I

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ,

1879 года.

ХАРЬКОВЪ.

Въ Университетской Типографіи.

1880.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *А. Питра.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщенія*.

---

* Изъ читанныхъ въ засѣданіяхъ математическаго общества сообщеній изданы лишь тѣ, которыхъ рукописи представлены авторами ихъ, для напечатанія, въ распорядительный комитетъ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ:*
12	1 *сверху*	$\frac{uR}{u^3}$	$\frac{\mu R}{u^3}$
30	4 —	$\frac{\int_a^x \{f_2(x)-f_1(x)\}}{\int_a^b \{f_2(x)-f_1(x)\}}$	$\frac{\int_a^x \{f_2(x)-f_1(x)\}dx}{\int_a^b \{f_2(x)-f_1(x)\}dx}$.
39	5 *снизу*	z	k
40	11 *сверху*	ω , ω	ω_1 , ω_2
41	6 *снизу*	os	cs
43	8 *сверху*	$\mathrm{sn}\,\theta.\,\mathrm{sn}\,\theta$	$\mathrm{sn}\,\theta.\,\mathrm{cs}\,\theta$
48	8 *снизу*	$\frac{a_1}{bc}$	$\frac{x_1}{bc}$

ПРОТОКОЛЪ

предварительнаго засѣданія

математическаго общества при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ 8-го сентября 1879 года.

Получивъ отъ г. декана физико-математическаго факультета увѣдомленіе, что уставъ математическаго общества утвержденъ г. министромъ народнаго просвѣщенія 28 апрѣля 1879 года, лица, имѣющія право на основаніи 2-го параграфа этого устава считаться членами общества безъ избранія, собрались 8-го сентября сего года въ «кабинетъ для чтенія» университета для составленія изъ среды себя распорядительнаго комитета.

Избраніе членовъ комитета происходило закрытою подачею голосовъ и результаты его слѣдующіе:

Предсѣдателемъ общества избранъ бывшій профессоръ и нынѣ почетный членъ харьковскаго университета Евгеній Ильичъ Бейеръ.

Первымъ товарищемъ предсѣдателя — профессоръ Василій Григорьевичъ Имшенецкій.

Вторымъ товарищемъ предсѣдателя — профессоръ Даніилъ Михайловичъ Деларю.

Секретаремъ — доцентъ Константинъ Алексѣевичъ Андреевъ.

Вслѣдъ за симъ приступлено было къ обсужденію вопросовъ, касающихся веденія занятій общества, при чемъ сдѣланы слѣдующія постановленія:

1. Имѣть для ученыхъ сообщеній и другихъ занятій по одному очередному засѣданію каждый мѣсяцъ, исключая вакаціоннаго времени.

2. Предоставить предсѣдателю назначать сверхъ этихъ очередныхъ засѣданій еще экстренныя, если въ томъ окажется надобность.

3. Считать всякое засѣданіе возможнымъ для открытія только въ томъ случаѣ, если явившихся въ засѣданіе членовъ общества не менѣе трехъ, изъ которыхъ два — члены распорядительнаго комитета, не считая въ томъ числѣ сообщающаго.

4. Назначить первое очередное засѣданіе 22 сентября, въ 7 часовъ вечера, въ физической аудиторіи университета.

5. Увѣдомить чрезъ предсѣдателя г. попечителя харьковскаго учебнаго округа о томъ, что общество открыло свои дѣйствія, и просить его сообщить объ этомъ по округу, дабы желающіе изъ господъ преподавателей математическихъ наукъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ могли принять участіе въ педагогическихъ и другихъ занятіяхъ общества.

6. Увѣдомить о томъ-же г. ректора университета и просить его сдѣлать распоряженіе, чтобы во время засѣданій общества были допускаемы въ зданіе университета посторонніе посѣтители общества.

7. Публиковать о времени и мѣстѣ перваго очереднаго засѣданія въ харьковскихъ губернскихъ вѣдомостяхъ.

Е. И. Бейеръ заявилъ, что въ первое очередное засѣданіе онъ имѣетъ въ виду сдѣлать ученое сообщеніе о теоремѣ Фермата.

Протоколъ засѣданія 22 сентября

Присутствовали: Е. И. Бейеръ, В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, Ю. И. Морозовъ, А. П. Шимковъ, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій.

Предсѣдательствовалъ Е. И. Бейеръ.

По открытіи засѣданія предложены были въ члены общества:

1. Александръ Юрьевичъ Зиберъ, преподаватель харьковскаго реальнаго училища. Предлагали Ю. И. Морозовъ и Д. М. Деларю.

2. Василій Васильевичъ Шиховъ, директоръ того-же училища. Предлагалъ Д. М. Деларю.

3. Сергѣй Александровичъ Раевскій, преподаватель и инспекторъ того-же училища. Предлагалъ Д. М. Деларю.

4. Иванъ Дмитріевичъ Штукаревъ, преподаватель 2-й харьковской гимназіи. Предлагалъ А. П. Шимковъ.

5. Александръ Евгеніевичъ Рейнботъ, стипендіатъ харьковскаго университета. Предлагалъ А. П. Шимковъ.

6. Алексѣй Петровичъ Грузинцевъ, преподаватель 1-й харьковской гимназіи. Предлагалъ В. Г. Имшенецкій.

7. Петръ Матвѣевичъ Рудневъ, преподаватель 3-й харьковской гимназіи. Предлагалъ К. А. Андреевъ.

8. Болеславъ Игнатьевичъ Снарскій, преподаватель 3-й харьковской гимназіи. Предлагалъ Е. И. Бейеръ.

Вслѣдъ за предложеніями всѣ означенныя лица подвергнуты были избранію закрытою подачею голосовъ и избраны единогласно.

За симъ слушали сообщеніе «О теоремѣ Фермата», сдѣланное *Е. И. Бейеромъ*.

Изложивъ только часть своего изслѣдованія о названной теоремѣ, Е. И. Бейеръ заявилъ, что окончаніе его онъ сообщитъ въ слѣдующее засѣданіе.

Постановили: назначить экстренное засѣданіе 6-го октября, въ 7 часовъ вечера, въ физической аудиторіи университета.

Протоколъ засѣданія 6-го октября.

Присутствовали: Е. И. Бейеръ, В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, М. Ѳ. Ковальскій, Ю. И. Морозовъ, А. П. Шимковъ, С. А. Раевскій, А. П. Грузинцевъ и К. А. Андреевъ.

Предсѣдательствовалъ Е. И. Бейеръ.

По открытіи засѣданія предложены были въ члены общества и избраны:

1. Василій Яковлевичъ Стояновъ, преподаватель 2-й харьковской гимназіи. Предлагалъ Е. И. Бейеръ.

2. Ипполитъ Константиновичъ Шейдтъ, преподаватель 1-й харьковской гимназіи. Предлагалъ Е. И. Бейеръ.

3. Михаилъ Григорьевичъ Котляровъ, директоръ народныхъ училищъ курской губерніи. Предлагалъ М. Ѳ. Ковальскій.

4. Николай Михайловичъ Флавицкій, лаборантъ технологической лабораторіи харьковскаго университета. Предлагалъ М. Ѳ. Ковальскій.

5. Михаилъ Семеновичъ Косенко, преподаватель харьковской прогимназіи. Предлагалъ Е. И. Бейеръ.

Е. И. Бейеръ продолжалъ и окончилъ изложеніе своего изслѣдованія «О теоремѣ Фермата», начатое имъ въ предыдущее засѣданіе.

По окончаніи своего сообщенія Е. И. Бейеръ передалъ свою рукопись на разсмотрѣніе распорядительнаго комитета.

В. Г. Имшенецкій сообщилъ свое изслѣдованіе подъ заглавіемъ «Опредѣленіе силы, движущей по коническому сѣченію матеріальную точку, въ функціи координатъ этой точки».

Передавъ рукопись въ распорядительный комитетъ, В. Г. Имшенецкій заявилъ желаніе, чтобы его работа была напечатана въ Запискахъ университета.

Постановили: слѣдующее очередное засѣданіе назначить 20-го октября, въ 7 час. вечера, въ физической аудиторіи университета.

Опредѣленіе силы, движущей по коническому сѣченію матеріальную точку, въ функціи ея координатъ.

В. Г. Имшенецкаго.

Года два тому назадъ г. *Бертранъ* помѣстилъ въ отчетахъ о засѣданіяхъ парижской академіи замѣтку [1], интересъ которой обнаруживается изъ слѣдующаго вступленія къ ней:

«Еслибъ Кеплеръ вывелъ изъ наблюденій только одинъ изъ своихъ законовъ: *планеты описываютъ эллипсы, въ фокусъ которыхъ находится солнце*, то можно бы изъ этого результата, возведеннаго въ общій принципъ, заключить, что управляющая ими сила направлена къ солнцу и обратно пропорціональна квадрату разстоянія». Показавъ остроумное аналитическое рѣшеніе этой задачи, г. *Бертранъ* вмѣстѣ съ тѣмъ предложилъ на рѣшеніе математикамъ слѣдующее ея обобщеніе. Я опять приведу собственныя его слова.

«Было бы интересно рѣшить слѣдующій вопросъ:

«*Зная, что планеты описываютъ коническія сѣченія и не предполагая ничего болѣе, найдти выраженія слагающихъ дѣйствующихъ на нихъ силъ въ функціяхъ координатъ точекъ ихъ приложенія*». «Мы знаемъ два рѣшенія: сила мо-

---

[1] Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de *Kepler* le principe de l'attraction. *Note* de M. J. *Bertrand*. Comptes rendus, 9 Avril, 1877.

жетъ быть направлена къ постоянному центру и дѣйствовать пропорціонально разстоянію или въ обратномъ отношеніи его квадрата. Существуютъ ли другія рѣшенія?». «Предыдущій способъ (т. е. способъ, употребленный г. Бертраномъ для рѣшенія упомянутаго выше частнаго случая задачи) могъ бы привести къ рѣшенію этой задачи, но вычисленія такъ сложны, что никакой геометръ, я думаю, не попытается ихъ выполнить, не найдя сначала средства ихъ упростить». Я постараюсь показать, что предугаданная г. Бертраномъ возможность упростить вычисленія заключается въ выборѣ приличной вопросу формы общаго уравненія коническихъ сѣченій.

Благодаря этой формѣ, мы рѣшимъ общую задачу, слѣдуя вполнѣ за пріемами, указанными г. Бертраномъ при рѣшеніи частнаго ея случая; встрѣчающіяся при этомъ небольшія усложненія вычисленій легко устраняются при помощи нѣкоторыхъ свойствъ опредѣлителей.

Пусть свободная матеріальная точка описываетъ коническое сѣченіе, опредѣляемое въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ x и y уравненіемъ общаго вида:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0;$$

его можно привести къ неменѣе общему виду

$$px^2+qy^2+2rxy=(ax+by+c)^2, \qquad (1)$$

полагая

$$c=\sqrt{F},\ b=\frac{E}{\sqrt{F}},\ a=\frac{D}{\sqrt{F}},$$

$$p=\frac{D^2}{F}-A,\ q=\frac{E^2}{F}-C,\ r=\frac{DE}{F}-B.$$

Движеніе свободной матеріальной точки въ плоскости опредѣляется дифференціальными уравненіями:

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dx'}{dt}=X, \quad \frac{dy'}{dt}=Y, \tag{2}$$

гдѣ t означаетъ время, а X и Y слагающія ускорительной силы, параллельныя осямъ x и y.

Намъ слѣдуетъ опредѣлить выраженія X и Y посредствомъ x и y, такъ чтобы уравненіе (1) было однимъ изъ интеграловъ системы уравненій (2), не заключающимъ x', y' и t. Пусть a, b, c означаютъ три произвольныя постоянныя, входящія въ этотъ интегралъ; тогда остальные коеффиціенты уравненія (1) p, q, r нужно разсматривать какъ опредѣленныя постоянныя, которыя могутъ войдти въ искомыя выраженія X и Y.

Произведемъ теперь вычисленія, необходимыя для исключенія произвольныхъ постоянныхъ a, b, c изъ ур. (1), или — вычисленія, которыя могли бы служить для повѣрки, что уравненіе (1) есть интегралъ дифференціальныхъ уравненій (2), еслибъ X и Y были извѣстны. На этомъ пути мы должны встрѣтить необходимое условіе, которому должны удовлетворять X и Y, откуда и могутъ быть найдены ихъ значенія. Для этого представимъ уравненіе (1) подъ видомъ:

$$u=ax+by+c, \tag{3}$$

положивъ

$$u^2=px^2+qy^2+2rxy. \tag{4}$$

Дифференцируя въ отношеніи t изъ (3) при помощи (2) и (4) получимъ:

$$ax'+by'=\frac{(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'}{u} \tag{5}$$

Продолжая дифференцировать въ отношеніи t и пользоваться уравненіями (2) и (4), будемъ имѣть

$$aX+bY=\frac{(px+ry)\,X+(rx+qy)\,Y}{u}$$

$$+\frac{\{(px'+ry')\,x'+(rx'+qy')\,y'\}\,\{(px+ry)\,x+(rx+qy)\,y\}}{u^3}$$

$$-\frac{\{(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'\}^2}{u^3}.$$

Во второй части этого уравненія множитель при $\frac{1}{u^3}$ можно, при помощи опредѣлителей, представить слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix}(px+ry)\,x+(rx+qy)\,y, & (px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'\\ (px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y', & (px'+ry')\,x'+(rx'+qy')\,y'\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}px+ry, & rx+qy\\ px'+ry', & rx'+qy'\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}x, & y\\ x', & y'\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}p, & r\\ r, & q\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}x, & y\\ x', & y'\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}x, & y\\ x', & y'\end{vmatrix}$$

$$=(pq-r^2)\,(xy'-yx')^2.$$

Слѣдовательно предыдущее уравненіе приметь видъ

$$aX+bY=\frac{(px+ry)\,X+(rx+qy)\,Y}{u} \qquad (6)$$

$$+\frac{(pq-r^2)\,(xy'-yx')^2}{u^3}.$$

Далѣе изъ (5) и (6) находимъ:

$$a=\frac{(px+ry)}{u}+\frac{(pq-r^2)\,y'\,(xy'-yx')^2}{u^3\,(Xy'-Yx')}$$

$$b=\frac{(rx+qy)}{u}-\frac{(pq-r^2)\,x'\,(xy'-yx')^2}{u^3\,(Xy'-Yx')}$$

Теперь, для окончательнаго исключенія произвольныхъ постоянныхъ, остается только любое изъ двухъ послѣднихъ уравненій, напримѣръ первое, продифференцировать въ отношеніи t, что, на основаніи (2) и (4), сначала доставитъ

$$0=\frac{(px'+qy')\left[(px+ry)\,x+(rx+qy)\,y\right]}{u^3}$$

$$-\frac{(px+qy)\left[(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'\right]}{u^3}$$

$$+\frac{(pq-r^2)\,(xy'-yx')^2}{u^3\,(Xy'-Yx')}\left\{Y-3y'\,\frac{(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'}{u^2}\right.$$

$$\left.-\,y'\,\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\,x'+\frac{\partial X}{\partial y}\,y'\right)y'-\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\,x'+\frac{\partial Y}{\partial y}\,y'\right)x'}{Xy'-Yx'}\right\}$$

$$+\frac{2\,(pq-r^2)\,y'\,(xy'-yx')\,(xY-yX)}{u^3\,(Xy'-Yx')}.$$

Послѣ очевидныхъ приведеній, два первыхъ члена можно написать такимъ образомъ:

$$-\frac{y'}{u^3}\begin{vmatrix}px+ry, & rx+qy\\ px'+ry', & rx'+qy'\end{vmatrix}=-\frac{y}{u^3}\begin{vmatrix}p, & r\\ r, & q\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}x, & y\\ x', & y'\end{vmatrix};$$

слѣдовательно во всѣхъ членахъ уравненія войдетъ общій множитель

$$\frac{pq-r^2}{u^3}\,(xy'-yx')$$

отбросивъ который, получимъ:

$$0=-y'$$

$$+\frac{xy'-yx'}{Xy'-Yx'}\left\{Y-3y'\,\frac{(px+ry)\,x'+(rx+py)\,y'}{u^2}\right.$$

$$\left.-\,y'\,\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\,x'+\frac{\partial X}{\partial y}\,y'\right)y'-\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\,x'+\frac{\partial Y}{\partial y}\,y'\right)x'}{Xy'-Yx'}\right\}$$

$$+\frac{2y'\,(xY-yX)}{Xy'-Yx'}. \qquad (7)$$

и

Еслибъ искомыя выраженія X и Y какъ функціи x и y были извѣстны; то (7), какъ результатъ повѣрки, что (1) есть интегралъ (2), должно бы повѣряться при всякихъ значеніяхъ x, y, x', y'. Но оставляя X и Y неопредѣленными и дѣлая $x = x'$ и $y = y'$ въ уравненіи (7), находимъ, что по-видимому средній членъ его уничтожится, а остальные два члена даютъ

$$-y-2y=0, \text{ или } -3y=0$$

равенство, очевидно, нелѣпое. Для устраненія такого противурѣчія въ выводахъ необходимо X и Y должны имѣть такія выраженія въ x и y, при которыхъ множитель $xy'-yx'$ средняго члена уравненія (7) сократится съ его дѣлителемъ $Xy'-Yx'$. Слѣдовательно слагающія ускорительной силы должны имѣть выраженія вида:

$$X = V \, . \, x \text{ и } Y = V \, . \, y, \qquad (8)$$

гдѣ V пока неизвѣстная функція отъ x и y. Это заключеніе показываетъ уже, что

$$xY - yX = 0,$$

т. е. что моментъ ускорительной силы въ отношеніи начала координатныхъ осей, къ которымъ отнесено коническое сѣченіе (1), постоянно уничтожается и, слѣдовательно, что эта точка есть центръ ускорительной силы.

Подставивъ въ уравненіе (7) выраженія X и Y (8) по упрощеніи получимъ:

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y'\right) + \frac{3\left[(px+ry)\,x' + (rx+qy)\,y'\right]}{u^2} = 0$$

уравненіе имѣющее мѣсто при всякихъ значеніяхъ x' и y'; поэтому оно распадается на два уравненія:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{3\,(px+ry)}{u^2} = 0$$

и

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dy}+\frac{3(rx+qy)}{u^2}=0.$$

Умноживъ эти послѣднія соотвѣтственно на dx, dy и складывая, находимъ:

$$\frac{dV}{V}+\frac{3[(px+ry)\,dx+(rx+qy)\,dy]}{u^2}=0.$$

Но дифференцируя (4) имѣемъ

$$udu=(px+ry)\,dx+(rx+qy)\,dy;$$

слѣдовательно

$$\frac{dV}{V}+\frac{3du}{u}=0.$$

Интегрируя это уравненіе и означая черезъ μ произвольное постоянное, находимъ

$$V=\frac{\mu}{u^3}=\frac{\mu}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}}. \qquad (9)$$

Слѣдовательно

$$X=\frac{\mu x}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}}=\frac{\mu x}{u^3}$$

и

$$Y=\frac{\mu y}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}}=\frac{\mu y}{u^3}.$$

Отсюда имѣемъ равнодѣйствующую силъ X и Y

$$F=\frac{\mu\sqrt{x^2+y^2}}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}} \qquad (10)$$

Наконецъ, введя вмѣсто x и y радіусъ R, проведенный изъ начала, и уголъ θ, составляемый имъ съ осью x, находимъ

$$F = \frac{1}{\{{}^1/_2(p-q)\operatorname{Cos} 2\theta + r \operatorname{Sin} 2\theta + {}^1/_2(p+q)\}^{3/2}} \frac{\mu}{R^2} = \frac{uR}{u^3} \quad (11)$$

И такъ, изъ единственнаго факта, что свободное тѣло (матеріальная точка) описываетъ коническое сѣченіе, и предположенія, что дѣйствующая на него ускорительная сила измѣняется только съ положеніемъ тѣла, необходимо слѣдуетъ:

1) что направленіе силы всегда проходитъ черезъ постоянный центръ, которымъ можетъ быть однако всякая точка плоскости коническаго сѣченія;

2) что напряженіе силы F должно измѣняться вообще, какъ показываетъ формула (11), не только съ разстояніемъ R центра силы отъ движущагося тѣла, но также и съ направленіемъ его радіуса вектора.

Остается еще показать, какъ изъ этого общаго рѣшенія получится два извѣстные его частные случая, когда центръ силы предполагается въ центрѣ коническаго сѣченія или въ его фокусѣ, вслѣдствіе чего величина ускорительной силы становится независимою отъ ея направленія и будетъ въ 1-мъ случаѣ пропорціональною радіусу-вектору, а во 2-мъ обратно пропорціональною его квадрату.

Если центръ силы предположимъ въ центрѣ коническаго сѣченія; то, вмѣстѣ съ тѣмъ предполагая и начало координатъ въ этой точкѣ, будемъ имѣть

$$D=0 \text{ и } E=0$$

въ первой общей формѣ уравненій коническихъ сѣченій, а потому во второй формѣ

$$a=0,\ b=0$$

и

$$px^2 + qy^2 + 2rxy = c^2;$$

слѣдовательно, на основаніи формулы (10),

$$F=\frac{\mu}{c^3}\cdot R,$$

т. е. величина силы не зависитъ отъ ея направленія и прямо пропорціональна радіусу-вектору.

Если центръ силы предположимъ въ фокусѣ и примемъ его за начало координатъ, тогда проведенный изъ него радіусъ-векторъ R къ какой-нибудь точкѣ коническаго сѣченія выразится функціей первой степени ея координатъ, т. е. уравненіе (1) получитъ видъ

$$R=ax+by+c$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ

$$u=R.$$

Слѣдовательно формула (11) получитъ видъ

$$F=\frac{\mu}{R^2},$$

т. е. снова величина ускорительной силы становится независимою отъ ея направленія и измѣняется обратно пропорціонально квадрату радіуса-вектора.

Мнѣ необходимо прибавить нѣсколько словъ въ заключеніе моей предыдущей замѣтки. Я занялся рѣшеніемъ задачи г. Бертрана, какъ-только узналъ о ея существованіи. Мнѣ не трудно было предвидѣть возможность легкаго ея рѣшенія, потому что еще раньше я замѣтилъ, что интегралы дифференціальныхъ уравненій общаго вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\Phi(px^2+qy^2)x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\Phi(px^2+qy^2)y$$

весьма просто получаются въ квадратурахъ, и что въ частномъ случаѣ

$$\Phi(px^2+qy^2)=\frac{\mu}{(px^2+qy^2)^{3/2}}$$

для траекторіи находимъ коническое сѣченіе.

Поэтому, приступивъ къ рѣшенію обратной задачи, предложенной г. Бертраномъ, я обратилъ вниманіе на то, что успѣхъ его пріемовъ зависѣлъ отъ особенной формы

$$x^2+y^2=(ax+by+c)^2,$$

которую могутъ принимать уравненія коническихъ сѣченій въ прямоугольныхъ координатахъ, когда ихъ начало въ фокусѣ.

Поэтому я выбралъ для коническихъ сѣченій форму уравненія

$$px^2 \pm qy^2=(ax+by+c)^2.$$

Оказалось, что къ этой формѣ пріемы г. Бертрана вполнѣ приложимы, что ускорительная сила F и въ этомъ случаѣ должна проходить черезъ начало координатъ и выражаться формулой

$$F=\frac{\mu R}{(px^2+qy^2)^{3/2}}.$$

Моему намѣренію напечатать своевременно предыдущее рѣшеніе мое въ одномъ изъ французскихъ математическихъ журналовъ помѣшало появленіе одной статьи г. *Дарбу*[1], гдѣ онъ самъ формулируетъ рѣшаемую имъ задачу въ слѣдующихъ словахъ:

[1] Comptes rendus. T. LXXXIV, № 16 (16 Avril. 1877). «Recherche de la loi que doit suivre une force *centrale* pour que la trajectoire qu'elle détermine soit toujours une conique». Par *M. G. Darboux*.

«Зная, что матеріальная точка, подверженная дѣйствію *центральной* силы, всегда описываетъ коническое сѣченіе, найдти выраженіе силы».

Отсюда видно, что первоначальная задача г. Бертрана измѣнена г. Дарбу прибавленіемъ новаго условія, въ ней непредположеннаго, что сила — центральная, т. е. что существуетъ законъ площадей.

Дѣйствительно, онъ основываетъ рѣшеніе на формулѣ для центральной силы *Бине:*

$$F=\frac{C^2}{R^2}\left\{\frac{1}{R}+\frac{d^2\frac{1}{R}}{d\theta^2}\right\},$$

гдѣ C удвоенная площадь, описываемая въ единицу времени радіусомъ-векторомъ R. Опредѣливъ коническое сѣченіе уравненіемъ

$$\frac{1}{R}=a\operatorname{Cos}\theta+b\operatorname{Cos}\theta+\sqrt{A\operatorname{Cos}2\theta+B\operatorname{Sin}2\theta+H},$$

и прилагая къ нему формулу Бине, г. Дарбу нашелъ

$$F=\frac{C^2}{R^2}\,\frac{H^2-A^2B^2}{(A\operatorname{Cos}2\theta+B\operatorname{Sin}2\theta+H)^{3/2}}$$

легко замѣтить, что два послѣднихъ уравненія черезъ введеніе прямоугольныхъ координатъ примутъ видъ уравненія (1) и формулы (10).

Мнѣ кажется впрочемъ, что и мое рѣшеніе не лишено нѣкотораго интереса; такъ-какъ я нимало не измѣнилъ условій, выраженныхъ самимъ авторомъ задачи, и разрѣшилъ ея общій случай тѣми-же пріемами, которые онъ придумалъ для ея частнаго случая.

Засѣданіе 20-го октября 1879 года.

Присутствовали: Е. И. Бейеръ, В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, А. П. Шимковъ, С. А. Раевскій, И. Д. Шгукаревъ, А. Е. Рейнботъ, А. П. Грузинцевъ, П. М. Рудневъ, Б. И. Снарскій, В. Я. Стояновъ, И. К. Шейдтъ, Н. М. Флавицкій, М. С. Косенко.

Предсѣдательствовалъ Е. И. Бейеръ.

Секретарь общества доложилъ, что распорядительный комитетъ VI-го съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ прислалъ приглашеніе, въ которомъ проситъ членовъ харьковскаго математическаго общества, какъ своихъ собратій по наукѣ, почтить съѣздъ своимъ личнымъ присутствіемъ и присылкою ученыхъ трудовъ.

М. Ѳ. Ковальскій сдѣлалъ два сообщенія:

1. «Доказательство одного свойства интеграловъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, разрѣшенныхъ относительно произвольныхъ постоянныхъ».

2. «Изслѣдованіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка по отношенію къ ихъ разрѣшаемости въ конечной формѣ».

К. А. Андреевъ сообщилъ часть своего изслѣдованія — «о построеніи поляръ относительно плоскихъ геометрическихъ кривыхъ линій».

Постановили слѣдующее засѣданіе назначить 17-го ноября въ 7 часовъ вечера въ физической аудиторіи университета.

Протоколъ засѣданія 17 ноября 1879 года.

Присутствовали: Е. И. Бейеръ, В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, С. А. Раевскій, И. Д. Штукаревъ, А. П. Грузинцевъ, И. К. Шейдтъ, Н. М. Флавицкій, М. С. Косенко.

Предсѣдательствовалъ Е. И. Бейеръ.

Секретарь общества доложилъ, что 25 октября получено на имя общества письмо изъ г. Архангельска отъ г-на подпоручика архангельскаго батальона *О. П. Фролова*, въ которомъ этотъ послѣдній сообщаетъ свой пріемъ для построенія корней квадратнаго уравненія. Сообщеніе это разсматривалось распорядительнымъ комитетомъ, который постановилъ — доложить обществу содержаніе письма г-на Фролова въ одно изъ слѣдующихъ засѣданій.

К. А. Андреевъ продолжалъ и окончилъ сообщеніе своего изслѣдованія: «О построеніи поляръ относительно плоскихъ геометрическихъ кривыхъ линій».

А. П. Грузинцевъ изложилъ свою работу подъ названіемъ: «Вычисленіе хода лучей въ двояко-преломляющемъ кристаллѣ» и передалъ ее на разсмотрѣніе распорядительнаго комитета.

Протоколъ засѣданія 15 декабря 1879 года.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, А. П. Грузинцевъ, А. Е. Рейнботъ, П. М. Рудневъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

Д. М. Деларю сдѣлалъ сообщеніе объ одномъ предложеніи изъ теоріи сходимости безконечныхъ рядовъ.

М. Ѳ. Ковальскій сдѣлалъ сообщеніе о разложеніи тангенса въ безконечную строку.

К. А. Андреевъ доложилъ замѣтку г-на Фролова, относящуюся къ построенію корней квадратнаго уравненія.

В. Г. Имшенецкій сообщилъ свою замѣтку о задачѣ: «Раздѣлить площадь данной трапеціи на n равновеликихъ частей прямыми, параллельными двумъ ея параллельнымъ сторонамъ».

Д. М. Деларю и *В. Г. Имшенецкій* передали изложенія своихъ сообщеній для напечатанія при протоколахъ общества.

I.

ЗАМѢТКА

объ одномъ предложеніи

изъ теоріи сходимости безконечныхъ рядовъ.

Д. М. Деларю.

Въ своихъ «Exercices de Mathématiques» (T. 2, p. 221) Коши высказалъ, что *для сходимости ряда*

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots.$$

достаточно, чтобы разность

$$S_{n+m}-S_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+m-1}$$

дѣлалась безконечно-малою величиною, когда n получаетъ неизмѣримо-большое значеніе, каково бы ни было при этомъ цѣлое число, означаемое чрезъ m.

Авторитетъ Коши доставилъ этому предложенію мѣсто въ большинствѣ руководствъ по алгебрѣ и исчисленію безконечно-малыхъ, и сомнѣній относительно его справедливости, сколько мнѣ извѣстно, не высказывалось. Только въ 1860 году французскій ученый Каталанъ, въ своемъ «Traité élémentaire des séries» не только усомнился въ точности этого предложенія, но даже категорически назвалъ его *невѣрнымъ*, указавъ, что въ расходящемся рядѣ

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}+\ldots.$$

выраженіе $S_{n+m}-S_n$, при допущеніи $m=n$, принимаетъ видъ

$$\frac{1}{(n+2)\log(n+2)}+\ldots.+\frac{1}{(2n+1)\log(2n+1)}$$

и, оставаясь при всякомъ n менѣе $\frac{1}{\log n}$, съувеличеніемъ n стремится къ нулю, откуда, по теоремѣ Коши, слѣдовало бы заключить, что рядъ сходящійся. Это замѣчаніе Каталана казалось не допускающимъ возраженій. Справедливость его призналъ Н. В. Бугаевъ въ своемъ прекрасномъ изслѣдованіи «О сходимости строкъ по ихъ внѣшнему виду», а Бертранъ въ своемъ извѣстномъ «Traité de calcul différentiel et de calcul intégral», выводя достаточные признаки сходимости рядовъ, прошелъ молчаніемъ помянутую теорему Коши. Однако въ 1868 году осужденная теорема вновь появилась въ роли математической истины на страницахъ извѣстнаго «Cours de calcul différentiel et intégral» Серре (T. I, p. 137) и прекраснаго сочиненія Hoüel'я: Traité élémentaire des quantités complexes (p. 30). Ясно, что Серре и Hoüel находятъ эту теорему не подлежащею сомнѣнію и считаютъ замѣчаніе о ней Каталана неосновательнымъ. Такимъ образомъ вопросъ о справедливости этой теоремы Коши снова становится спорнымъ и требуетъ рѣшенія.

Такъ-какъ Hoüel высказываетъ только самое предложеніе, а не приводитъ его доказательства, то остается разсмотрѣть тѣ доводы, которые приводитъ въ его подтвержденіе Серре.

Самое предложеніе Серре высказываетъ въ такой формѣ:

«*Строка*

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots.\ u_{n-1},\ldots.$$

сходящаяся, когда сумма

$$u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p-1},$$

при неопредѣленно возрастающемъ n, стремится къ нулю, каково бы ни было p».

Для доказательства его Серре разсуждаетъ буквально такъ:

«Дѣйствительно, означимъ чрезъ E положительное количество сколь угодно малое, а чрезъ S_n сумму первыхъ n членовъ строки. Такъ-какъ разность

$$S_{n+p}-S_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p-1}$$

стремится къ нулю, каково бы ни было p, согласно допущенію, когда n стремится къ безконечности, то n можно приписать *опредѣленное* значеніе достаточно большое для того, чтобы разность, о которой идетъ рѣчь, заключалась, каково бы ни было p, между $-E$ и $+E$. Поэтому будемъ имѣть:

$$S_n-E<S_{n+p}<S_n+E.$$

Установивъ это и оставляя n неизмѣняющимся, начнемъ увеличивать неопредѣленно p; сумма S_{n+p} будетъ оставаться заключенною между двумя опредѣленными предѣлами S_n-E и S_n+E, разность между которыми $2E$ сколь угодно мала; откуда, очевидно, слѣдуетъ, что S_{n+p} стремится къ опредѣленному предѣлу, когда p, или $n+p$, неопредѣленно возрастаетъ».

«Это доказательство пріобрѣтаетъ болѣе ясности, когда ему дается геометрическая форма. Пусть O постоянная точка оси Ox. Отложимъ на Ox отъ точки O длину $ON=S_n$, затѣмъ сдѣлаемъ $AN=NA'=E$; возьмемъ также $OP=S_{n+p}$; точка P упадетъ между A и A'.

$O \qquad A \qquad N \quad P \qquad A' \qquad x$

Такимъ образомъ сумма S_{n+p} первыхъ $n+p$ членовъ нашей строки можетъ быть представлена абсциссою, конецъ которой падаетъ постоянно между двумя данными точками A и A'; слѣдовательно, она конечная величина; но сверхъ того она и опредѣленная величина, потому что разстояніе AA' можетъ сдѣлаться менѣе всякой даной длины».

Доказательство это кажется съ перваго взгляда весьма точнымъ, но, всматриваясь въ него ближе, приходишь къ заключенію, что оно не отвѣчаетъ, въ сущности, доказываемой теоремѣ. Въ самомъ дѣлѣ, самое предложеніе состоитъ въ томъ, что рядъ

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots.$$

непремѣнно сходящійся, если сумма

$$Q = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

по мѣрѣ увеличенія n стремится къ нулю, каково бы ни было число p; между тѣмъ Серре въ сущности доказываетъ, что если при достаточно большомъ n сумма Q съ увеличеніемъ p стремится къ опредѣленному предѣлу, то рядъ S сходящійся, что очевидно само собою, такъ-какъ вообще

$$S = S_n + \lim[Q]_{p=\infty}$$

Предположеніе n постояннымъ едвали законно, такъ-какъ характеръ выраженія Q измѣняется вообще, смотря по тому, будемъ ли предполагать возрастающимъ число n или число p, или оба эти числа одновременно. Показать это легко. Въ самомъ дѣлѣ, подчиняя члены ряда только условію убывать съ увеличеніемъ n, мы будемъ имѣть, что въ суммѣ

$$Q = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

первый членъ есть наибольшій, а послѣдній наименьшій, почему будетъ

$$p \cdot u_n > Q > p \cdot u_{n+p-1}$$

или

$$\frac{u_n}{\left(\frac{1}{p}\right)} > Q > \frac{u_{n+p-1}}{\left(\frac{1}{p}\right)}$$

Теперь, при постоянномъ n, дробь $\dfrac{u_n}{\left(\dfrac{1}{p}\right)}$ непремѣнно обращается въ безконечность вмѣстѣ съ p, а дробь $\dfrac{u_{n+p-1}}{\left(\dfrac{1}{p}\right)}$ принимаетъ неопредѣленную форму $\dfrac{0}{0}$; напротивъ, при увеличивающемся n и постоянномъ, хотя бы и весьма большомъ p, обѣ дроби обращаются въ нуль, если только $\lim u_n = 0$; въ этомъ случаѣ Q стремится къ нулю. Наконецъ, при допущеніи, что n и p увеличиваются одновременно, характеръ обѣихъ дробей будетъ зависѣть отъ закона, связывающаго увеличеніе n съ увеличеніемъ p. Теорема Коши предполагаетъ увеличеніе n, а относительно p оставляетъ полный произволъ; поэтому ничто не мѣшаетъ допустить $p=n$, но въ такомъ случаѣ, взявъ извѣстный расходящійся рядъ,

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \dots + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} + \dots,$$

для суммы Q получимъ выраженіе

$$\frac{1}{(n+2)\log(n+2)} + \dots + \frac{1}{(2n+1)\log(2n+1)}.$$

и затѣмъ будемъ имѣть при всякомъ n

$$\frac{n}{(n+2)\log(n+2)} > Q > \frac{n}{(2n+1)\log(2n+1)},$$

почему въ предѣлѣ, для $n=\infty$, Q обратится въ нуль. Отсюда слѣдовало бы, что взятый рядъ сходящійся, въ то время какъ онъ расходящійся. Слѣдовательно, въ такой общей формѣ теорема Коши ошибочна. Значитъ, нельзя допускать p измѣняющимся одновременно съ n. Если же допустить p сколь угодно большимъ, но опредѣленнымъ числомъ, то теорема опять будетъ невѣрна, такъ-какъ въ такомъ случаѣ всѣ ряды, въ которыхъ

$\lim u_n = 0$, пришлось бы признавать за сходящіеся, о чемъ и рѣчи быть не можетъ. Остается понимать теорему въ томъ смыслѣ, что при опредѣленномъ n сумма Q стремится къ конечному предѣлу съ увеличеніемъ p; но въ такомъ случаѣ теорема теряетъ всякое значеніе, потому что сводится на простое утвержденіе, что всѣ сходящіеся ряды дѣйствительно сходящіеся. Вотъ почему доказывать теорему Коши, предполагая n опредѣленнымъ числомъ, какъ дѣлаетъ Серре, едва-ли законно. Желательно поэтому, чтобы теорема эта не встрѣчалась въ математическихъ руководствахъ, особенно въ такихъ, которыя пользуются всеобщею хорошею репутаціей. Теорема эта къ тому же не имѣетъ въ сущности и значенія, такъ-какъ достаточныхъ признаковъ сходимости рядовъ предложено и помимо ея немало.

II.

ЗАДАЧА.

Раздѣлить площадь данной трапеціи на n равновеликихъ частей прямыми, параллельными двумъ ея параллельнымъ сторонамъ.

В. Г. Имшенецкаго.

Легкость или трудность рѣшенія задачъ элементарной геометріи очень часто зависитъ отъ выбора неизвѣстныхъ.

Такъ, напримѣръ, въ предыдущей задачѣ при одномъ выборѣ неизвѣстныхъ приходится рѣшить только уравненіе 2-й степени и построить его корень; при другомъ—интегрировать уравненіе въ конечныхъ разностяхъ; если же обобщить выраженіе задачи, то для рѣшенія ея должно уже пользоваться свойствами опредѣленныхъ интеграловъ.

Пусть въ трапеціи $ABCD$ даны ея стороны $AB=a$, $BC=b$, $AD=c$, изъ которыхъ двѣ послѣднія между собою параллельны и $b>c$.

Требуется сторону a раздѣлить на n частей:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_x,\ a_{x+1},\ \ldots\ a_n,$$

такъ, чтобы проведенныя черезъ точки дѣленія прямыя:

$$b_1,\ b_2,\ ..\ b_{x-1},\ b_x,\ b_{x+1},\ ...\ b_{n-1},$$

параллельныя AD и BC и заключенныя между сторонами AB и CD, раздѣлили всю трапецію на равновеликія части.

Означивъ черезъ i уголъ наклоненія сторонъ a и b, по послѣднему условію имѣемъ

$$\frac{1}{2}(b_{x-1}+b_x)\,a_x \sin i = \frac{1}{2n}(b+c)a \sin i,$$

и

$$\frac{1}{2}(b_x+b_{x+1})\,a_{x+1} \sin i = \frac{1}{2n}(b+c)a \sin i.$$

Сокращая общаго множителя $\frac{1}{2}\sin i$, дѣля первое уравненіе на a_x, второе на a_{x+1} и вычтя изъ него предыдущее, получимъ

$$b_{x+1}-b_{x-1} = \frac{a(b+c)}{n}\left(\frac{1}{a_{x+1}}-\frac{1}{a_x}\right).$$

Но легко замѣтить существованіе двухъ подобныхъ треугольниковъ, пропорціональность сторонъ которыхъ даетъ пропорцію

$$\frac{b_{x+1}-b_{x-1}}{a_{x+1}+a_x} = \frac{b-c}{a}.$$

Исключивъ $b_{x+1}-b_x$ изъ двухъ предыдущихъ уравненій, получимъ

$$a_{x+1}+a_x = \frac{a^2(b+c)}{n(b-c)}\left(\frac{1}{a_{x+1}}-\frac{1}{a_x}\right),$$

уравненіе въ конечныхъ разностяхъ, къ интегрированію котораго приведено рѣшеніе предложенной задачи.

Интегралъ этого уравненія имѣетъ видъ

$$a_x = \sqrt{A+Bx}-\sqrt{A+B(x-1)},$$

гдѣ A произвольное постоянное, а B неопредѣленное постоянное, которое можно опредѣлить такъ, чтобы этотъ интегралъ дѣйствительно удовлетворялъ предыдущему уравненію въ конечныхъ разностяхъ.

Для этого находимъ

$$a_{x+1}=\sqrt{A+B(x+1)}-\sqrt{A+Bx},$$

$$a_{x+1}+a_x=\sqrt{A+B(x+1)}-\sqrt{A+B(x-1)},$$

$$\frac{1}{a_x}=\frac{\sqrt{A+Bx}+\sqrt{A+B(x-1)}}{B},$$

$$\frac{1}{a_{x+1}}=\frac{\sqrt{A+B(x+1)}+\sqrt{A+Bx}}{B},$$

и

$$\frac{1}{a_{x+1}}-\frac{1}{a_x}=\frac{\sqrt{A+B(x+1)}-\sqrt{A+B(x-1)}}{B}$$

Слѣдовательно, подстановка даннаго интеграла въ предложенное уравненіе приводитъ къ слѣдующему значенію неопредѣленнаго постояннаго

$$B=\frac{a^2(b+c)}{n(b-c)}.$$

Что касается постояннаго A, то его значеніе осталось бы произвольнымъ, еслибъ задача выражалась лишь предыдущимъ уравненіемъ въ конечныхъ разностяхъ. Но изъ другихъ ея условій найдемъ для A вполнѣ опредѣленное значеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, сумма всѣхъ отрѣзковъ $a_1, a_2, \ldots a_n$ стороны a должна быть ей равна. Но мы имѣемъ

$$a_1=\sqrt{A+B}-\sqrt{A}$$

$$a_2=\sqrt{A+2B}-\sqrt{A+B}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=\sqrt{A+nB}-\sqrt{A+(n-1)B}$$

и, складывая эти равенства, получимъ

$$a=\sqrt{A+nB}-\sqrt{A};$$

откуда

$$\sqrt{A}=\frac{nB-a^2}{2a}=\frac{ac}{b-c} \text{ и } A=\frac{a^2c^2}{(b-c)^2}.$$

*

Слѣдовательно

$$a_x=\frac{a}{b-c}\left\{\sqrt{c^2+\frac{1}{n}(b^2-c^2)x}-\sqrt{c^2+\frac{1}{n}(b^2-c^2)(x-1)}\right\}.$$

Также легко привести предыдущую задачу къ одному изъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ:

$$b^2_{x+1}-2\,b^2_x+b^2_{x-1}=0$$

и

$$b^2_{x+1}-b^2_x=\frac{b^2-c^2}{n},$$

которыхъ соотвѣтственными интегралами будутъ

$$b_x=\sqrt{A+Bx}$$

и

$$b_x=\sqrt{\frac{b^2-c^2}{n}\,x+C},$$

гдѣ произвольныя постоянныя A, B, C по даннымъ условіямъ должны имѣть значенія:

$$A=c^2,\ B=\frac{b^2-c^2}{n},\ C=c^2.$$

Элементарное рѣшеніе предыдущей задачи.

Означивъ черезъ α_x отрѣзокъ, отсѣкаемый отъ AB прямой b_x, параллельной сторонамъ b и c трапеціи, и выражая, что часть ея площади, заключающаяся между параллельными c и b_x, составляетъ $\frac{x}{n}$ часть всей трапеціи, получимъ

$$(c+b_x)\ \alpha_x=a(b+c)\ \frac{x}{n}.$$

Но легко замѣтить, что

$$\frac{b_x-c}{\alpha_x}=\frac{b-c}{a}.$$

Исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій b_x, находимъ

$$\alpha^2{}_x + \frac{2\,ac}{b-c}\,\alpha_x = \frac{a^2(b+c)x}{n(b-c)},$$

откуда

$$\alpha_x = -\frac{a.c}{b-c} \pm \frac{a}{b-c}\sqrt{c^2+(b^2-c^2)\,\frac{x}{n}}\,.$$

Задачѣ соотвѣтствуетъ лишь корень съ верхнимъ знакомъ. Построеніе этого корня весьма легко. Изъ этого элементарнаго рѣшенія вытекаетъ предыдущее, потому что

$$a_x = \alpha_x - \alpha_{x-1}.$$

Подобнымъ-же образомъ опредѣляется неизвѣстная b_x.

Обобщеніе той-же задачи.

Назовемъ трапеціей фигуру, ограниченную двумя кривыми APB, CQD и двумя параллельными прямыми AD и BC.

Пусть требуется раздѣлить площадь $ABCD$ прямою PQ, параллельной AD и BC, на такія двѣ части, что

$$APQD : ABCD = m : n.$$

Пусть $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ уравненія кривыхъ AB и DC въ отношеніи осей OX и OY, изъ которыхъ OY параллельна AD и BC; въ отношеніи OX ординаты обѣихъ кривыхъ положительныя.

Если $O\alpha = a$, $O\beta = b$, $O\gamma = x$ абсциссы точекъ A, B, P, и $f_2(x) > f_1(x)$ отъ $x = a$ до $x = b$; то по условію задачи получимъ

$$\frac{\int_a^x \{f_2(x) - f_1(x)\}}{\int_a^b \{f_2(x) - f_1(x)\}} = \frac{m}{n}.$$

Если $\frac{dF(x)}{dx} = f_2(x) - f_1(x)$, то предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$F(x) - F(a) - \frac{m}{n}\Big\{F(b) - F(a)\Big\} = 0.$$

Отсюда должно быть получено единственное значеніе для x, удовлетворяющее задачѣ. Это значеніе x нетрудно построить. Между параллельными αAD и βBC проведемъ часть кривой EKF, представляемой уравненіемъ

$$Y = F(x).$$

Параллельно оси x проведемъ изъ E и F прямыя, пересѣкающія ось y въ G и H.

Отрѣзокъ GH раздѣлимъ въ точкѣ J такъ, что

$$GJ : GH = m : n.$$

Проведя изъ J параллельно оси x прямую, пересѣкающую кривую EF въ K, получимъ

$$x = JK.$$

Дѣйствительно, $OG = \alpha E = F(a)$, $OH = \beta F = F(b)$, $OJ = \gamma K = F(x)$; слѣдовательно послѣдняя пропорція приметъ видъ

$$\{F(x) - F(a)\} : \{F(b) - F(a)\} = m : n.$$

Нетрудно показать, какъ этотъ общій пріемъ примѣняется въ той частной задачѣ, которая приведена въ началѣ этой замѣтки.

Въ этомъ рѣшеніи заключается частный случай, когда параллельныя стороны AD и BC приводятся къ нулю и оно легко распространяется на тѣ случаи, когда условіе $f_1(x) < f_2(x)$ не выполняется въ промежуткѣ отъ $x=a$ до $x=b$.

III.

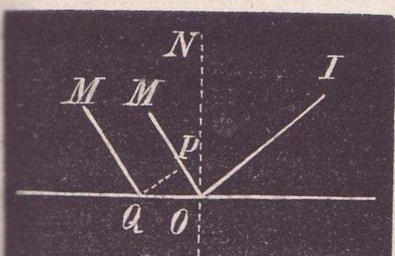
Вычисленіе хода лучей въ двоякопреломляющемъ кристаллѣ.

А. П. Грузинцева.

Изучая теорію явленій двойного преломленія, я не нашелъ общаго аналитическаго рѣшенія задачи о ходѣ лучей въ двоякопреломляющемъ кристаллѣ даже въ самыхъ полныхъ трактатахъ по физической оптикѣ (какъ-то у Billet, Beer, Verdet); только у Lamé въ его извѣстныхъ «Leçons sur l'élasticité des corps solides» помѣщено рѣшеніе этой задачи, но въ формѣ не вполнѣ совершенной и оконченной.

Въ трактатахъ по физической оптикѣ даются лишь геометрическія построенія для опредѣленія хода лучей въ кристаллѣ и по выходѣ ихъ изъ него, и только для одноосныхъ кристалловъ дано у Billet (Traité d'optique physique. Vol. I, page 283 et suiv.) аналитическое рѣшеніе задачи; а между тѣмъ само собой ясно, что рѣшеніе такой важной задачи построеніемъ совершенно не достаточно, и необходимо поэтому имѣть ея аналитическое рѣшеніе. Можетъ-быть, большая сложность, которая встрѣчается при рѣшеніи этой задачи, не позволила упомянутымъ авторамъ привести ея рѣшеніе, но, идя извѣстнымъ путемъ, можно избѣжать слишкомъ большой сложности и дать формулы достаточно простыя для употребленія. Кромѣ того важно имѣть общія формулы для изслѣдованія хода лучей въ кристаллѣ. Имѣя общія формулы, намъ не придется прибѣгать каждый разъ въ частныхъ случаяхъ къ особымъ вычисленіямъ, а стоитъ только воспользоваться уже разъ найденными результатами. Обдумывая этотъ вопросъ, я напалъ на пріемъ, который не только рѣшаетъ вопросъ о вычисленіи хода лучей въ кристаллахъ, но можетъ быть употребленъ безъ новыхъ соображеній для опредѣленія другихъ обстоятельствъ при изученіи явленій двойного преломленія, какъ напримѣръ при явленіяхъ интерференціи въ кристаллахъ. Этотъ пріемъ и будетъ служить предметомъ настоящей замѣтки, причемъ основаніемъ рѣшенія будетъ обобщенное построеніе Гюйгенса.

Пусть данъ двоякопреломляющій кристаллъ и плоскость паденія луча, идущаго сначала въ изотропной срединѣ, пересѣкаетъ верхній фасъ кристалла по прямой OQ, причемъ точка O есть точка паденія луча на кристаллъ. Пусть падающая плоская волна, проходящая черезъ O, будетъ M, JO будетъ направленіе падающаго луча перпендикулярнаго къ ней, ON нормалъ къ фасу кристалла, идущій къ верху въ изотропную средину. Черезъ единицу времени плоская волна будетъ въ M_1 и разстояніе по перпендикуляру QP (точка Q лежитъ на фасѣ кристалла и волнѣ M_1, а P есть подошва перпендикуляра, опущеннаго изъ Q на плоскость волны M) будетъ равно v, скорости свѣта въ верхней изотропной срединѣ.



Пусть далѣе M_1 пересѣкаетъ фасъ кристалла по прямой AB. Въ то время, какъ въ изотропной срединѣ свѣтовыя колебанія распространятся до поверхности шара радіуса v — шара, къ которому M_1 будетъ касательной плоскостью, въ кристаллѣ эти колебанія распространятся до поверхности волны. *Чтобы найдти направленіе преломленныхъ лучей, надо провести черезъ AB плоскости касательныя къ поверхности волны внутри кристалла, тогда прямыя, соединяющія O съ точками касанія, и будутъ искомыми преломленными лучами.*

Это правило и есть извѣстное обобщеніе построенія Гюйгенса, данное имъ для одноосьныхъ кристалловъ.

Такъ-какъ поверхность волны 4-го порядка имѣетъ двѣ полости, то вообще будутъ 4-е касательныя плоскости — по двѣ, симметрично расположенныхъ около начала O; для насъ необходимо взять тѣ двѣ внутри кристалла, которыя будутъ касаться (внутренней и внѣшней) полостей. Такимъ образомъ *получимъ два преломленныхъ луча.* Положимъ, что ABT_1 и ABT_2 будутъ двѣ сказанныя касательныя плоскости, R_1, R_2 точки касанія, тогда OR_1 и OR_2 будутъ оба преломленные луча; положимъ, далѣе, что OS_1 и OS_2 будутъ перпендикуляры, опущенные изъ O на обѣ касательныя плоскости, тогда OS_1 будетъ скорость ω_1 перваго луча, а OS_2 будетъ скоростью ω_2 второго луча.

Задача наша будетъ состоять въ вычисленіи величины и направленія этихъ прямыхъ OP_1, OP_2, OS_1 и OS_2 по данному падающему лучу.

Положимъ, что

$$A,\ B,\ C$$

будутъ косинусы направленія падающаго луча;

$$A_1,\ B_1,\ C_1$$

косинусы направленія нормала къ тому фасу кристалла, на который падаетъ лучъ, возстановленнаго изъ точки паденія O,

$$A_{11},\ B_{11},\ C_{11}$$

косинусы направленія нормала къ плоскости паденія луча. При этомъ за начало координатъ принята точка паденія O, и за координатныя оси — оси упругости кристалла. Тогда, называя переженныя координаты какой-нибудь точки буквами x, y, z, будемъ имѣть:

$$Ax + By + Cz = o \qquad (1)$$

уравненіе падающей волны M;

$$A_1x + B_1y + C_1z = o \qquad (2)$$

уравненіе фаса кристалла, на который падаетъ лучъ;

$$A_{11}x + B_{11}y + C_{11}z = o \qquad (3)$$

уравненіе плоскости паденія, причемъ A_{11}, B_{11}, C_{11} связаны съ A, A_1 и пр. соотношеніями:

$$\left.\begin{aligned} A_{11} sn i &= CB_1 - C_1B; \\ B_{11} sn i &= AC_1 - A_1C; \\ C_{11} sn i &= BA_1 - AB_1, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

гдѣ i есть уголъ паденія, опредѣляемый равенствомъ:

$$cs i = AA_1 + BB_1 + CC_1. \qquad (5)$$

Далѣе уравненіе плоскости M_1 будетъ:

$$Ax + By + Cz - v = o. \qquad (6)$$

Замѣтивъ всѣ эти соотношенія необходимыя намъ ниже, выразимъ аналитически требованіе, чтобы плоскость, касательная къ поверхности волны въ кристаллѣ, проходила черезъ прямую пересѣченія плоскостей (2) и (6).

Уравненія плоскости, проходящей черезъ прямую пересѣченія плоскостей (2) и (6), т. е. плоскости верхняго фаса кристалла и плоскости падающей волны M_1, по извѣстному правилу геометріи можно написать такъ:

$$Ax + By + Cz - v + k(A_1x + B_1y + C_1z) = o; \qquad (7)$$

Здѣсь k неопредѣленный множитель и найдется изъ того условія, чтобы уравненіе (7) давало уравненіе касательной къ волнѣ плоскости. Если назовемъ

$$m, n, p$$

косинусы направленія одной изъ прямыхъ OS, тогда уравненіе касательной плоскости будетъ:

$$mx + ny + pz - \omega = o, \tag{8}$$

гдѣ ω скорость свѣта вдоль OS.

Уравненіе (7) и (8) должны давать одну и ту-же плоскость, для чего нужно, какъ извѣстно, чтобы коэффиціенты при x, y, z въ обоихъ уравненіяхъ были пропорціональны между собой, т. е. имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} A + kA_1 &= \mu m; \\ B + kB_1 &= \mu n; \\ C + kC_1 &= \mu p; \\ v &= \mu.\omega. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здѣсь количество μ есть коэффиціентъ пропорціональности и его физическое значеніе, именно

$$\mu = \frac{v}{\omega}; \tag{10}$$

ясно: это есть не что иное, какъ показатель преломленія свѣта при переходѣ его изъ верхней изотропной средины въ нижнюю двоякопреломляющую.

Количество k, введенное вышенаписанными формулами, и есть то, къ опредѣленію котораго сведется весь предложенный вопросъ; кромѣ этой роли онъ имѣетъ еще другую: эта, какъ можно убѣдиться простымъ вычисленіемъ, величина можетъ дать разность хода лучей въ двоякопреломляющей пластинкѣ, именно—разность двухъ корней k пропорціональна разности хода обоихъ лучей—что необходимо при изученіи явленій интерференціи въ кристаллахъ.

Прежде чѣмъ показать способъ опредѣленія количества k, а по нему и всѣхъ остальныхъ неизвѣстныхъ количествъ, считаю нужнымъ сдѣлать небольшое отступленіе. Уравненія (9) даютъ извѣстные законы распространенія свѣта въ двояко-преломляющихъ кристаллахъ очень просто и легко.

Умножая уравненія (9) по порядку на $A_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $C_{\prime\prime}$ по сложеніи результатовъ при помощи равенствъ (4), имѣемъ:

$$A_{\prime\prime}m + B_{\prime\prime}n + C_{\prime\prime}p = o. \tag{11}$$

Это равенство показываетъ, что *плоскости, касательныя къ поверхности волны въ кристаллѣ, перпендикулярны къ плоскости паденія.* Затѣмъ умножая первое равенство въ системѣ (9) на B_1, второе на $-C_1$, по сложеніи результатовъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\omega.\, A_{\prime\prime}\,\mathrm{sn}\, i - (pB_1 - nC_1).v = o;\\ &\omega.\, B_{\prime\prime}.\mathrm{sn}\, i - (mC_1 - pA_1).v = o;\\ &\omega.\, C_{\prime\prime}.\mathrm{sn}\, i - (nA_1 - mB_1).v = o; \end{aligned}\right\} \text{подобнымъ образомъ:} \tag{12}$$

Называя теперь σ уголъ между нормаломъ къ фасу кристалла и направленіемъ OS, имѣемъ:

$$\mathrm{cs}\,\sigma = mA_1 + nB_1 + pC_1.$$

Перенося вторые члены въ равенствахъ (12) вправо и складывая ихъ квадраты, находимъ по извлеченіи квадратнаго корня:

$$\frac{\mathrm{sn}\, i}{\mathrm{sn}\,\sigma} = \frac{v}{\omega} = \mu, \tag{13}$$

соотношеніе извѣстное и отвѣчающее закону Декарта для просто преломляющихъ срединъ.

Замѣтимъ здѣсь одно обстоятельство. Такъ-какъ обыкновенно свѣтъ проходитъ изъ средины менѣе плотной въ болѣе плотную, то вообще

$$v > \omega,$$

а слѣдовательно по (13):

$$i > \sigma.$$

Опредѣлимъ теперь k. Складывая квадраты первыхъ 3-хъ равенствъ въ системѣ (9) и положивъ для простоты

$$v = 1,$$

находимъ:

$$\omega^2 = \frac{1}{1 + k^2 + 2k \operatorname{cs} i},$$

или, какъ намъ удобнѣе:

$$\frac{1}{\omega^2} = 1 + k^2 + 2k \operatorname{cs} i. \tag{14}$$

Подставимъ теперь одно значеніе $\frac{1}{\omega^2}$ изъ этого равенства, а m, n, p изъ (9) и μ изъ (10) въ уравненіе Френеля для скоростей волнъ, написанное въ видѣ:

$$\omega^4 - \omega^2 Sm^2(b^2 + c^2) + Sm^2 b^2 c^2 = o,$$

причемъ здѣсь a, b, c суть скорости распространенія свѣта вдоль осей упругости, а знакомъ S[*] обозначена сумма трехъ членовъ подобныхъ первому, написанному подъ нимъ — или, лучше въ видѣ.

$$1 - \frac{1}{\omega^2} \cdot Sm^2(b^2 + c^2) + \frac{1}{\omega^4} Sm^2 b^2 c^2 = 0,$$

составивъ предварительно слѣдующія выраженія:

---

[*] Это обозначеніе принадлежитъ, кажется, Lamé. См. его Leçons sur l'élasticité etc.

$$\frac{Sm^2(b^2+c^2)}{\omega^2}=S(b^2+c^2)A^2+k^2S(b^2+c^2)A_1{}^2+2kS(b^2+c^2)AA_1;$$

$$\frac{Sm^2b^2c^2}{\omega^2}=Sb^2c^2A^2+k^2Sb^2c^2A_1{}^2+2kSb^2c^2AA_1\,,$$

и умноживъ послѣднее на $\frac{1}{\omega^2}$ (14)

$$\frac{Sm^2b^2c^2}{\omega^4}=Sb^2c^2A^2+k^2Sb^2c^2A^2+2kSb^2c^2AA+k^2Sb^2c^2A^2+$$
$$+k^4Sb^2c^2A_1{}^2+2k^3Sb^2c^2AA_1+2k\,\mathrm{cs}\,i.Sb^2c^2A^2+2k^3\mathrm{cs}\,iSb^2c^2A_1{}^2$$
$$+4k^2\mathrm{cs}\,iSb^2c^2AA_1\,,\text{—}$$

послѣ подстановокъ въ уравненіе Френеля находимъ уравненіе для опредѣленія k:

$$Tk^4+T_{\mathrm{I}}k^3+T_{\mathrm{II}}k^2+T_{\mathrm{III}}k+T_{\mathrm{IV}}=0. \qquad (15)$$

Здѣсь положено:

$$T=Sb^2c^2A_1{}^2;\ T_1=2\mathrm{cs}\,i.Sb^2c^2A_1{}^2+Sb^2c^2AA_1,$$
$$T_{\prime\prime}=Sb^2c^2A_1{}^2+Sb^2c^2A^2+4\mathrm{cs}\,i\,.\,Sb^2c^2AA_1-S(b^2+c^2)A_1{}^2;$$
$$T_{\prime\prime\prime}=2\mathrm{cs}\,iSb^2c^2A^2+2Sb^2c^2AA_1-2S(b^2+c^2)AA_1;\ T_{\mathrm{IV}}=Sb^2c^2A^2$$
$$-S(b^2+c^2)A^2+1.$$

Уравненіе (15) 4-ой степени и даетъ четыре корня для k; изъ нихъ, ясно, два относятся къ той части волны, которая находится внутри кристалла, а два другихъ къ той, которая будетъ внѣ кристалла.

Замѣтимъ здѣсь одно соотношеніе для r и σ. Изъ уравненій (9) по умноженіи ихъ A_1, B_1, C_1 и по сложеніи результатовъ, находимъ:

$$k=\mu\,\mathrm{cs}\,\sigma-\mathrm{cs}\,i,$$

а при помощи равенства (13):

$$\kappa = \frac{\operatorname{sn}(i-\sigma)}{\operatorname{sn}\sigma}. \qquad (16)$$

Это соотношеніе очень простое и въ то-же время полезное при вычисленіи разности хода лучей въ кристаллѣ, изъ него находимъ:

$$tg\,\sigma = \frac{\operatorname{sn} i}{k + \operatorname{cs} i}. \qquad (17)$$

Теперь рѣшеніе вопроса состоитъ въ слѣдующемъ. Сначала рѣшаемъ уравненіе (15) относительно k; затѣмъ беремъ тѣ два корня k, которые даютъ по (17) для σ дугу меньшую i. Зная такимъ образомъ два корня k_1 и k_2, находимъ по (17) два значенія σ : σ_1 и σ_2. Потомъ по формулѣ (13) опредѣляемъ:

$$\omega = \frac{\operatorname{sn}\sigma_1}{\operatorname{sn} i},\ \omega = \frac{\operatorname{sn}\sigma_2}{\operatorname{sn} i}$$

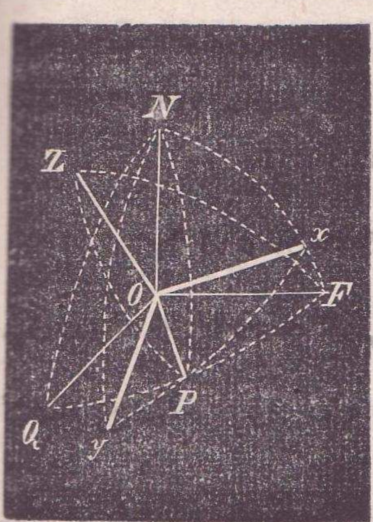
и

$$\mu_1 = \frac{1}{\omega_1},\ \mu_2 = \frac{1}{\omega_2};$$

и наконецъ по формуламъ (9) находимъ m, n, p, для болѣе удобнаго опредѣленія которыхъ ниже сообщены логариѳмическія формулы.

Для рѣшенія и изслѣдованія уравненія (15) полезно преобразовать его коеффиціенты, именно полезно выразить эти коеффиціенты въ функціи угловъ, опредѣляющихъ положеніе фаса кристалла въ отношеніи осей кристалла.

Пусть фасъ кристалла пересѣкается плоскостью xy по прямой OP и пусть OF будетъ слѣдъ плоскости паденія на фасѣ. Примемъ слѣдъ плоскости паденіе OF, перпендикуляръ къ плоскости паденія OQ и нормалъ къ фасу ON за новыя координатныя оси x^1, y^1, z^1; тогда, называя A^1, B^1, C^1 косинусы направленія оси x^1, $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$ оси $y_,$ и $A_,$, $B_,$, $C_,$ оси z^1, имѣемъ:



$$\left.\begin{array}{l} A^1 . \operatorname{sn} i = A - A_1 . \operatorname{cs} i \\ B^1 . \operatorname{sn} i = B - B_1 . \operatorname{cs} i \\ C^1 . \operatorname{sn} i = C - C_1 . \operatorname{cs} i \end{array}\right\} ; \quad (18);$$

ибо направленіе A^1, B^1, C^1 перпендикулярно къ направленіямъ ON и OQ, а это послѣднее перпендикул. къ ON и лучу OJ.

Называя теперь φ и ψ углы OP съ осями x^1 и x, а θ уголъ между нормаломъ ON и осью z, по формуламъ Эйлера имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{A - A_1 \operatorname{cs} i}{\operatorname{sn} i} = \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{cs}\psi - \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{sn}\psi . \operatorname{cs}\theta & (\text{изъ } \Delta\, x P F) \\ \dfrac{B - B_1 \operatorname{cs} i}{\operatorname{sn} i} = \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{sn}\psi + \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{cs}\psi . \operatorname{cs}\theta & (\text{изъ } \Delta\, y P F) \\ \dfrac{C - C_1 \operatorname{cs} i}{\operatorname{sn} i} = \operatorname{sn}\varphi \ . \ \operatorname{sn}\theta & (\text{изъ } \Delta\, z P F) \end{array}\right\} (19)$$

Также:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = \operatorname{sn}\psi . \operatorname{sn}\theta ; & (\text{изъ } \Delta\, x P N) \\ B_1 = \operatorname{cs}\psi . \operatorname{sn}\theta ; & (\text{изъ } \Delta\, y P N) \\ C_1 = \operatorname{cs}\theta . \ , & (\text{изъ } \Delta\, z P N) \end{array}\right\} ; \quad (20)$$

Полагая въ формулахъ (19):

$tg\, \varphi . \operatorname{cs}\theta = ctg\, \mu$, гдѣ μ вспомогательный уголъ, находимъ: (21)

$$\left.\begin{array}{l} A - A_1 . \operatorname{cs} i = \operatorname{sn} i . \operatorname{cs}\varphi . \dfrac{\operatorname{sn}(\mu - \psi)}{\operatorname{sn}\mu} \\ B - B_1 . \operatorname{cs} i = \operatorname{sn} i . \operatorname{cs}\varphi . \dfrac{\operatorname{cs}(\mu - \psi)}{\operatorname{sn}\mu} \\ C - C_1 . \operatorname{cs} i = \operatorname{sn} i . \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{sn}\theta, \text{ и также:} \end{array}\right\} ; \quad (22)$$

$$\left.\begin{array}{l} A^1 . \operatorname{sn}\mu = \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{sn}(\mu - \psi) \\ B^1 . \operatorname{sn}\mu = \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{cs}(\mu - \psi) \\ C^1 \quad = \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{sn}\theta \ . \end{array}\right\} \quad (23)$$

При помощи приведенныхъ формулъ можно преобразовать коеффиціенты T_1 T_{11} . . . Замѣтимъ, что въ нихъ входятъ слѣдующія количества, которыя мы означимъ такъ:

$$P = Sb^2c^2A^2 \; ; \; P_1 = Sb^2c^2A^2 \; ; \; P^1 = Sb^2c^2AA_1 \; ;$$

$$S = S(b^2+c^2)A^2 \; ; \; S_1 = S(b^2+c^2)A_1^{\,2}, \; S^1 = S(b^2+c^2)AA_1.$$

Умножимъ равенства (18) по порядку на Ab^2c^2, Ba^2c^2, Ca^2b^2 и сложимъ результаты, получимъ:

$P - \mathrm{cs}\, i \, . \, P^1 = \alpha$, гдѣ α означаемъ вторую часть равенства, не вычисляя ее.

Далѣе умножимъ уравненіе (18) по порядку на $A_1b^2c^2$, $B_1a^2c^2$, $C_1a^2b^2$ и сложимъ результаты, тогда получимъ:

$$P' - \mathrm{cs}\, i . \, P_1 = \beta, \text{ значеніе } \beta \text{ ясно.} \qquad (25)$$

За-тѣмъ возводимъ уравненія (18) въ квадратъ, умножая по порядку на b^2c^2, a^2c^2, a^2b^2 и складывая, находимъ:

$P + \mathrm{cs}^2 i . P_1 - 2\,\mathrm{cs}\, i . P' = \gamma$, причемъ значеніе γ понятно. (26)

Далѣе перенесемъ вторыя части въ первыхъ частяхъ уравненій (18) во вторыя ихъ части, возводимъ въ квадраты и, умножая по порядку на b^2c^2, a^2c^2, a^2b^2, по сложеніи результатовъ получимъ:

$$P = \mathrm{cs}^2 i . \, P_1 + \delta, \text{ или}$$

$$P - \mathrm{cs}^2 i . \, P_1 = \delta. \qquad (27)$$

Эти равенства (24) — (27) послужатъ намъ для опредѣленія количествъ P, P_1, P' въ функціи одного изъ нихъ и для преобразованія коеффиціентовъ уравненія (15).

Совершенно такимъ-же образомъ находимъ:

$S - \mathrm{cs}\, i . \, S' = a$; (28) $\qquad S' - \mathrm{cs}\, i . \, S_1 = b$. (29)

$S + \mathrm{cs}^2 i . \, S_1 - 2\,\mathrm{cs}\, i . \, S' = c$; (30) $\qquad S_1 - \mathrm{cs}^2 i . \, S_1 | = d$ (31)

Роль этихъ равенствъ такая-же, какъ и предъидущихъ.

Опредѣлимъ теперь при помощи простого вычисленія количества α, β, γ и δ. Замѣчая, что A, B, C суть линейныя функціи $\operatorname{sn} i$ и $\operatorname{cs} i$, можно представить α, β, γ, δ въ видѣ:

$$\alpha = M.\operatorname{sn}^2 i + N.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ \beta = N'.\operatorname{sn} i;\ \gamma = M'.\operatorname{sn}^2 i;$$
$$\delta = M''.\operatorname{sn}^2 i + Q.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i,$$

гдѣ M, N,... суть нѣкоторыя функціи θ, φ и ψ, ихъ вычислимъ ниже; при этомъ замѣчу, что одинаковыми буквами означены количества, которыя, какъ докажемъ, равны.

Также найдемъ:

$$a = F.\operatorname{sn}^2 i + G.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ b = G'.\operatorname{sn} i;\ c = F'.\operatorname{sn}^2 i;$$
$$d = F''.\operatorname{sn}^2 i + H.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i.$$

Всѣхъ введенныхъ коеффиціентовъ 12, но, какъ сейчасъ увидимъ, различныхъ между ними только 4.

Дѣйствительно, исключая изъ уравненій (24) — (27) количества P, P_1, P', находимъ:

$$\alpha - \gamma = \beta.\operatorname{cs} i,\ \delta = \alpha + \beta.\operatorname{cs} i = 2\alpha - \gamma, \text{ также:}$$
$$a - c = b.\operatorname{cs} i,\ d = a + b.\operatorname{cs} i = 2a - c.$$

Подставимъ сюда значеніе α, a..., по сравненіи коеффиціентовъ при $\operatorname{sn} i$, $\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i$, $\operatorname{sn}^2 i$, находимъ:

$$M = M' = M'';\ N = N';\ Q = 2N,$$
$$F = F' = F'';\ G = G';\ H = 2G.$$

И такъ:

$$\alpha = M\operatorname{sn}^2 i. + N.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ \beta = N\operatorname{sn} i;\ \gamma = M.\operatorname{sn}^2 i,$$
$$\delta = M\operatorname{sn}^2 i + 2N\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;$$

$$a = F.\operatorname{sn}^2 i + G.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ b = G.\operatorname{sn} i;\ c = F.\operatorname{sn}^2 i;$$
$$d = F\operatorname{sn}^2 i + 2G\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i.$$

Теперь остается только вычислить M, N, F, G.

Сначала вычислимъ G и N. Значенія ихъ при помощи (25), (29) и (23) будутъ:

$$N = Sb^2c^2A_1A'; \quad G = S(b^2+c^2)A_1A'$$

и подставляя сюда значеніе A', $A_1 \ldots$ изъ равенствъ (23) и (20), находимъ послѣ легкаго преобразованія:

$$N = -\frac{c^2 \operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{sn}\mu}\left\{b^2 \operatorname{cs}\mu + a^2\lambda^2 \operatorname{cs}\psi . \operatorname{cs}(\mu-\psi)\right\} + \\ + a^2b^2 \operatorname{sn}\theta . \operatorname{sn}\theta . \operatorname{sn}\varphi, \quad (32)$$

гдѣ
$$\lambda^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$

$$G = -\frac{c^2 \operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{cs}\mu}{\operatorname{sn}\mu} - \frac{\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{sn}\mu}\left\{b^2 \operatorname{cs}\mu + a^2\lambda^2 \operatorname{cs}\psi \operatorname{cs}(\mu-\psi)\right\} + \\ (a^2+b^2) \operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\theta \operatorname{sn}\varphi. \quad (33)$$

За-тѣмъ по формуламъ (26) и (30) при помощи (23) находимъ:

$$M = \frac{c^2 \operatorname{cs}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2\mu}\left\{b^2 + a^2\lambda^2 \operatorname{cs}^2(\mu-\psi\right\} + a^2b^2 \operatorname{sn}^2\theta . \operatorname{sn}^2\varphi; \quad (34)$$

$$F = \frac{c^2 \operatorname{cs}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2\mu} + \frac{\operatorname{cs}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2\mu}\left\{b^2 + a^2\lambda^2 \operatorname{cs}^2(\mu-\psi)\right\} + \\ + (a^2+b^2) \operatorname{sn}^2\theta . \operatorname{sn}^2\varphi. \quad (35)$$

Видимъ, что коеффиціенты M, N, F, G зависятъ только отъ θ, φ и ψ, т. е. отъ положенія фаса кристалла, на которой падаютъ лучи, въ отношеніи осей упругости кристалла.

Теперь можно преобразовать коеффиціенты T_1 $T_{11}, \ldots$

Опредѣлимъ P, P', S, S' въ функціи P_1 и S_1, находимъ:

$$P' = \beta + \operatorname{cs} i . P_1; \quad P = \delta + \operatorname{cs}^2 i . P_1;$$

$S' = b + \operatorname{cs} i . S_1$; $S = d + \operatorname{cs}^2 i . S_1$, при этомъ количества P_1 и S_1 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$P_1 = c^2 \mathrm{sn}^2\theta \{ b^2 + a^2\lambda^2 \mathrm{cs}^2\psi \} + a^2 b^2 \mathrm{cs}^2\theta; \qquad (36)$$

$$S_1 = c^2 \mathrm{sn}^2\theta + \mathrm{sn}^2\theta \{ b^2 + a^2\lambda^2 \mathrm{cs}^2\psi \} + (a^2 + b^2).\mathrm{cs}^2\theta. \qquad (37)$$

Итакъ имѣемъ:

$T = P_1;\ T_1 = 2\beta + 4\mathrm{cs}\,i.P_1;\ T_{11} = P_1 - S_1 + 5\mathrm{cs}^2 i.P_1 + 4\beta \mathrm{cs}\,i + \delta$, или, при помощи соотношеніи между α, β и δ:

$T_{11} = P_1 - S_1 + 5\mathrm{cs}^2 i.P_1 + 5\beta \mathrm{cs}\,i + \alpha;$

$T_{111} = 2\mathrm{cs}\,i.P_1 + 2\mathrm{cs}^2 i.P_1 - 2\mathrm{cs}\,i.S_1 + 2\beta - 2b + 2\delta.\mathrm{cs}\,i;$

$T_{1\mathrm{v}} = 1 + \delta - d + (P_1 - S_1)\mathrm{cs}^2 i.$

Для изслѣдованія уравненія (15) полезно его преобразовать. Положимъ:

$$k = l - \mathrm{cs}\,i \qquad (38)$$

подставляя это значеніе k въ уравненіи (15), находимъ окончательно:

$$P_1 l^4 + 2\mathrm{sn}\,i.N.l^3 + \{(M + P_1)\mathrm{sn}^2 i - S_1\} l^2 + 2\mathrm{sn}\,i\{(N - G)\mathrm{sn}^2 i - G.\mathrm{cs}^2 i\} l + 1 + \mathrm{sn}^4 i.(M - F) - \mathrm{sn}^2 i.\mathrm{cs}^2 i.F = O. \qquad (39)$$

Замѣтимъ, что введя l въ формулу (17), находимъ:

$$\mathrm{tg}\,\sigma = \frac{\mathrm{sn}\,i}{l}. \qquad (40)$$

Займемся теперь изслѣдованіемъ полученнаго уравненія (39).

Разберемъ случаи, имѣющіе большое значеніе въ физической оптикѣ.

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ уравненіе (39) превращается въ биквадратное. Чтобы это уравненіе обращалось въ биквадратное, необходимо равенство нулю коэффиціентовъ при l^3 и l.

Итакъ имѣемъ:

$$\mathrm{sn}\,i.N = 0;\ \mathrm{sn}\,i.\{(N - G).\mathrm{sn}^2 i - G\mathrm{cs}^2 i\} = 0. \qquad (41)$$

Эти условія удовлетворяются:

1. $\operatorname{sn} i = 0$, но N и G отличны отъ нуля. Это случай нормальнаго паденія.

2. $\operatorname{sn} i$ не нуль, но $N = 0$, $G = 0$. Эти оба равенства распадаются на другія, ибо можно представить N и G въ видѣ: $N = \operatorname{sn}\theta . N_1$; $G = \operatorname{sn}\theta . G_1$ по равенствамъ (32) и (33). Слѣдовательно или a) $\operatorname{sn}\theta = 0$, N_1 и G_1 отличны отъ нуля, или b) $\operatorname{sn}\theta$ не нуль, а $N_1 = 0$, $G_1 = 0$.

Случай $\operatorname{sn}\theta = 0$ соотвѣтствуетъ тому положенію фаса, когда онъ перпендикуляренъ оси z;

Случай b) разберемъ такъ. Положимъ въ N_1 и G_1:

$$U = \frac{\operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{sn}\mu}\left\{b^2 \operatorname{cs}\mu + a^2\lambda^2 \operatorname{cs}\psi . \operatorname{cs}(\mu - \psi)\right\}$$, тогда условія $N_1 = 0$,

$G_1 = 0$ будутъ:

$$-c^2 . U + a^2 b^2 \operatorname{cs}\theta . \operatorname{sn}\varphi = 0; \quad -c^2 \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{ctg}\mu - U + $$
$$+ (a^2 + b^2) . \operatorname{cs}\theta . \operatorname{sn}\varphi = 0.$$

Исключая отсюда U и вводя значеніе $\operatorname{ctg}\mu$, находимъ:

$$\operatorname{cs}\theta . \operatorname{sn}\varphi . (a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0.$$

Это уравненіе даетъ въ общемъ случаѣ двуосьныхъ кристалловъ:

b_1) $\operatorname{cs}\theta = 0$, φ не ноль. При этомъ условіи $U = 0$, т. е., или

b'_1) $\operatorname{cs}\varphi = 0$; b''_1) $\operatorname{sn}\psi = 0$; b'''_1) $\operatorname{cs}\psi = 0$.

Слѣдовательно, помня значеніе угловъ φ и ψ, имѣемъ:

Если b'_1) лучъ падаетъ въ главномъ сѣченіи, проходящемъ черезъ ось z-овъ и эта послѣдняя лежитъ на фасѣ кристалла, или b''_1) фасъ параллеленъ плоскости xz, или если b'''_1) фасъ параллеленъ плоскости yz, то уравненіе для l превращается въ биквадратное.

c) $\operatorname{sn}\varphi = 0$, $\operatorname{cs}\theta$ не нуль, при этомъ $U = 0$ и даетъ:

c') $\operatorname{sn}\psi=0$; c'') $\operatorname{cs}\psi=0$; слѣдовательно или c') фасъ кристалла содержитъ ось x-овъ и плоскость паденія есть плоскость главнаго сѣченія или c'') фасъ содержитъ ось y-овъ и опять плоскость главнаго сѣченія есть плоскость паденія.

И такъ заключаемъ, что уравненіе для l обращается въ биквадратное, когда паденіе нормально, или когда фасъ кристалла параллеленъ какой-нибудь координатной плоскости, или перпендикуляренъ къ одной изъ осей упругости.

Дадимъ теперь для m, n, p логариѳмическія выраженія.

Положимъ:

$$A-A_1\operatorname{cs}i=A_1\operatorname{sn}i.\operatorname{ctg}h;$$

$$B-B_1\operatorname{cs}i=B_1\operatorname{sn}i.\operatorname{ctg}j;$$

$$C-C_1\operatorname{cs}i=C_1\operatorname{sn}i.\operatorname{ctg}g.$$

Подставляя A, B, C отсюда въ формулы (9), находимъ при помощи (16):

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{A_1\operatorname{sn}(\sigma+h)}{\operatorname{sn}h};\\ n&=\frac{B_1\operatorname{sn}(\sigma+j)}{\operatorname{sn}j};\\ p&=\frac{C_1\operatorname{sn}(\sigma+g)}{\operatorname{sn}g}.\end{aligned}\right\}\qquad(42)$$

Для опредѣленія h, j, g можно получить слѣдующія формулы при помощи (21) и (22):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg}h&=\frac{\operatorname{cs}\varphi.\operatorname{sn}(\mu-\psi)}{\operatorname{sn}\theta.\operatorname{sn}\psi.\operatorname{sn}\mu};\\ \operatorname{ctg}j&=\frac{\operatorname{cs}\varphi.\operatorname{cs}(\mu-\psi)}{\operatorname{sn}\theta.\operatorname{cs}\psi.\operatorname{sn}\mu};\\ \operatorname{ctg}g&=\operatorname{sn}\varphi.\operatorname{tg}\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

Опредѣлимъ теперь величину и направленіе прямыхъ OR. Косинусы направленія OR и ея величина входятъ въ уравненіе поверхности волны, которое можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$P_{>}R - Q + q = 0\ *, \qquad (44)$$

гдѣ положено для краткости:

$$P_{>} = Sb^2c^2x^2,\ R = Sx^2;\ Q = Sa^2\,(b^2 + c^2)\,x^2,\ q = a^2b^2c^2,$$

и гдѣ x, y, z суть координаты конца прямой OR.

Уравненіе касательной плоскости можно написать поэтому въ видѣ:

$$X.a\{P_{>} + a^2R - a^2(b^2+c^2)\} + Y.y.\{P + b^2R - b^2(a^2+c^2)\}$$
$$+ Z.z.\{P_{>} + c^2R - c^2(a^2+b^2)\} = P_{>}R - q; \qquad (45)$$

Здѣсь X, Y, Z суть перемѣнные координаты касательной плоскости, а x, y, z — точки касанія.

Сравнивая коэффиціенты этого уравненія съ коэффиціентами уравненія (8), мы получимъ три уравненія съ тремя неизвѣстными x, y, z; для рѣшенія ихъ употребимъ пріемъ Lamé. Опредѣлимъ точку x_1, y_1, z_1 изъ уравненій:

$$\frac{a_1}{bc} = \frac{m}{\omega},\ \frac{y_1}{ac} = \frac{n}{\omega},\ \frac{z_1}{ab} = \frac{p}{\omega}. \qquad (46)$$

Эта точка лежитъ на касательной къ поверхности эллипсоида:

$$\frac{x_1^2}{bc} + \frac{y_1^2}{ac} + \frac{z_1^2}{ab} = 1, \qquad (47)$$

которой можно назвать эллипсоидомъ Lamé.

Дѣйствительно, умножая уравненіе (46) по порядку на x_1, y_1, z_1 и складывая результаты, находимъ:

$$\frac{xx_1}{bc} + \frac{yy_1}{ac} + \frac{zz_1}{ab} = 1, \qquad (48)$$

---

* См. *Lamé*, Leçons sur l'élasticité des corps solides. 2-me éd. p. 245.

ибо $mx + ny + pz = \omega$.

Подставляя значеніе m, n, p изъ (46) въ уравненіе Френеля для скорости ω, найдемъ:

$$P_{>1}R_1 - Q_1 + q = 0, \qquad (49)$$

т. е. точка x_1, y_1, z_1 лежитъ на поверхности волны, причемъ $P_{>1}, R_1, Q_1$ суть значенія $P_{>}, Q, R$ для точки x_1, y_1, z_1.

Также изъ (46) при помощи (47) находимъ:

$$mx_1 + ny_1 + pz_1 = \omega,$$

т. е. точка x_1, y_1, z_1 есть точка, лежащая на касательной къ поверхности волны (44). Отсюда заключаемъ, что точки (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) суть сопряженныя между собой, т. е. каждая есть полюсъ касательной къ волнѣ плоскости относительно эллипсоида Lamé, а слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{bc} &= x_1 \cdot \frac{P_{>1} + a^2R_1 - a^2(b^2+c^2)}{P_{>1}R_1 - q}, \\ \frac{y}{ac} &= y_1 \cdot \frac{P_{>1} + b^2R_1 - b^2(a^2+c^2)}{P_{>1}R_1 - q}, \\ \frac{z}{ab} &= z_1 \cdot \frac{P_{>1} + c^2R_1 - c^2(a^2+b^2)}{P_{>1}R_1 - q}. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Опредѣляя $P_{>1}$ и R_1, находимъ:

$$P_{>1} = q.[1 + k^2 + 2k \operatorname{cs} i] = q\,(l^2 + \operatorname{sn}^2 i); \qquad (51)$$

$$R_1 = P_1 l^2 + 2N \operatorname{sn} i . l + M . \operatorname{sn}^2 i. \qquad (52)$$

Составляя $P_{>1}$ R_1, надо будетъ воспользоваться уравненіемъ (39); тогда найдемъ:

$$P_{>1}R_1 = q.\{S_1 l^2 + 2G \operatorname{sn} i . l + F \operatorname{sn}^2 i . - 1\}. \qquad (53)$$

Подставляя все это въ формулы (50), находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{x_1}{bc} \cdot \frac{(P_1+b^2c^2).l^2+2N\operatorname{sn} i.l+(M+b^2c^2)\operatorname{sn}^2 i-(b^2+c^2)}{S_1 l^2+2G\operatorname{sn} i.l+F\operatorname{sn}^2 i-2};\\
y &= \frac{y_1}{ac} \cdot \frac{(P_1+a^2c^2).l^2+2N\operatorname{sn} i.l+(M+a^2c^2).\operatorname{sn}^2 i-(a^2+c^2)}{S_1 l^2+2G\operatorname{sn} i.l+F\operatorname{sn}^2 i-2};\\
z &= \frac{z_1}{ab} \cdot \frac{(P_1+a^2b^2).l^2+2N\operatorname{sn} i.l+(M+a^2c^2).\operatorname{sn}^2 i-(a^2+b^2)}{S_1 l^2+2G\operatorname{sn} i.l+F\operatorname{sn}^2 i-2}.
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Зная отсюда x, y, z, находимъ $OR = \varrho$ по формулѣ:

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad (55)$$

и косинусы направленія ϱ по формуламъ:

$$\operatorname{cs} f = \frac{x}{\rho}, \operatorname{cs} g = \frac{y}{\rho}, \operatorname{cs} h = \frac{z}{\rho}. \qquad (56)$$

И такъ предложенный вопросъ рѣшенъ.

Для опредѣленія координатъ точекъ R и R_1 можно поступать еще слѣдующимъ образомъ; при опредѣленіи поверхности волны мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{\rho^2-a^2} &= \frac{\omega m}{\omega^2-a^2};\\
\frac{y}{\rho^2-b^2} &= \frac{\omega n}{\omega^2-b^2};\\
\frac{z}{\rho^2-c^2} &= \frac{\omega p}{\omega^2-c^2},
\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

гдѣ x, y, z суть координаты конца прямой OR, а

$$\varrho^2 = x^2+y^2+z^2,$$

т. е. ϱ есть длина OR.

Изъ этихъ уравненій, по исключеніи x, y, z, имѣемъ:

$$\varrho^4 . S\frac{m^2\omega^2}{(\omega^2-a^2)^2} - 2\varrho^2 . \left\{ S\frac{\omega^2 m^2 a^2}{(\omega^2-a^2)^2} + \frac{1}{2} \right\} + S\frac{\omega^2 a^4 m^2}{(\omega^2-a^2)^2} = 0. \quad (45)$$

Отсюда опредѣлимъ ϱ, а по (44) x, y, z. Но лучше употребить пріемъ Lamé.

IV.

О ПОСТРОЕНІИ ПОЛЯРЪ

относительно плоскихъ геометрическихъ кривыхъ линій.

К. А. Андреева.

---

1. Ученіе о полярахъ есть безспорно одинъ изъ важнѣйшихъ отдѣловъ въ теоріи геометрическихъ кривыхъ линій. Настоящее изслѣдованіе есть попытка внести въ этотъ отдѣлъ небольшой вкладъ, имѣющій чисто геометрическій характеръ и состоящій въ разысканіи построеній, посредствомъ которыхъ могутъ быть находимы геометрически поляры какой-либо точки относительно кривыхъ линій на плоскости.

Если мы имѣемъ на плоскости нѣкоторую геометрическую кривую C порядка n, уравненіе которой въ однородныхъ координатахъ есть

$$f(x, y, z) = 0,$$

и если кромѣ того намъ дана на плоскости точка m, которой однородныя координаты суть x', y', z', то, какъ извѣстно, кривая порядка $(n-1)$, называемая *первою полярой* точки m относительно кривой C, будетъ выражаться уравненіемъ

$$x'\frac{df(x,y,z)}{dx} + y'\frac{df(x,y,z)}{dy} + z'\frac{df(x,y,z)}{dz} = 0.$$

Первую часть этого уравненія мы будемъ сокращенно обозначать чрезъ $\Delta f(x, y, z)$ или просто Δf.

Первая поляра точки m относительно первой поляры есть кривая порядка $(n-2)$. Она называется *второю полярой* точки m относительно кривой C. Уравненіе второй поляры есть $\Delta\Delta f = 0$ или сокращенно $\Delta^2 f = 0$.

Первая поляра точки m относительно второй поляры есть ея *третья поляра* относительно кривой C. Уравненіе третьей поляры можетъ быть представлено въ видѣ $\Delta^3 f = 0$ и т. д.

Послѣдняя или $(n-1)$-ая поляра точки m относительно кривой C есть прямая линія, а потому называется также *прямолинейною полярой*. Извѣстно, что уравненіе ея $\Delta^{(n-1)} f = 0$ можетъ быть получено изъ уравненія первой поляры $\Delta f = 0$ посредствомъ простой замѣны въ немъ перемѣнныхъ x, y, z постоянными x', y', z', и обратно. На этомъ основаніи мы будемъ изображать это уравненіе сокращенно въ видѣ $\nabla f = 0$[1].

2. Условившись въ такомъ обозначеніи, укажемъ на нѣкоторыя свойства поляръ относительно совокупности геометрическихъ кривыхъ линій, разсматриваемой какъ кривая высшаго порядка. Свойства эти послужатъ основаніемъ нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій.

Если кривая C, уравненіе которой есть

$$f(x, y, z) = 0,$$

состоитъ изъ совокупности двухъ кривыхъ C_1 и C_2, выражаемыхъ отдѣльно уравненіями

$$f_1(x, y, z) = 0 \text{ и } f_2(x, y, z) = 0,$$

то должно быть

[1] Объ основныхъ свойствахъ поляръ съ точки зрѣнія ихъ аналитическаго опредѣленія см. *Salmon*, «Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven», bearb. v. *Fiedler*. Leipzig, 1873, стр. 56 и сл.

$$f(x, y, z) = f_1(x, y, z) . f_2(x, y, z),$$

откуда

$$\Delta f = f_1 \Delta f_2 + f_2 . \Delta f_1$$

и, замѣняя здѣсь x, y, z послѣдовательно чрезъ x', y', z', и обратно

$$\nabla f = f_1 . \nabla f_2 + f_2 . \nabla f_1 .$$

Слѣдовательно, уравненіе первой поляры относительно совокупности кривыхъ C_1 и C_2 будетъ таково:

$$f_1 . \Delta f_2 + f_2 . \Delta f_1 = 0, \tag{1}$$

а уравненіе прямолинейной поляры таково:

$$f_1 . \nabla f_2 + f_2 . \nabla f_1 = 0. \tag{2}$$

Въ послѣднемъ уравненіи множители f_1 и f_2 въ обоихъ членахъ первой части суть постоянные, а множители ∇f_1 и ∇f_2 суть первыя части уравненій прямолинейныхъ поляръ относительно кривыхъ C_1 и C_2. На этомъ основаніи форма послѣдняго уравненія убѣждаетъ насъ въ справедливости слѣдующаго предложенія.

Прямолинейная поляра какой-либо точки относительно совокупности двухъ кривыхъ проходитъ чрезъ точку пересѣченія прямолинейныхъ поляръ той-же точки относительно этихъ кривыхъ въ-отдѣльности.

Если линія C_2 есть прямая и, слѣдовательно, уравненіе $f_2 = 0$ есть первой степени, то уравненіе $\nabla f_2 = 0$ тождественно съ $f_2 = 0$. Вслѣдствіе этого, какъ частный случай предыдущаго предложенія, получается слѣдующее.

Прямолинейная поляра какой-либо точки относительно совокупности кривой линіи съ прямою проходитъ чрезъ точку пересѣченія этой прямой съ прямолинейною полярой той-же точки относительно кривой линіи.

3. Заключенія, подобныя сдѣланнымъ о прямолинейныхъ полярахъ, могутъ быть выведены и для первыхъ поляръ, если будемъ исходить изъ уравненія (1).

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ уравненіи два слагаемыхъ первой части, будучи многочленами степени $(n-1)$, могутъ быть разсматриваемы какъ первыя части двухъ другихъ уравненій, изъ которыхъ одно представляетъ совокупность кривой C_1 съ первою полярой относительно кривой C_2, а другое совокупность кривой C_2 съ первою полярой относительно C_1. На этомъ основаніи мы изъ самой формы уравненія (1) усматриваемъ слѣдующее.

Первая поляра какой-либо точки относительно совокупности двухъ кривыхъ проходитъ чрезъ точки пересѣченія двухъ другихъ кривыхъ, изъ которыхъ одна есть совокупность первой изъ данныхъ кривыхъ съ первою полярой той же точки относительно второй кривой, а другая — совокупность второй изъ данныхъ кривыхъ съ первою полярой относительно первой кривой.

Въ частномъ случаѣ, когда линія C_2 есть прямая, множитель Δf_2 въ уравненіи (1) есть постоянный. Вслѣдствіе этого предыдущеее предложеніе превращается для этого случая въ слѣдующее.

Первая поляра какой-либо точки относительно совокупности кривой линіи съ прямою проходитъ чрезъ точки пересѣченія двухъ кривыхъ, изъ которыхъ одна есть данная кривая, а другая — совокупность данной прямой съ первою полярой той-же точки относительно данной кривой.

4. Положимъ, что мы имѣемъ двѣ кривыя линіи C' и C'' одного и того-же порядка n и пусть однородныя уравненія этихъ кривыхъ будутъ

$$f'(x, y, z) = 0 \text{ и } f''(x, y, z) = 0.$$

Допустимъ сверхъ того, что прямолинейныя поляры нѣкоторой точки m, которой координаты суть x', y', z', относительно этихъ кривыхъ совпадаютъ, т. е. что уравненія:

$$\nabla f' = \frac{df'}{dx'}x + \frac{df'}{dy'}y + \frac{df'}{dz'}z = 0$$

и $$\nabla f'' = \frac{df''}{dx'}x + \frac{df''}{dy'}y + \frac{df''}{dz'}z = 0$$

представляютъ одну и ту-же прямую.

Въ такомъ случаѣ, означая чрезъ k нѣкоторое постоянное, будемъ имѣть, при всякомъ значеніи перемѣнныхъ x, y, z,

$$\nabla f' = k\nabla f'' \tag{3}$$

и слѣдовательно

$$\frac{df'}{dx'} = k\frac{df''}{dx'}, \quad \frac{df'}{dy'} = k\frac{df''}{dy'}, \quad \frac{df'}{dz'} = k\frac{df''}{dz'}.$$

Помножая эти равенства послѣдовательно на x', y', z' и складывая результаты, получимъ на основаніи извѣстнаго свойства однородныхъ функцій:

$$f'(x', y', z') = kf''(x', y', z'). \tag{4}$$

Возьмемъ теперь еще какую-нибудь кривую E, которой уравненіе есть $F(x, y, z) = 0$.

Уравненія прямолинейныхъ поляръ точки m относительно совокупностей кривыхъ $C'E$ и $C''E$ будутъ, какъ мы видѣли:

$$f'.\nabla F + F.\nabla f' = 0$$

$$f''.\nabla F + F.\nabla f'' = 0.$$

На основаніи равенствъ (3) и (4) убѣждаемся, что первыя части этихъ двухъ уравненій различаются только постояннымъ множителемъ k. Слѣдовательно, прямыя, выражаемыя этими уравненіями, совпадаютъ. Такимъ образомъ получаемъ предложеніе:

Если прямолинейныя поляры нѣкоторой точки относительно двухъ кривыхъ одного и того-же порядка совпадаютъ, то и прямолинейныя поляры той-же точки относительно двухъ совокупностей каждой изъ этихъ кривыхъ съ какой бы ни было третьей также совпадаютъ.

5. Пусть $f(x, y, z) = 0$ и $F(x, y, z) = 0$ будутъ уравненія двухъ кривыхъ одного и того-же порядка n. Положимъ, что точки пересѣченія обѣихъ этихъ кривыхъ съ прямою $z = 0$ суть однѣ и тѣ-же. Въ такомъ случаѣ, означая чрезъ k нѣкоторое постоянное, будемъ имѣть:

$$f(x, y, 0) = kF(x, y, 0),$$

каковы бы ни были перемѣнныя x и y.

Отсюда заключаемъ, что при условіи $z = 0$ должны быть справедливы слѣдующія равенства:

$$\frac{df}{dx} = k\frac{dF}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{df}{dy} = k\frac{dF}{dy}.$$

Уравненія первыхъ поляръ какой-либо точки m, которой координаты суть x', y', z', относительно разсматриваемыхъ кривыхъ таковы:

$$\Delta f = x'\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + z'\frac{df}{dz} = 0$$

$$\Delta F = x'\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz} = 0.$$

Изъ нихъ находимъ

$$\Delta f - k\Delta F = x'\left(\frac{df}{dx} - k\frac{dF}{dx}\right) + y'\left(\frac{df}{dy} - k\frac{dF}{dy}\right) + z\left(\frac{df}{dz} - k\frac{dF}{dz}\right).$$

Полагая здѣсь $z = 0$, получимъ на основаніи предыдущихъ равенствъ:

$$\Delta f - k\Delta F = z'\left(\frac{df}{dz} - k\frac{dF}{dz}\right).$$

Если точка m сама находится на прямой $z=0$, то должно быть $z'=0$ и изъ послѣдняго равенства получимъ:

$$\Delta f(x, y, 0) = k\Delta F(x, y, 0),$$

каковы бы ни были значенія перемѣнныхъ x, y.

Это значитъ, что точки пересѣченія обѣихъ первыхъ поляръ $\Delta f = 0$ и $\Delta F = 0$ съ прямою $z = 0$ суть однѣ и тѣ-же.

Такъ-какъ предыдущія разсужденія относятся къ самому общему виду уравненій разсматриваемыхъ кривыхъ, то сказанное о прямой $z=0$ должно быть справедливо и для всякой другой прямой на плоскости. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующее предложеніе.

Если точки пересѣченія какой-нибудь прямой съ двумя кривыми одного и того-же порядка суть однѣ и тѣ-же, то и точки пересѣченія этой прямой съ первыми полярами какой-либо ея точки относительно этихъ двухъ кривыхъ суть однѣ и тѣ-же.

На основаніи указанной выше зависимости между послѣдовательными полярами одной и той же точки заключаемъ, что послѣднее предложеніе должно быть справедливо не только для первыхъ поляръ, но и для всякихъ другихъ поляръ одного и того-же порядка, слѣдовательно и для прямолинейныхъ.

6. Воспользуемся предыдущими выводами для рѣшенія слѣдующихъ задачъ.

Задача 1-я. — *Найти прямолинейную поляру данной точки относительно совокупности n прямыхъ линій, разсматриваемой какъ одна кривая порядка n.*

Допустимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе задачи для случая, когда n на единицу менѣе даннаго.

Пусть A_1, A_2, A_3,.... A_n будутъ прямыя, составляющія данную совокупность, а m точка, поляру которой требуется найдти.

Найдемъ сперва двѣ прямолинейныя поляры P_1 и P_2 точки

m относительно совокупностей $(n-1)$ прямыхъ $A_2\,A_3\ldots\ldots A_n$ и $A_1\,A_3\ldots\ldots A_n$.

На основанiи предложенiя параграфа 2 искомая прямолинейная поляра должна проходить чрезъ точку пересѣченiя прямыхъ A_1 и P_1 такъ-же какъ и чрезъ точку пересѣченiя прямыхъ A_2 и P_2. Слѣдовательно, этими двумя точками она будетъ вполнѣ опредѣлена.

Такъ-какъ рѣшенiе настоящей задачи извѣстно для случая $n=2$ и въ этомъ случаѣ построенiе, представляющее это рѣшенiе, есть линейное, то заключаемъ изъ сказаннаго, что и во всѣхъ другихъ случаяхъ задача рѣшается посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго линейнаго построенiя[1].

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, между прочимъ, что если всѣ прямыя, составляющiя данную совокупность, проходятъ чрезъ одну и ту-же точку, то и прямолинейная поляра какой бы ни было точки плоскости проходитъ чрезъ ту-же точку. Если же всѣ данныя прямыя совпадаютъ между собою въ одну прямую, то и прямолинейная поляра всякой точки плоскости совпадаетъ съ этою прямой.

Приведенное общее рѣшенiе разсматриваемой задачи непримѣнимо къ первому изъ названныхъ сейчасъ частныхъ случаевъ. Но этотъ частный случай весьма просто приводится къ общему помощiю слѣдующаго построенiя.

Чрезъ данную точку m проводимъ какую-нибудь прямую L и затѣмъ чрезъ точки пересѣченiя этой прямой съ прямыми $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ проводимъ прямыя $B_1, B_2, B_3\ldots\ldots B_n$ такъ, чтобы онѣ не сходились въ одну точку. Найдя за-

---

[1] Линейнымъ построенiемъ мы называемъ такое, которое выполняется помощiю только линейки, т. е. нанесенiя на плоскость однѣхъ прямыхъ линiй.

О полярахъ относительно кривыхъ 2-го порядка см., напр., *Chasles*, «Traité des sections coniques». — Paris, 1865, n⁰ 98, 99, p. 76—79.—*Salmon-Fiedler*, «Analytische Geometrie der Kegelschnitte». 3-te Aufl. Leipzig, 1873, Art. 106—108, p. 135—141.

тѣмъ прямолинейную поляру Q точки m относительно совокупности послѣднихъ n прямыхъ, будемъ имѣть на основаніи предложенія парагр. 5, что искомая прямолинейная поляра той-же точки относительно совокупности прямыхъ $A_1, A_2, A_3, \ldots.$ A_n есть прямая, соединяющая точку пересѣченія прямыхъ L и Q съ точкой, въ которой сходятся всѣ прямыя $A_1, A_2 \ldots$

Такимъ-же образомъ рѣшается задача и для того еще болѣе частнаго случая, когда изъ n данныхъ прямыхъ $(n-1)$ совпадаютъ между собою[1].

7. Задача 2-я. *Предполагая, что намъ извѣстна прямолинейная поляра одной изъ точекъ плоскости относительно нѣкоторой кривой порядка $(n-1)$, найдти прямолинейную поляру той-же точки относительно совокупности этой кривой съ данною прямою, разсматриваемой какъ кривая порядка n.*

Пусть P будетъ поляра данной точки m относительно разсматриваемой кривой порядка $(n-1)$ и D данная прямая. Такъ-какъ прямая P есть въ то-же время прямолинейная поляра относительно совокупности $(n-1)$ прямыхъ, съ нею совпадающихъ, то, на основаніи предложенія парагр. 4, искомая поляра относительно совокупности кривой съ прямою D есть въ то-же время прямолинейная поляра относительно совокупности n прямыхъ, изъ которыхъ одна есть D, а остальныя $(n-1)$ совпадаютъ съ P. Задача сводится такимъ образомъ на только что указанный частный случай предыдущей задачи.

---

[1] Замѣтимъ, что прямолинейная поляра относительно совокупности прямыхъ линій есть то-же самое, что Poncelet, въ своемъ мемуарѣ «Théorie générale des centres de moyennes harmoniques», называетъ осью гармоническихъ срединъ (см. *Poncelet*, «Traité des propriétés projectives des figure». 2 édition, Paris, 1866, p. 41). Въ этомъ мемуарѣ дано также и геометрическое рѣшеніе настоящей задачи или, вѣрнѣе сказать, задачи взаимной съ настоящею (ibid. p. 34, 35, n° 33—36).

8. Задача 3-я. *Предполагая, что намъ извѣстна прямолинейная поляра одной изъ точекъ плоскости относительно нѣкоторой кривой порядка $(n-1)$, а также прямолинейная поляра той-же точки относительно совокупности этой кривой съ неизвѣстною прямою, найдти эту прямую.*

Пусть m будетъ данная точка, P ея поляра относительно кривой и Q ея поляра относительно совокупности кривой съ неизвѣстною прямою X. Послѣдняя должна проходить чрезъ точку пересѣченія прямыхъ P и Q. Проведя чрезъ эту точку три произвольныя прямыя D_1, D_2, D_3, мы можемъ найдти, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, прямолинейныя поляры Q_1, Q_2, Q_3 точки m относительно совокупностей каждой изъ этихъ прямыхъ съ кривою. Такъ-какъ эти три совокупности, а также совокупность искомой прямой X съ кривою составляютъ пучекъ четырехъ кривыхъ порядка n, то поляры точки m относительно ихъ должны составлять также пучекъ и притомъ проективно соотвѣтственный съ первымъ. Отсюда слѣдуетъ, что искомая прямая X опредѣлится весьма простымъ линейнымъ построеніемъ изъ условія:

$$(X D_1 D_2 D_3) = (Q Q_1 Q_2 Q_3)^1$$

9. Между геометрическими кривыми высшихъ порядковъ особеннаго вниманія заслуживаютъ такія, которыя обладаютъ кратными точками, коихъ степень кратности единицею менѣе порядка кривой. Такова вообще кривая порядка n, имѣющая кратную точку порядка $(n-1)$. Всѣ такія кривыя принад-

---

[1] Это условіе есть равенство сложныхъ или ангармоническихъ отношеній. О проективномъ соотвѣтствіи пучковъ и рядовъ и о построеніи соотвѣтственныхъ элементовъ этихъ геометрическихъ формъ см. напр. изв. сочин. *Steiner*, «Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf project. Eigensch.» 2-е Aufl. Leipzig. 1876. p. 1—24.

лежатъ къ разряду такъ-называемыхъ уникурсальныхъ, или раціональныхъ кривыхъ, т. е. такихъ, для которыхъ разность между наибольшимъ числомъ двойныхъ точекъ, возможнымъ при данномъ порядкѣ, и числомъ двойныхъ точекъ, равнозначущимъ съ совокупностью кратныхъ точекъ, имѣющихся въ дѣйствительности, равняется нулю[1].

Причина, по которой названный частный видъ кривыхъ мы считаемъ заслуживающимъ особаго вниманія геометровъ, заключается, съ одной стороны, въ значительной простотѣ ихъ изслѣдованія, а съ другой въ томъ, что многія ихъ свойства находятся въ опредѣленной, болѣе или менѣе легко обнаруживаемой зависимости со свойствами кривыхъ болѣе общихъ. Вслѣдствіе этого на изученіе такого рода кривыхъ можно смотрѣть какъ на подготовительное къ изученію геометрическихъ кривыхъ вообще. Результаты настоящаго изслѣдованія подтвердятъ на дѣлѣ такое воззрѣніе.

10. Рѣшимъ нѣсколько задачъ, относящихся къ указанному роду кривыхъ.

Задача 4-я. *Построить кривую порядка n по даннымъ ея одной кратной точкѣ порядка $(n-1)$ и $2n$ простымъ точкамъ.*

Задача эта была давно уже рѣшена нѣсколькими геометрами[2]. Различныя ея рѣшенія приводятъ, собственно говоря, къ одному и тому-же всегда линейному построенію и различаются только руководящими разсужденіями, употребляемыми для этой цѣли.

---

[1] См. *Salmon-Fiedler,* «Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven». Leipzig. 1873, Art. 43, 44, p. 34, 35.

[2] *Seydevitz,* «Darstellung der geometrischen Verwandtschaft». Grunert's Archiv, T. VII, 1845, p. 137.

E. de Jonquières, «Essai sur la génération des courbes géométriques». Paris, 1858, nº 58, p. 55, 56 (Extrait du tome XVI des Mémoires présentés par divers savants à l'ac. des sc.).

Ed. Weyr, «Analytische Untersuchung der quadratische Verwandtschaft». Zeit-

Мы приводимъ здѣсь наше рѣшеніе единственно въ виду той связи, которую имѣетъ настоящая задача съ слѣдующими, коихъ рѣшеніе, сколько намъ извѣстно, до сихъ поръ не было дано.

Прежде всего замѣтимъ, что подъ словами *построить кривую* слѣдуетъ понимать требованіе, найдти построеніемъ сколь угодно большое число принадлежащихъ кривой точекъ и притомъ сколь угодно близкихъ между собою. При такомъ пониманіи требованія задачи она сводится, очевидно, на отысканіе точки, въ которой кривая пересѣкается какою - либо прямою, проходящею чрезъ ея данную кратную точку.

Допустимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе задачи для случая, когда порядокъ кривой n на единицу менѣе даннаго.

Пусть o будетъ данная кратная точка кривой и a_1, a_2, a_3, ... a_{2n} данныя ея простыя точки. Проведемъ чрезъ o произвольную прямую L и будемъ отыскивать на ней точку, въ которой она еще разъ встрѣчаетъ кривую.

Назовемъ чрезъ A_1, A_2, A_3, A_4 прямыя, соединяющія точку o съ точками a_1, a_2, a_3, a_4, и чрезъ C_2, C_3, C_4 три кривыя порядка $(n-1)$, изъ которыхъ каждая имѣетъ въ o кратную точку порядка $(n-2)$ и изъ которыхъ первая проходитъ чрезъ точки a_3, a_4, a_5 .... a_{2n}, вторая чрезъ точки a_2, a_4, a_5 .... a_{2n} и третья чрезъ точки a_2, a_3, a_5 .... a_{2n}. Этими данными кривыя эти опредѣляются вполнѣ, и по предположенію мы можемъ найдти точки l_2, l_3, l_4, въ которыхъ онѣ пересѣкаютъ прямую L. Точно такъ - же мы можемъ найдти точки k_2, k_3, k_4 пересѣченія этихъ кривыхъ съ прямою A_1.

---

schrift für Math. und Phys. T. XIV, 1869, p. 477.

Въ сочиненіи «О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ» (Москва. 1879, стр. 65—67) нами было предложено рѣшеніе задачи: «Построить уникурсальную кривую, опредѣляемую достаточнымъ числомъ ея точекъ, въ числѣ которыхъ находятся всѣ кратныя». Настоящая задача есть только частный случай этой послѣдней.

Совокупность кривой C_2 съ прямою A_2 представляетъ кривую порядка n, имѣющую въ o кратную точку порядка $(n-1)$. Такія-же точно кривыя представляютъ совокупности кривой C_3 съ прямою A_3 и кривой C_4 съ прямою A_4. Такъ-какъ всѣ эти три кривыя, будучи порядка n, проходятъ чрезъ всѣ точки, опредѣляющія вполнѣ искомую кривую, исключая одной точки a_1, то онѣ составляютъ пучекъ, которому принадлежитъ и искомая кривая. Вслѣдствіе этого ряды точекъ, въ которыхъ двѣ прямыя L и A_1 пересѣкаются кривыми этого пучка, должны быть проективно соотвѣтственными и потому, называя чрезъ x точку, въ которой искомая кривая пересѣкаетъ прямую L, будемъ имѣть, что эта точка опредѣлится изъ условія

$$(x\ l_2\ l_3\ l_4) = (a_1\ k_2\ k_3\ k_4).$$

Изъ этого условія точка x находится посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго линейнаго построенія.

Такъ-какъ извѣстно рѣшеніе разсматриваемой задачи для случая, когда $n=2$, то изъ сказаннаго получается ея рѣшеніе при какомъ угодно n.

11. Задача 5-я. *Построить прямолинейную поляру данной точки m относительно кривой порядка n, имѣющей въ нѣкоторой точкѣ o кратную точку порядка $(n-1)$ и проходящей еще чрезъ данныя $2\,n$ точекъ.*

Сохраняя обозначенія предыдущаго параграфа, назовемъ сверхъ того чрезъ P_1 прямолинейную поляру точки m относительно совокупности кривой C_2 съ прямою A_2. Если допустимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе настоящей задачи для случая, когда n на единицу менѣе даннаго, то можемъ считать извѣстною прямолинейную поляру точки m относительно кривой C_2. Зная же эту поляру, мы найдемъ линейнымъ построеніемъ и прямую P_2, какъ это показано въ параграфѣ 7.

Такимъ-же точно образомъ могутъ быть найдены и прямолинейныя поляры P_3 и P_4 точки m относительно совокупностей кривой C_3 съ прямою A_3 и кривой C_4 съ прямою A_4.

Такъ-какъ прямолинейныя поляры одной и той-же точки относительно кривыхъ, составляющихъ пучекъ, образуютъ также пучекъ проективно соотвѣтственный съ первымъ, то, называя чрезъ X искомую прямолинейную поляру, будемъ имѣть, что она опредѣляется изъ условія

$$(X\,P_2\,P_3\,P_4) = (a_1\,k_2\,k_3\,k_4).$$

На основаніи этого условія прямая X найдется посредствомъ опредѣленнаго линейнаго построенія, и такъ-какъ извѣстно таковое-же построеніе, рѣшающее задачу для случая, когда $n=2$, то она является рѣшенною, на основаніи сказаннаго, и для всякаго другого значенія n.

12. Задача 6-я. *Построить первую поляру данной точки m относительно кривой порядка n, имѣющей въ нѣкоторой точкѣ o кратную точку порядка $(n-1)$ и проходящей еще чрезъ $2n$ точекъ.*

Искомая поляра есть кривая порядка $(n-1)$, имѣющая въ o кратную точку порядка $(n-2)$[1]. Вслѣдствіе этого требованіе настоящей задачи сводится, на основаніи сказаннаго выше, на отысканіе на произвольной прямой L, исходящей изъ o, такой точки x, въ которой эта прямая встрѣчаетъ искомую поляру.

Назовемъ чрезъ M прямую, соединяющую точки o и m, и найдемъ, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, прямолинейныя поляры относительно данной кривой для трехъ какихъ-нибудь точекъ x_1, x_2, x_3 прямой L. Пусть m_1, m_2, m_3 будутъ точки пересѣченія этихъ поляръ съ прямою M.

---

[1] См. *Salmon-Fiedler*, «Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven». Art. 62, p. 60.

Такъ-какъ первыя поляры относительно всякой кривой, для ряда точекъ, лежащихъ на прямой линіи, составляютъ пучекъ проективно соотвѣтственный съ этимъ рядомъ[1], и такъ-какъ первыя поляры точекъ m_1, m_2, m_3 должны проходить послѣдовательно чрезъ x_1, x_2, x_3, то заключаемъ, что точка x пересѣченія прямой L съ искомою полярой опредѣлится изъ условія:

$$(x\ x_1\ x_2\ x_3) = (m\ m_1\ m_2\ m_3).$$

Когда найдено достаточное число точекъ первой поляры для того, чтобы эта кривая была ими опредѣлена вполнѣ, то по тѣмъ-же правиламъ найдется вторая поляра точки m, затѣмъ третья и т. д.

Такимъ образомъ видимъ, что всѣ поляры какой бы ни было точки относительно данной кривой порядка n, имѣющей кратную точку порядка $(n-1)$, находятся посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго линейнаго построенія.

13. Задача 7-я. *Нѣкоторая кривая порядка n имѣетъ въ точкѣ o кратную точку порядка $(n-1)$. На прямой L, проходящей чрезъ эту кратную точку, извѣстны еще двѣ точки p и p', изъ которыхъ вторая лежитъ на прямолинейной полярѣ первой относительно кривой. Требуется найдти точку, въ которой прямая L еще разъ пересѣкаетъ кривую.*

Двѣ такія точки какъ p и p', изъ которыхъ вторая принадлежитъ прямолинейной полярѣ первой и слѣдовательно первая первой полярѣ второй, мы будемъ называть *сопряженными*.

Обозначимъ чрезъ x искомую точку кривой. Чрезъ точку o проведемъ $(n-1)$ различныхъ прямыхъ A_1, A_2, ... $A_{(n-1)}$ и чрезъ точку p' какую-нибудь прямую P. Если затѣмъ по-

[1] Ibid. Art. 61, p. 59.

строимъ такую прямую A_n, что относительно совокупности n прямыхъ $A_1, A_2, \ldots A_n$ прямая P есть поляра точки p (какъ это показано въ парагр. 8), то искомая точка x опредѣлится пересѣченіемъ прямыхъ A_n и L [1].

14. Задача 8-я. *Двѣ кривыя C_1 и C_2 порядка n имѣютъ въ данной точкѣ o общую кратную точку порядка $(n-1)$ и каждая изъ нихъ опредѣляется сверхъ того достаточнымъ числомъ $(2n)$ простыхъ точекъ. Требуется построить кривую X, принадлежащую пучку $(C_1\, C_2)$ и проходящую чрезъ данную точку a.*

Искомая кривая, очевидно, должна имѣть въ точкѣ o также кратную точку порядка $(n-1)$, а потому вопросъ сводится на отысканіе точки x, въ которой эта кривая пересѣкается еще разъ произвольною прямою L, исходящею изъ o.

Положимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе настоящей задачи для случая, когда n на единицу менѣе даннаго.

Пусть Q_1 и Q_2 будутъ первыя поляры точки a относительно кривыхъ C_1 и C_2. Согласно сказанному въ парагр. 12, мы можемъ найдти сколько угодно точекъ этихъ поляръ. Такъ-какъ первая поляра точки a относительно искомой кривой X должна проходить чрезъ эту точку [2] и принадлежать пучку $(Q_1\, Q_2)$, то по предположенію мы ее также можемъ считать извѣстною. Пусть p будетъ точка пересѣченія ея съ прямою L. Найдя построеніемъ, указаннымъ въ парагр. 11, прямолинейныя поляры P_1 и P_2 точки p относительно кривыхъ C_1 и C_2, мы будемъ имѣть, что прямолинейная поляра той-же точки отно-

---

[1] Четыре точки o, p, p', x на прямой L связаны между собою условіемъ $\frac{n}{pp'} = \frac{n-1}{po} + \frac{1}{px}$ или, что все то-же, условіемъ $(x\ p'\ o\ p) = n$ и потому всякими тремя изъ нихъ опредѣляется единственное положеніе четвертой. См. мемуаръ *Poncelet*, «Théorie générale des centres de moyennes harmoniques». § II.

[2] *Salmon-Fiedler*, — указан. выше соч. Art. 64, p. 61, 62.

сительно искомой кривой X опредѣлится какъ принадлежащая пучку $(P_1\ P_2)$ и проходящая чрезъ a. Пусть p' будетъ точка пересѣченія этой прямой съ прямою L. На послѣдней мы нашли, слѣдовательно, двѣ точки p и p' сопряженныя относительно искомой кривой X. По нимъ найдется, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, и точка x, въ которой L пересѣкаетъ искомую кривую.

Такъ-какъ настоящая задача рѣшается весьма просто посредствомъ линейнаго построенія въ случаѣ, когда $n = 2$[1], то заключаемъ изъ сказаннаго, что тѣми-же средствами она рѣшается и для всякаго n.

Изъ сказаннаго въ парагр. 11 и 12 слѣдуетъ, что вполнѣ опредѣленнымъ линейнымъ же построеніемъ можетъ быть построена и всякая поляра какой бы ни было точки плоскости относительно кривой X.

15. Вопросы, рѣшенные выше для кривыхъ линій порядка n, имѣющихъ кратныя точки порядка $(n-1)$, могутъ послужить намъ основаніемъ для рѣшенія подобныхъ же вопросовъ по отношенію къ самымъ общимъ кривымъ какого бы ни было порядка, а также для вывода нѣкоторыхъ заключеній болѣе или менѣе полезныхъ для геометрической теоріи этихъ кривыхъ.

Средства для установленія необходимой въ этихъ видахъ зависимости между общими геометрическими кривыми и кривыми, о которыхъ говорилось выше, усматриваются въ слѣдующемъ.

Положимъ, что намъ дана на плоскости какая-нибудь кривая S порядка n. Возьмемъ на нѣкоторой прямой L двѣ точки p и p', сопряженныя относительно S, т. е. такія, что прямолинейная поляра точки p проходитъ чрезъ p' и, слѣдовательно, первая поляра точки p' проходитъ чрезъ p. Относительное положеніе этихъ двухъ точекъ находится въ опредѣленной зави-

---

[1] *Poncelet*, «Traité des propriétés projectives des figures». 2-e éd. 1865, T I. n° 389, p. 206.

симости отъ кривой S и, перемѣщая эти точки по прямой L, мы, очевидно, получимъ на послѣдней два ряда точекъ, связанные посредствомъ кривой S такимъ соотвѣтствіемъ, что каждой точкѣ p перваго ряда соотвѣтствуетъ единственная точка p' второго и каждой точкѣ p' второго $(n-1)$ точекъ p перваго.

Если точки перваго ряда мы будемъ соединять прямыми линіями съ нѣкоторою точкой o, а точки второго ряда съ другою точкой b, то получимъ два пучка прямыхъ, лучи которыхъ будутъ связаны зависимостью такого-же точно рода. Мѣстомъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей этихъ пучковъ будетъ, какъ извѣстно, нѣкоторая опредѣленная кривая C порядка n, проходящая чрезъ b и имѣющая въ o кратную точку порядка $(n-1)$[1].

Если положимъ, что a есть одна изъ точекъ пересѣченія кривой S съ прямой L, то, замѣчая, что въ ней должны совпадать двѣ соотвѣтственныя точки рядовъ p и p', будемъ имѣть, что въ ней пересѣкаются соотвѣтственные лучи пучковъ o и b. Это значитъ, что a есть также точка пересѣченія кривой C съ прямою L.

Слѣдовательно, кривыя S и C имѣютъ однѣ и тѣ-же точки пересѣченія съ прямою L.

Положимъ теперь, что намъ даны три какія-нибудь кривыя S, T, U порядка n и нѣкоторая прямая L. Взявъ двѣ произвольныя точки o и b, мы будемъ имѣть, что посредствомъ данныхъ кривыхъ опредѣляются такимъ-же образомъ, какъ сказано выше, три новыя кривыя того-же порядка, проходящія чрезъ b, имѣющія въ o кратную точку порядка $(n-1)$ и пересѣкающія прямую L послѣдовательно въ тѣхъ-же точкахъ какъ и кривыя S, T, U. Пусть эти новыя кривыя будутъ послѣдовательно C, D, E.

[1] См., напр., соч. автора — «О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ». Москва. 1879 г. стр. 37.

Не трудно убѣдиться, что, если кривыя S, T, U составляютъ пучекъ, то и кривыя C, D, E составляютъ пучекъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть k будетъ одна изъ точекъ пересѣченія кривыхъ C и D. Въ такомъ случаѣ точки p и p', въ которыхъ прямая L будетъ пересѣкаться послѣдовательно прямыми ok и bk, будутъ таковы, что прямолинейныя поляры точки p относительно двухъ кривыхъ S и T будутъ проходить чрезъ p'. Но такъ-какъ по предположенію кривыя S, T, U составляютъ пучекъ, то и прямолинейная поляра точки p относительно U должна проходить чрезъ p'. Отсюда слѣдуетъ, что прямыя op и bp' должны пересѣкаться также по кривой E.

И такъ, точка k принадлежитъ всѣмъ тремъ кривымъ C, D, E, что и доказываетъ, что кривыя эти составляютъ пучекъ.

16. Изъ сказаннаго обнаруживается непосредственно весьма простой способъ рѣшить слѣдующую задачу.

Задача 9-я.—Предполагая, что для каждой точки плоскости мы имѣемъ возможность найдти прямолинейныя поляры относительно двухъ какихъ-нибудь кривыхъ S и T порядка n, найдти прямолинейную поляру данной точки m относительно кривой U того-же порядка, принадлежащей пучку (ST) и проходящей чрезъ данную точку a.

Назовемъ чрезъ L прямую, проходящую чрезъ точки m и a, и пусть C, D, E будутъ три кривыя порядка n, изъ которыхъ каждая проходитъ чрезъ нѣкоторую произвольную точку b и имѣетъ въ нѣкоторой произвольной же точкѣ o кратную точку порядка $(n-1)$, и которыя при посредствѣ прямой L имѣютъ указанное въ предыдущемъ параграфѣ соотношеніе съ кривыми S, T, U.

Такъ-какъ для каждой точки прямой L мы можемъ по предположенію найдти прямолинейныя поляры относительно кривыхъ S и T, то это даетъ возможность при опредѣленномъ, хотя и произвольномъ, выборѣ точекъ o и b найдти сколько угодно остальныхъ точекъ кривыхъ C и D. Эти двѣ кривыя можно, слѣдовательно, считать вполнѣ опредѣленными посредствомъ ихъ общей кратной точки o и достаточнаго числа простыхъ точекъ.

Что-же касается кривой E, то и она, очевидно, будетъ вполнѣ опредѣлена тѣмъ, что должна принадлежать пучку (CD) и проходить чрезъ точку a, въ которой она пересѣкается съ прямою L и кривою U. Способомъ, указаннымъ въ параграфѣ 14, мы можемъ найдти прямолинейную поляру точки m относительно кривой E. Пусть m' будетъ точка пересѣченія этой поляры съ прямою L.

Чрезъ точку m' должна проходить и искомая поляра M точки m относительно кривой U (см. парагр. 5).

Другая точка искомой поляры есть точка μ, въ которой пересѣкаются прямолинейныя поляры точки m относительно кривыхъ S и T и чрезъ которую проходятъ прямолинейныя поляры этой точки относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST).

Задача является такимъ образомъ вполнѣ рѣшенною въ томъ случаѣ, когда точки m' и μ различны.

Если случится, что точки m' и μ совпадаютъ, т. е., что три точки a, m и μ лежатъ на одной прямой, то рѣшеніе задачи нѣсколько усложняется и можетъ быть достигнуто слѣдующимъ образомъ.

Замѣнимъ данную точку m какою-нибудь точкою m_1. Очевидно, что послѣдняя всегда можетъ быть выбрана такъ, чтобы точка пересѣченія ея прямолинейныхъ поляръ относительно кривыхъ S и T не лежала на прямой am_1. Въ такомъ случаѣ указаннымъ сейчасъ способомъ мы можемъ найдти прямолинейную поляру M_1 точки m_1 относительно кривой U.

Назовемъ чрезъ L_1 прямую, проходящую чрезъ точки m и m_1 и пусть m_1' будетъ точка пересѣченія этой прямой съ прямою M_1.

При посредствѣ прямой L_1 опредѣлятся, очевидно, три кривыя C_1, D_1, E_1, проходящія чрезъ точку b, имѣющія въ o общую кратную точку порядка $(n-1)$ и находящіяся съ кривыми S, T, U въ такомъ-же соотношеніи, какъ кривая C, D, E при посредствѣ прямой L.

Изъ трехъ кривыхъ C_1, D_1, E_1 двѣ первыя въ силу условій задачи могутъ быть разсматриваемы какъ опредѣленныя при помощи ихъ общей кратной точки o и достаточнаго числа простыхъ точекъ. Что же касается третьей кривой E_1, то она опредѣляется вполнѣ тѣмъ, что должна принадлежать пучку $(C_1 D_1)$ и проходить чрезъ точку k, въ которой пересѣкаются прямыя om_1 и bm_1', потому что эти двѣ прямыя суть соотвѣтственные лучи пучковъ, образующихъ кривую E_1. Вслѣдствіе этого прямолинейная поляра точки m относительно кривой E_1 можетъ быть найдена извѣстнымъ намъ способомъ. Точка пересѣченія ея съ прямою L_1 будетъ принадлежать также искомой прямолинейной полярѣ точки m относительно кривой U. Слѣдовательно, мы получимъ искомую поляру, соединивъ эту точку пересѣченія съ точкою μ.

17. Предыдущая задача даетъ намъ возможность рѣшить слѣдующую.

Задача 10-ая. *Построить прямолинейную поляру какой-нибудь точки m относительно общей кривой порядка n, опредѣленной достаточнымъ числомъ ея точекъ.*

Допустимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе задачи для случая, когда n на единицу менѣе даннаго.

Отдѣлимъ отъ данныхъ точекъ кривой, число которыхъ, какъ извѣстно, должно быть $^1/_2 n(n+3)$[1], группу какихъ-нибудь $(n-1)$ точекъ и обозначимъ ихъ чрезъ a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1}. Число остальныхъ точекъ, которыя обозначимъ чрезъ b_1, b_2, b_3, ..., будетъ:

[1] *Salmon-Fiedler*,—указ. выше соч. Art. 27, p. 18.

$^1/_2 n(n+3)-(n-1)={}^1/_2(n-1)(n+2)+2={}^1/_2 n'(n'+3)+2$, гдѣ $n'=n-1$.

Слѣдовательно, число точекъ группы (b) на двѣ болѣе числа точекъ, необходимаго и достаточнаго для опредѣленія общей кривой порядка $(n-1)$.

Пусть D будетъ прямая, проходящая чрезъ двѣ какія-нибудь точки группы (b), и E кривая порядка $(n-1)$, опредѣляемая остальными точками этой группы. Совокупность кривой E съ прямою D представляетъ кривую порядка n, проходящую чрезъ всѣ точки группы (b). Назовемъ ее чрезъ C.

Такъ-какъ по предположенію построенія прямолинейной поляры всякой точки относительно кривой E можно считать извѣстнымъ, то, на основаніи сказаннаго въ параг. 7, мы должны считать извѣстнымъ и построеніе прямолинейной поляры всякой точки относительно кривой C.

Очевидно, что такихъ кривыхъ порядка n, изъ которыхъ каждая проходитъ чрезъ всѣ точки группы (b) и въ то-же время состоитъ изъ совокупности кривой порядка $(n-1)$ съ прямою, существуетъ столько, сколько возможно сдѣлать сочетаній изъ точекъ этой группы по двѣ [1]. Это число есть

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)(n+2)}{2}+2\right]\left[\frac{(n-1)(n+2)}{2}+1\right]=\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8};$$

оно всегда болѣе n.

Сказанное сейчасъ о кривой C относится къ каждой изъ такихъ кривыхъ.

Возьмемъ какія-нибудь n изъ этихъ кривыхъ и назовемъ ихъ чрезъ $C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots C_n$.

Назовемъ далѣе чрезъ $C_1', C_2', C_3', \ldots\ldots C'_{n-1}$ кривыя порядка n, принадлежащія послѣдовательно пучкамъ $(C_1\, C_n)$, $(C_2\, C_n)$, $(C_3\, C_n), \ldots\ldots (C_{n-1}\, C_n)$ и проходящія чрезъ точку a_1.

---

[1] Исключеніе представляетъ только случай $n=2$, въ которомъ число такихъ совокупностей есть 3, тогда какъ число сочетаній изъ 4 по 2 есть 6.

Назовемъ затѣмъ чрезъ C_1'', C_2'', C_3'',.... C''_{n-2} кривыя, принадлежащія послѣдовательно пучкамъ $(C_1' C'_{n-1})$, $(C_2' C'_{n-1})$, $(C_3' C'_{n-1})$, ... $(C'_{n-2}\ C'_{n-1})$ и проходящія чрезъ точку a_2 и т. д.

Мы будемъ имѣть такимъ образомъ n группъ кривыхъ линій:

1) C_1, C_2, C_3,........................ C_{n-1}, C_n

2) C'_1, C'_2, C'_3,................... C'_{n-2}, C'_{n-1}

3) C''_1, C''_2, C''_3,........ C''_{n-3}, C''_{n-2}

. . . .

. . . .

$n-1$) $C_1^{(n-2)}$, $C_2^{(n-2)}$

n) $C_1^{(n-1)}$

Кривыя каждой группы проходятъ чрезъ всѣ тѣ данныя точки, чрезъ которыя проходятъ кривыя предыдущей группы, и сверхъ того еще чрезъ одну данную точку. Число кривыхъ въ каждой группѣ на единицу менѣе, чѣмъ въ предыдущей. Послѣдняя группа будетъ, слѣдовательно, включать въ себѣ единственную кривую $C_1^{(n-1)}$, проходящую чрезъ всѣ данныя точки.

Задача предыдущаго параграфа даетъ намъ средство находить построеніемъ прямолинейныя поляры всякой точки относительно кривыхъ какой-нибудь группы, когда существуетъ возможность находить прямолинейныя поляры всякой точки относительно кривыхъ предыдущей группы. Но было замѣчено, что мы можемъ предположить извѣстнымъ построеніе прямолинейныхъ поляръ относительно кривыхъ первой группы. Поэтому послѣдовательное примѣненіе построеній, указанныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, приводитъ насъ къ нахожденію прямолинейныхъ поляръ относительно кривыхъ всѣхъ слѣдующихъ группъ и въ концѣ всего относительно кривой $C_1^{(n-1)}$.

Рѣшеніе настоящей задачи достигается извѣстнымъ линейнымъ построеніемъ въ случаѣ, когда $n=2$. Отсюда заключаемъ, что, прилагая послѣдовательно, и притомъ въ конечномъ числѣ, разсмотрѣнныя выше построенія, которыя всѣ суть также линейныя, мы рѣшимъ задачу и для всякаго n.

И такъ, *нахожденіе прямолинейной поляры какой бы ни было точки относительно всякой геометрической кривой, опредѣляемой достаточнымъ числомъ ея точекъ, достигается посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго линейнаго построенія.*

18. Линейное построеніе, служащее для нахожденія прямолинейныхъ поляръ относительно данной кривой, можетъ служить также пособіемъ для построенія самой этой кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ сказаннаго въ параграфѣ 15 слѣдуетъ, что при помощи построенія прямолинейныхъ поляръ отысканіе точекъ пересѣченія какой бы ни было общей кривой порядка n съ прямою сводится на отысканіе точекъ пересѣченія съ этою прямою нѣкоторой вполнѣ опредѣленной кривой порядка n, обладающей кратною точкой порядка $(n-1)$.

Положимъ, что требуется построить кривую C порядка n, опредѣленную достаточнымъ числомъ ея точекъ, и допустимъ для общности, что въ числѣ этихъ точекъ есть кратная точка порядка k. Обозначимъ ее чрезъ h.

Задача о построеніи кривой C должна считаться рѣшенною, если мы на всякой прямой исходящей изъ точки h, найдемъ точки пересѣченія ея съ этою кривою. Пусть L будетъ одна такая прямая.

Точками p и p' этой прямой сопряженными между собою относительно C образуются два ряда, связанные такою зависимостью, что каждой точкѣ перваго ряда соотвѣтствуетъ единственная точка второго и каждой точкѣ второго $(n-k)$ точекъ перваго. Это слѣдуетъ изъ того, что всякая первая поляра, будучи порядка $(n-1)$, должна имѣть въ h кратную точку порядка $(k-1)$ и, слѣдовательно, можетъ пересѣкать прямую L только въ $(n-k)$ перемѣнныхъ точкахъ.

Пучки прямыхъ, соединяющихъ, какъ и въ предыдущемъ, точки p и p' съ двумя какими-нибудь точками o и b, образуютъ теперь кривую V порядка $(n-k+1)$, проходящую чрезъ h и чрезъ остальныя $(n-k)$ точекъ пересѣченія C и L.

Если точки o и b взяты на одной прямой съ h, то кривая V будетъ состоять изъ совокупности прямой ob съ кривою порядка единицею низшаго. Мѣстомъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей пучковъ o и b будетъ, слѣдовательно, нѣкоторая кривая V' порядка $(n-k)$, которой всѣ точки пересѣченія съ прямою L суть искомыя точки кривой C.

Въ частномъ случаѣ, когда $k=n-2$ будемъ имѣть, что кривая V' есть второго порядка, и потому приходимъ къ такому заключенію.

Всякая кривая порядка n, опредѣляемая достаточнымъ числомъ ея точекъ, въ число которыхъ входитъ кратная точка порядка $(n-2)$, можетъ быть построена помощію линейки и одного даннаго всѣми точками коническаго сѣченія (которое не есть совокупность двухъ прямыхъ).

Подобнымъ-же образомъ, замѣчая, что, въ случаяхъ, когда $k=n-3$ и $k=n-4$, вопросъ о построеніи кривой сводится на отысканіе точекъ пересѣченія прямыхъ съ кривыми 3-го и 4-го порядка, убѣждаемся въ слѣдующемъ[1].

Всякая кривая порядка n, опредѣляемая достаточнымъ числомъ ея точекъ, въ число которыхъ входитъ кратная точка порядка $(n-3)$ или $(n-4)$, можетъ быть построена помощію линейки, циркуля и одного даннаго всѣми точками коническаго сѣченія (которое не есть ни кругъ, ни совокупность двухъ прямыхъ).

Сказанное даетъ намъ также построенія общихъ кривыхъ до 5-го порядка включительно по достаточному числу ихъ про-

---

[1] Соч. автора «О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ». Москва. 1879, стр. 81—95.

стыхъ точекъ независимо отъ способа геометрическаго образованія этихъ кривыхъ.

19. Мы видѣли, какъ можно построить прямолинейную поляру данной точки относительно всякой геометрической кривой, опредѣляемой достаточнымъ числомъ ея точекъ. Къ этому же построенію можетъ быть сведено рѣшеніе той-же задачи и въ тѣхъ случаяхъ, когда мы имѣемъ для опредѣленія кривой какія-нибудь другія данныя, если только эти данныя опредѣляютъ кривую вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Назовемъ чрезъ Δ группу геометрическихъ данныхъ, обладающую свойствомъ, что къ ней достаточно прибавить одну точку a, долженствующую принадлежать кривой C, чтобы совокупностью данныхъ (Δ, a) кривая C была опредѣлена вполнѣ и единственнымъ образомъ. Нетрудно убѣдиться, что если возьмемъ двѣ точки p и p', долженствующія быть относительно C сопряженными (т. е. такими, что прямолинейная поляра p проходитъ чрезъ p'), то и совокупностью данныхъ (Δ, p, p') кривая C будетъ опредѣлена вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется построить прямолинейную поляру точки m относительно кривой C, опредѣляемой данными (Δ, p, p'). Допустимъ, что намъ извѣстенъ способъ построенія прямолинейныхъ поляръ въ случаѣ, когда кривая опредѣлена данными (Δ, a). Дадимъ точкѣ a три различныя, совершенно произвольныя, положенія на плоскости a_1, a_2, a_3. Тремя группами данныхъ (Δ, a_1), (Δ, a_2) и (Δ, a_3) опредѣлятся три кривыя C_1, C_2, C_3, составляющія, очевидно, пучекъ, которому будетъ принадлежать и кривая C[1]. По предположенію прямолинейныя поляры всякой точки плоскости относительно этихъ трехъ кривыхъ могутъ быть найдены. Онѣ также должны со-

[1] Это слѣдуетъ изъ самаго понятія о пучкѣ, какъ о такой системѣ кривыхъ, въ которой каждая кривая опредѣляется одною, принадлежащею ей, точкой.

ставлять пучки. Пусть P_1, P_2, P_3 будутъ прямолинейныя поляры точки p относительно кривыхъ C_1, C_2, C_3. Въ такомъ случаѣ прямолинейная поляра той-же точки относительно кривой C будетъ прямая P, соединяющая точку общую этимъ тремъ прямымъ съ точкою p'. Построивъ затѣмъ прямолинейныя поляры M_1, M_2, M_2 точки m относительно C_1, C_2, C_3 и назвавъ чрезъ M искомую прямолинейную поляру той-же точки относительно кривой C, будемъ имѣть, что эта поляра опредѣлится изъ условія:

$$(M\ M_1\ M_2\ M_3) = (P\ P_1\ P_2\ P_3).$$

И такъ, условіе, что двѣ какія-нибудь точки дожны быть сопряженныя относительно кривой, равнозначуще съ условіемъ, что нѣкоторая точка должна принадлежать кривой. Кривая опредѣляется, слѣдовательно, достаточнымъ числомъ паръ сопряженныхъ относительно ея точекъ[1], и изъ сказаннаго выше видимъ, что построеніе прямолинейной поляры относительно кривой, опредѣленной такимъ образомъ, есть линейное и состоитъ изъ повторенія въ конечномъ числѣ построенія, служащаго для той же цѣли въ томъ случаѣ, когда кривая опредѣлена достаточнымъ числомъ ея точекъ.

20. Задача 11-я. *Построить k-ую поляру точки m относительно кривой порядка n опредѣленной достаточнымъ числомъ ея точекъ или достаточнымъ числомъ паръ сопряженныхъ относительно ея точекъ.*

Очевидно, что должно быть $1 < k < n$.

Искомая поляра есть кривая порядка $(n-k)$ и построеніе ея сводится на отысканіе точекъ, въ которыхъ она пересѣкается всякою прямою, проходящею чрезъ m. Пусть L будетъ

[1] Число это есть $\frac{1}{2}\, n\ (n+3)$, что видно также и изъ уравненія первой поляры (см. параг. 1).

такая прямая. Назовемъ чрезъ S данную кривую и чрезъ X искомую кривую.

Согласно сказанному въ параграфѣ 15, мы можемъ найдти сколько угодно точекъ нѣкоторой кривой C порядка n, имѣющей въ произвольной точкѣ плоскости кратную точку порядка $(n-1)$ и пересѣкающей прямую L въ тѣхъ-же точкахъ какъ и кривая S. Построивъ затѣмъ, какъ показано въ параграфѣ 12-мъ, k-ую поляру Y точки m относительно C, мы будемъ имѣть, что точки пересѣченія ея съ прямой L будутъ принадлежать и искомой кривой X.

Такъ-какъ кривая Y можетъ быть разсматриваема какъ опредѣленная достаточнымъ числомъ ея точекъ, то на прямой L мы можемъ найдти линейнымъ построеніемъ сколько угодно паръ сопряженныхъ относительно ея точекъ. Эти точки будутъ также сопряженными и относительно кривой X.

Слѣдовательно, мы можемъ найдти на прямыхъ, проходящихъ чрезъ точку m, сколько угодно паръ точекъ сопряженныхъ относительно X. Искомая поляра является такимъ образомъ опредѣленною достаточнымъ числомъ паръ сопряженныхъ относительно ея точекъ и потому, согласно сказанному въ двухъ предыдущихъ параграфахъ, мы можемъ найдти для нея прямолинейную поляру каждой точки плоскости, а также опредѣлить точки пересѣченія ея съ какою угодно прямою.

Принявъ во вниманіе все выше изложенное, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Если какая-нибудь кривая порядка n опредѣлена достаточнымъ числомъ ея точекъ или достаточнымъ числомъ паръ сопряженныхъ точекъ, то относительно ея:

1. Всякая предпослѣдняя или коническая поляра можетъ быть найдена посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго построенія, выполняемаго помощію только линейки и одного дан-

наго всѣми точками коническаго сѣченія (которое не есть совокупность двухъ прямыхъ).

2. Поляры (n — 3)-я и (n — 4)-я, которыя суть кривыя послѣдовательно 3-го и 4-го порядка, могутъ быть найдены посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго построенія, выполняющагося помощію линейки, циркуля и одного коническаго сѣченія (которое не есть ни кругъ, ни совокупность двухъ прямыхъ).

Въ заключеніе замѣтимъ, что всѣ вопросы о построеніи мы разсматриваемъ въ настоящемъ изслѣдованіи съ теоретической, а не съ практической точки зрѣнія. Вслѣдствіе этого для насъ нисколько не важно, будетъ или нѣтъ выполнимо на дѣлѣ то или другое построеніе по числу составляющихъ его элементарныхъ геометрическихъ операцій. Можно сказать, что подобно тому, какъ въ алгебрѣ не имѣетъ никакого значенія число элементарныхъ дѣйствій, входящихъ въ составъ сложныхъ количественныхъ выраженій, такъ и въ *геометріи построенія*, изучаемой во всей ея общности и независимо отъ примѣненія къ какимъ-либо практическимъ цѣлямъ, не должно играть никакой роли число прямыхъ или кривыхъ линій, наносимыхъ на плоскости для выполненія извѣстнаго построенія.