Кизилова Н.Н. Влияние некоторых физических полей на биологические процессы в биологических тканях. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков: ХГУ. - 1993. - 161с.
16. Науменко Б.К. Влияние агрегации эритроцитов на свойства крови. // Журн. прикл. спектроск. - 2003. - №70.2. - С. 378-380.
17. Лосев Е.С. Моделирование оседания эритроцитов. М.: Наука. - 1983. - 78с.
18. Потель А.С., Ратнер С.А. Влияние электрического поля на агрегацию эритроцитов // ПММ. - 1975. - №1. - С. 100-102.
19. Ратнер С.А., Шади Н.Х. О моделировании оседания эритроцитов // ПММ. - 1977. - №42. - С. 856-865.
20. Лосев Е.С., Негребко Н.В., Орлова И.В. Терапевтическое действие агрегирующих частиц в сдвиге потока. // Известия АН СССР. Сер. МКИ. - 1989. - №2. - С. 95-98.
21. Лосев Е.С., Негребко Н.В., Орлова И.В. Терапевтическое действие агрегирующих частиц в сдвиге потока. // Известия АН СССР. Сер. МКИ. - 1989. - №2. - С. 95-98.

