УДК 519.210

С. Н. ЗИНЕНКО

КРУГИ ВЕЙЛЯ В ВЫРОЖДЕННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА

Настоящая статья примыкает к серии работ В. К. Дубового [1]

Теория кругов Вейля невырожденных интерполяционных задач довольно полно разработана в работах [2 — 4]. Ранее [1] рассмотрены круги Вейля невырожденной проблемы Шура. В то же время исследование вырожденного случая потребовало развития несколько иных подходов к построению кругов, радиусов, изучению их свойств.

1°. Предварительные сведения. Приведем наиболее важные для дальнейшего результаты и соотношения из [1], придерживаясь принятых там обозначений.

Функция $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ является решением задачи Шура с матрицей данных C_n (в дальнейшем будем кратко говорить задачи Шура $\{C_n\}$) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному матричному неравенству

$$\begin{bmatrix} I - C_n C_n^* & \lambda_{p,n}^*(\zeta) - C_n \lambda_{q,n}^*(\zeta)\,\theta^*(\zeta) \\ * & \dfrac{I - \theta(\zeta)\,\theta^*(\zeta)}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \end{bmatrix} \geqslant 0\ (S)$$

и двойственному матричному неравенству

$$\begin{bmatrix} I - C_n C_n^* & \dfrac{1}{\zeta}\left(\lambda_{p,n}^*\left(\dfrac{1}{\bar{\zeta}}\right)\theta(\zeta) - C_n \lambda_{q,n}^*\left(\dfrac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right) \\ * & \dfrac{I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \end{bmatrix} \geqslant 0.\ (\tilde{S})$$

В свою очередь, каждое из неравенств равносильно соответствующей паре условий:

а) существует решение X уравнения

$$(I - C_n C_n^*)\,X = \lambda_{p,n}^*(\zeta) - C_n \lambda_{q,n}^*(\zeta)\,\theta^*(\zeta),$$

б) для любого решения X

$$I - \theta(\zeta)\,\theta^*(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)\,X^*(I - C_n C_n^*)\,X \geqslant 0;$$

аналогично,

$\tilde{а}$) существует решение $\tilde{X}$ уравнения

$$(I - C_n C_n^*)\,\tilde{X} = \frac{1}{\zeta}\left(\lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\theta(\zeta) - C_n \lambda_{q,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right),$$

$\tilde{б}$) для любого решения $\tilde{X}$

$$I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)\,\tilde{X}^*(I - C_n C_n^*)\,\tilde{X} \geqslant 0.$$

Заметим, что левые части в неравенствах б) и $\tilde{б}$) не зависят от выбора решений X и $\tilde{X}$ соответствующих уравнений а) и $\tilde{а}$).

При надлежащем выборе решений X, $\tilde{X}$ левые части в неравенствах б), $\tilde{б}$) допускают факторизацию вида

$$[\theta(\zeta),\ I]\,B_n^{-1}(\zeta)\,j B_n^{*-1}(\zeta)\begin{bmatrix}\theta^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix};\quad j = \begin{bmatrix}-I_q & 0\\ 0 & I_p\end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$[\theta^*(\zeta),\ I]\,\tilde{B}_n^{*-1}(\zeta)\,\tilde{j}\tilde{B}_n^{-1}(\zeta)\begin{bmatrix}\theta(\zeta)\\ I\end{bmatrix},\quad \tilde{j} = \begin{bmatrix}-I_p & 0\\ 0 & I_q\end{bmatrix}, \tag{$\tilde{1}$}$$

где матрицы $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$ строятся по матрице данных C_n и ортопроектору P_n на одно из подпространств типа K (в случае вырождения задачи Шура $\{C_n\}$ таких подпространств бесконечно много и, следовательно, $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$ определяются неоднозначно). При согласованном построении $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$ (т. е. при одинаковом выборе ортопроекторов P_n) имеет место связь

$$\tilde{B}_n(\zeta) = J^* j B_n^{-1}(\zeta)\,jJ,\quad J = \begin{bmatrix}0 & I_q\\ I_p & 0\end{bmatrix}. \tag{2}$$

В дальнейшем будем считать это условие выполненным. Матрицы $W_n(\zeta) = B_n^{-1}(\zeta)\,jB_n^{*-1}(\zeta)$; $\tilde{W}_n(\zeta) = \tilde{B}_n^{*-1}(\zeta)\tilde{j}\tilde{B}_n^{-1}(\zeta)$ называют матрицами Вейля.

Из (1) и $(\tilde{1})$ следует, что всякое решение $\theta(\zeta)$ допускает представление в виде дробно-линейных преобразований

$$\theta(\zeta) = \{\omega(\zeta)\} B_n(\zeta) = \\ = (\omega(\zeta) b_n(\zeta) + d_n(\zeta))^{-1} (\omega(\zeta) a_n(\zeta) + c_n(\zeta)); \tag{3}$$

$$\theta(\zeta) = \tilde{B}_n(\zeta)\{\omega(\zeta)\} = \\ = (\tilde{a}_n(\zeta)\omega(\zeta) + \tilde{b}_n(\zeta))(\tilde{c}_n(\zeta)\omega(\zeta) + d_n(\zeta))^{-1}, \tag{$\tilde{3}$}$$

коэффициенты которых являются блоками матриц

$$B_n(\zeta) = \begin{bmatrix} a_n(\zeta) & b_n(\zeta) \\ c_n(\zeta) & d_n(\zeta) \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}_n(\zeta) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_n(\zeta) & \tilde{b}_n(\zeta) \\ \tilde{c}_n(\zeta) & \tilde{d}_n(\zeta) \end{bmatrix},$$

а параметр $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$. В силу условия а) (в равной степени $\tilde{а}$)) $\omega(\zeta)$ при некотором разложении пространств $E_p = N_n \oplus N_n^\perp$, $E_q = M_n \oplus M_n^\perp$ допускает блочное представление

$$\omega(\zeta) = \begin{bmatrix} u_n & 0 \\ 0 & \hat{\omega}(\zeta) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

в котором u_n фиксированная унитарная компонента, однозначно определяемая по данным задачи, а $\hat{\omega}(\zeta)$ произвольное голоморфное сжатие соответствующей размерности. Подчеркнем, что параметр $\omega(\zeta)$ в (3) и $(\tilde{3})$ один и тот же, что является прямым следствием условия (2).

Наконец, отметим существование $\forall\zeta_0 \neq 0$ $(|\zeta_0| < 1)$ j- и $\tilde{j}$-унитарных матриц τ и $\tilde{\tau}$, приводящих соответственно матрицы $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta_0)$ к треугольному виду

$$\tau^{-1} B_n(\zeta_0) = \begin{bmatrix} r_{\tau,d} & 0 \\ 0 & r_{\tau,g}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \sigma_\tau & I \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B}_n(\zeta_0)\tilde{\tau}^{-1} = \begin{bmatrix} I & \sigma_\tau \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{\tau,g} & 0 \\ 0 & r_{\tau,d}^{-1} \end{bmatrix}$$

(разбиение на блоки аналогично $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$). Для проверки этого, следуя [1], разобьем матрицу Вейля $W_n(\zeta_0)$ на блоки и приведем ее треугольным преобразованием к диагональному виду

$$W_n(\zeta_0) = B_n^{-1}(\zeta_0)\, j B_n^{*-1}(\zeta_0) = \begin{bmatrix} -R_n & S_n^* \\ S_n & -T_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_n R_n^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_n & 0 \\ 0 & S_n R_n^{-1} S_n^* - T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R_n^{-1} S_n^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В качестве матрицы τ можно взять, например,

$$\tau = B_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_n R_n^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_n)^{1/2} & 0 \\ 0 & (S_n R_n^{-1} S_n^* - T_n)^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Тогда $\tilde{\tau} = J^* j \tau^{-1} j J$.

2°. *Круги Вейля в задаче Шура.* Дробно-линейные преобразования (3) и $(\tilde{3})$, рассматриваемые в фиксированной точке $\zeta_0 \neq 0$ $(|\zeta_0| < 1)$, с помощью матриц τ и $\tilde{\tau}$ можно преобразовать к виду

$$\theta(\zeta_0) = \{\{\omega(\zeta_0)\}\tau\}(\tau^{-1}B_n(\zeta_0)) = \sigma_\tau + r_{\tau,g}\omega_\tau r_{\tau,d};$$

$$\theta(\zeta_0) = (\tilde{B}_n(\zeta_0)\tilde{\tau}^{-1})\{\tilde{\tau}\{\omega(\zeta_0)\}\} = \sigma_\tau + r_{\tau,g}\omega_\tau r_{\tau,d},$$

где $\omega_\tau = \{\omega(\zeta_0)\}\tau = \tilde{\tau}\{\omega(\zeta_0)\}$. В силу j-унитарности τ (в равной степени $\tilde{j}$-унитарности $\tilde{\tau}$) ω_τ при некотором разложении пространств $E_p = N_\tau \oplus N_\tau^\perp$, $E_q = M_\tau \oplus M_\tau^\perp$ допускает блочное представление

$$\omega_\tau = \begin{bmatrix} u_\tau & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_\tau \end{bmatrix}, \tag{5}$$

аналогичное представлению $\omega(\zeta_0)$ (4), причем $\operatorname{rang} u_\tau = \operatorname{rang} u_n$. Обозначим через $P_{\tau,g}$, $P_{\tau,d}$ ортопроекторы на подпространства $N_\tau^\perp$, $M_\tau^\perp$ и будем обозначать через

$$P_{\tau,g}^\perp u_\tau P_{\tau,d}^\perp = \begin{bmatrix} u_\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{\tau,g}\hat{\omega}_\tau P_{\tau,d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_\tau \end{bmatrix}$$

фиксированную унитарную и произвольную сжимающую компоненты ω_τ.

Теорема 1. *Множество решений вырожденной задачи Шура (1) в фиксированной точке $\zeta_0 \neq 0$ $(|\zeta_0| < 1)$ образует матричный круг $K_n(\zeta_0) = \{\theta : \theta = \sigma_n(\zeta_0) + r_{\tau,g}P_{\tau,g}\omega_\tau P_{\tau,d}r_{\tau,d},\ \|\omega_\tau\| \leqslant 1\}$ с центром $\sigma_n(\zeta_0) = \sigma_\tau + r_{\tau,g}P_{\tau,g}^\perp u_\tau P_{\tau,d}^\perp r_{\tau,d}$, левым радиусом $\rho_{g,n}(\zeta_0) = r_{\tau,g}P_{\tau,g}r_{\tau,g}^*$, правым радиусом $\rho_{d,n}(\zeta_0) = r_{\tau,d}^* P_{\tau,d} r_{\tau,d}$.*

Отметим, что центр круга $\sigma_n(\zeta_0)$ как центр симметрии ограниченного множества определяется однозначно. Радиусы $\rho_{g,n}(\zeta_0)$ и $\rho_{d,n}(\zeta_0)$ при выбранном способе построения круга, как показано ниже, также определяются единственным образом (т. е. не зависят от выбора матриц $B_n(\zeta)$, τ и $\tilde{B}(\zeta)$, $\tilde{\tau}$).

Теорема 2. *Имеют место представления*

$$\rho_{g,n}(\zeta_0) = [\sigma_n(\zeta_0), I]\, W_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} \sigma_n^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix}; \tag{6}$$

$$\rho_{d,n}(\zeta_0) = [\sigma_n^*(\zeta_0), I]\, \tilde{W}_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} \sigma_n(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix}. \tag{$\tilde{6}$}$$

Доказательство. Имеем

$$[\theta(\zeta_0), I]\, W_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix} =$$

$$= [\theta(\zeta_0), I]\, B_n^{-1}(\zeta_0)\, \tau j \tau^* B_n^{*-1}(\zeta_0) \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix} =$$

$$= [\theta(\zeta_0), I] \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\sigma_\tau & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{\tau,d}^{-1} & 0 \\ 0 & r_{\tau,g} \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} r_{\tau,d}^{*-1} & 0 \\ 0 & r_{\tau,g}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\sigma_\tau^* \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix} =$$

$$= r_{\tau,g}[\omega_\tau, I]\, j \begin{bmatrix} \omega_\tau^* \\ I \end{bmatrix} r_{\tau,g}^* = r_{\tau,g}(I - \omega_\tau\omega_\tau^*)\, r_{\tau,g}^*.$$

Возьмем в качестве $\theta(\zeta)$ такое решение задачи $\{C_n\}$, что $\theta(\zeta_0) = \sigma_n(\zeta_0)$. Замечая, что центру $\sigma_n(\zeta_0)$ круга отвечает значение параметра $\omega_{\tau, u} = P^{\perp}_{\tau, g} u_\tau P^{\perp}_{\tau, d}$ и значит $I - \omega_{\tau, u}\omega^*_{\tau, u} = P_{\tau, g}$, приходим к (6). Аналогично доказывается $(\tilde{6})$.

Следствие 1.

$$\rho_{g, n}(\zeta_0) = \max_{\theta \in K_n(\zeta_0)} [\theta, I]\, W_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} \theta^* \\ I \end{bmatrix}; \tag{7}$$

$$\rho_{d, n}(\zeta) = \max_{\theta \in K_n(\zeta_0)} [\theta^*, I]\, \tilde{W}_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} \theta \\ I \end{bmatrix}. \tag{$\tilde{7}$}$$

Доказательство.

$$\rho_{g, n}(\zeta_0) = r_{\tau, g}(I - \omega_{\tau, u}\omega^*_{\tau, u})\, r^*_{\tau, g} =$$

$$= \max_{\omega_\tau} r_{\tau, g}(I - \omega_\tau\omega^*_\tau)\, r^*_{\tau, g} = \max_{\omega_\tau} [\theta(\zeta_0), I]\, W_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix},$$

где max берется по всем параметрам ω_τ вида (5), а, следовательно, по всем $\theta(\zeta_0) \in K_n(\zeta_0)$. Аналогично доказывается $(\tilde{7})$.

Следствие 2.

$$\rho_{g, n}(\zeta_0) = \max_{\theta \in K_n(\zeta_0)} (I - \theta\theta^* - (1 - |\zeta|^2)\, X^*(I - C_n C_n^*)\, X); \tag{8}$$

$$\rho_{d, n}(\zeta_0) = \max_{\theta \in K_n(\zeta_0)} (I - \theta^*\theta - (1 - |\zeta_0|^2)\, \tilde{X}^*(I - C_n C_n^*)\, \tilde{X}), \tag{$\tilde{8}$}$$

где X, $\tilde{X}$ произвольные решения уравнений а), $\tilde{a}$) соответственно.

В дальнейшем важную роль играет связь между радиусами $\rho_{g, n}(\zeta_0)$, $\rho_{d, n}(\zeta_0)$ круга Вейля $K_n(\zeta_0)$ задачи $\{C_n\}$ и радиусами $\rho^{(*)}_{g, n}(\zeta_0)$, $\rho^{(*)}_{d, n}(\zeta_0)$ круга Вейля $K^{(*)}_n(\zeta_0)$ задачи $\{C^{(*)}_n\}$, где

$$C^{(*)}_n \begin{bmatrix} c_0^* & & \\ c_1^* & c_0^* & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ c_n^* & c_1^* & c_0^* \end{bmatrix}$$

Теорема 3. *Имеют место соотношения*

$$\rho_{g, n}(\zeta_0) = |\zeta|^{2n+2} \rho^{(*)}_{d, n}(\bar{\zeta}_0); \quad \rho^{(*)}_{g, n}(\bar{\zeta}_0) = |\zeta_0|^{2n+2} \rho_{d, n}(\zeta_0).$$

Доказательство проведем, например, для первого соотношения. Воспользуемся для $\rho_{g, n}(\zeta_0)$ и $\rho^{(*)}_{d, n}(\bar{\zeta}_0)$ соответствующими представлениями (8) и $(\tilde{8})$, в которых в качестве решений X и $\tilde{X}^{(*)}$ возьмем матрицы*

$$X = (I - C_n C_n^*)^{[-1]} (\lambda^*_{p, n}(\zeta_0) - C_n \lambda^*_{q, n}(\zeta_0)\, \theta^*(\zeta_0));$$

$$\tilde{X}^{(*)} = (I - C^{(*)}_n C^{(*)*}_n)^{[-1]} \frac{1}{\bar{\zeta}_0} \left(\lambda^*_{q, n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right) \theta^{(*)}(\bar{\zeta}_0) - C^{(*)}_n \lambda^*_{p, n}\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)\right).$$

---

* Здесь и далее под символом $A^{[-1]}$, где $A = A^*$ оператор, действующий в пространстве E и имеющий при разложении $E = \operatorname{Ker} A \oplus \Delta_A$ блочное представление $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}$, понимается оператор $A^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}^{-1} \end{bmatrix}$.

Очевидно, всякое решение $\theta^{(*)}(\zeta)$ задачи $\{C_n^{(*)}\}$ имеет вид $\theta^{(*)}(\zeta) = \theta^*(\bar{\zeta})$, где $\theta(\zeta)$ произвольное решение $\{C_n\}$. Кроме того, полагая

$$U_p = \begin{bmatrix} & & & I_p \\ & & I_p & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ I_p & & & \end{bmatrix},$$

имеем

$$C_n^{(*)} = U_q C_n^* U_p, \quad (I - C_n^{(*)} C_n^{(*)*})^{[-1]} = U_q (I - C_n^* C_n)^{[-1]} U_q;$$
$$\lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^n} \lambda_{p,n}(\zeta) U_p.$$

Следовательно,

$$\tilde{X}^{(*)} = \frac{1}{\bar{\zeta}^{n+1}} U_q (I - C_n^* C_n)^{[-1]} (\lambda_{q,n}^*(\zeta_0)\theta^*(\zeta_0) - C_n^* \lambda_{p,n}^*(\zeta_0)).$$

Подставляя найденные решения X, $\tilde{X}^{(*)}$ в (8), ($\tilde{8}$), получим

$$\rho_{g,n}(\zeta_0) = \max_{\theta(\zeta_0) \in K_n(\zeta_0)} [\theta(\zeta_0), I] (j - |\zeta_0|^2) j H_n(\zeta_0) j) \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix};$$

$$H_n(\zeta_0) = \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}(\zeta_0) & 0 \\ 0 & \lambda_{p,n}(\zeta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n^* \\ I \end{bmatrix} (I - C_n C_n^*)^{[-1]} [C_n, I] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}^*(\zeta_0) & 0 \\ 0 & \lambda_{p,n}(\zeta_0) \end{bmatrix};$$

$$\rho_{d,n}^{(*)}(\bar{\zeta}_0) = \max_{\theta(\xi_0) \in K_n(\zeta_0)} [\theta(\zeta_0), I] \left(j - \frac{1 - |\zeta_0|^2}{|\zeta_0|^{2n+2}} j \tilde{H}_n^{(*)}(\zeta_0) j \right) \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix};$$

$$\tilde{H}_n^{(*)}(\zeta_0) = \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}(\zeta_0) & 0 \\ 0 & \lambda_{p,n}(\zeta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ C_n \end{bmatrix} I - C_n^* C_n)^{[-1]} [I, C_n^*] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}^*(\zeta_0) & 0 \\ 0 & \lambda_{p,n}^*(\zeta_0) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через P_0 ортопроектор на $\operatorname{Ker}(I - C_n C_n^*)$. Тогда

$$(I - C_n C_n^*)^{[-1]} = C_n (I - C_n^* C_n)^{[-1]} C_n^* + I - P_0.$$

Замечая, что $C_n^* P_0 C_n$ есть ортопроектор на $\operatorname{Ker}(I - C_n^* C_n)$, получаем

$$(I - C_n^* C_n)^{[-1]} = C_n^* (I - C_n C_n^*)^{[-1]} C_n + I - C_n^* P_0 C_n.$$

В таком случае

$$H_n(\zeta_0) = \tilde{H}_n^*(\zeta_0) - \frac{1 - |\zeta_0|^{2n+2}}{1 - |\zeta_0|^2} j +$$
$$+ \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}(\zeta_0) C_n^* P_0 C_n \lambda_{q,n}^*(\zeta_0) & 0 \\ 0 & -\lambda_{p,n}(\zeta_0) P_0 \lambda_{p,n}^*(\zeta_0) \end{bmatrix}.$$

Наконец учитывая, что требование существования решения уравнения а) равносильно условию $P_0(\lambda^*_{p,n}(\zeta_0) - C_n\lambda^*_{q,n}(\zeta_0)\theta^*(\zeta_0)) = 0$, приходим к необходимому соотношению между радиусами.

Следуя [I], введем в рассмотрение нормированный левый радиус

$$r_{g,n}(\zeta_0) = |\zeta_0|^{-2n-2}\rho_{g,n}(\zeta_0) = \rho^{(*)}_{d,n}(\bar{\zeta_0}). \tag{9}$$

Установим теперь существование предела $\lim\limits_{\zeta\to 0}\rho_{d,n}(\zeta)$, что позволит доопределить функцию $\rho_{d,n}(\zeta)$, а в силу (9) и функции $\rho_{g,n}(\zeta)$ и $r_{g,n}(\zeta)$, в точке $\zeta = 0$ (очевидно, при этом $\rho_{g,n}(0) = 0$). Одновременно будет получено представление $\rho_{d,n}(0)$, играющее важную роль при установлении связей проблемы Шура с теорией характеристических функций операторов сжатия [1].

Теорема 4. *Имеет место представление*

$$\rho_{d,n}(0) = I - c_0^* c_0 - b^*(I - C_{n-1}C^*_{n-1})^{[-1]}b, \quad b = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением ($\tilde{8}$), в котором решение $\tilde{X}$ уравнения $\tilde{a}$) выберем следующим образом. В соответствии с разбиением

$$C_n = \begin{bmatrix} C_{n-1} & 0 \\ a & c_0 \end{bmatrix}, \quad a = [c_n, \ldots, c_1],$$

получим

$$I - C_nC_n^* = \begin{bmatrix} I - C_{n-1}C^*_{n-1} & -C_{n-1}a^* \\ -aC^*_{n-1} & 1 - c_0c_0^* - aa^* \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Отсюда следует существование решения Y уравнения

$$(I - C_{n-1}C^*_{n-1})Y = -C_{n-1}a^*$$

и неотрицательность матрицы

$$D = I - c_0c_0^* - aa^* - Y^*(I - C_{n-1}C^*_{n-1})Y \geqslant 0.$$

Учитывая диагональное представление

$$I - C_nC_n^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y^* & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I - C_{n-1}C^*_{n-1} & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

получаем, что матрица

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (I - C_{n-1}C^*_{n-1})^{[-1]} & 0 \\ 0 & D^{[-1]} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -Y^* & I \end{bmatrix} \times$$
$$\times \frac{1}{\zeta}\left(\lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\theta(\zeta) - C_n\lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right)$$

является решением уравнения $\tilde{a}$).

Преобразуем выражение

$$\frac{1}{\zeta}\left(\lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\theta(\zeta) - C_n\lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_2(\zeta) \\ \vdots \\ f_{n+1}(\zeta) \\ f_{n+2}(\zeta) \end{bmatrix}.$$

…есь через $f_k(\zeta)$ обозначены матрицы-функции $f_k(\zeta) = c_k\zeta + c_{k+1}\zeta^2 + \ldots$ ($k = 1, 2, \ldots$). Замечая, что $\theta(\zeta) = c_0 + f_1(\zeta)$, получим

$$I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)\tilde{X}^*(I - C_nC_n^*)\tilde{X} =$$
$$= I - c_0^*c_0 - (1 - |\zeta|^2)b^*(I - C_{n-1}C_{n-1}^*)^{[-1]}b -$$
$$- (1 - |\zeta|^2)(c_{n+1}^* - b^*Y)D^{[-1]}(c_{n+1} - Y^*b) + f_\theta(\zeta),$$

…е через f_θ обозначена некоторая эрмитовая матрица-функция, построенная по коэффициентам $c_0, \ldots c_n, c_{n+1}, \ldots$. Поскольку $\|c_i\| \leqslant 1$ ($i = 0, 1, \ldots$), то $\|f_k(\zeta)\| \leqslant |\zeta|/(1 - |\zeta|)$ ($k = 1, 2, \ldots$). В таком, …учае в любом круге $|\zeta| < \varepsilon < 1$ $\|f_\theta(\zeta)\| \leqslant |\zeta|/(1 - |\zeta|)\,\mathrm{const}$ …ричем при фиксированных коэффициентах $c_0, \ldots, c_n$ оценка равномерна относительно $c_{n+1}, \ldots$, т. е. относительно решений $\theta(\zeta)$ задачи $\{C_n\}$.

Тогда, с одной стороны,

$$\rho_{d,n}(\zeta) = \max_{\theta(\zeta)\in K_n(\zeta)} (I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)\tilde{X}^*(I - C_nC_n^*)\tilde{X}) \leqslant$$
$$\leqslant I - c_0^*c_0 - (1 - |\zeta|^2)b^*(I - C_{n-1}C_{n-1}^*)^{[-1]}b + |\zeta|/(1 - |\zeta|)\,\mathrm{const}\,I.$$

С другой, для любого решения $\theta(\zeta)$

$$\rho_{d,n}(\zeta) \geqslant I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) - (I - |\zeta|^2)\tilde{X}^*(I - C_nC_n^*)\tilde{X} \geqslant$$
$$\geqslant I - c_0^*c_0 - (1 - |\zeta|^2)b^*(I - C_{n-1}C_{n-1}^*)^{[-1]}b -$$
$$(1 - |\zeta|^2)(c_{n+1}^* - b^*Y)D^{[-1]}(c_{n+1} - Y^*b) - |\zeta|/(1 - |\zeta|)\,\mathrm{const}\,I.$$

…ьмем в качестве $\theta(\zeta)$ решение, у которого $c_{n+1} = Y^*b$. Существование такого решения следует из выполнения критерия разрешимос… задачи $\{C_{n+1}\}$. Действительно, разбивая C_{n+1}, C_n на блоки

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} C_n & 0 \\ [c_{n+1}, a] & c_0 \end{bmatrix}; \quad C_n = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ b & C_{n-1} \end{bmatrix},$$

…е $c_{n+1} = Y^*b$, приходим к представлению

$$I - C_{n+1}C_{n+1}^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ [0, Y^*] & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I - C_nC_n^* & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\rho_{d,n}(\zeta) \geqslant I - c_0^*c_0 - (1 - |\zeta|^2)b^*(I - C_{n-1}C_{n-1}^*)^{[-1]}b -$$
$$- |\zeta|/(1 - |\zeta|)\,\mathrm{const}\,I.$$

…з полученных оценок вытекает существование предела $\rho_{d,n}(0) = \lim_{\zeta\to 0}\rho_{d,n}(\zeta)$ и требуемое представление.

… *Исследование рангов радиусов предельного круга Вейля.* Пусть $\theta(\zeta) = c_0 + \ldots + c_n\zeta^n + \ldots$ произвольная матрица-функция класса …$_{,q}$. Поставим ей в соответствие цепочку задач Шура $\{C_n\}$ ($n = 0, 1, \ldots$), одним из возможных решений которых является $\theta(\zeta)$. Тем самым, приходим к последовательности вложенных друг в друга кругов Вейля $K_0(\zeta) \supseteq \ldots \supseteq K_n(\zeta) \supseteq \ldots$. О кругах $K_n(\zeta)$ удобно говорить, как о кругах функции $\theta(\zeta)$ и в дальнейшем там, где это необходимо, обозначать $K_n(\zeta, \theta)$ (соответственно $\sigma_n(\zeta, \theta)$, $\rho_{g,n}(\zeta, \theta)$; и т. д.)

Теорема 5. *С возрастанием параметра n радиусы $\rho_{g,n}$, $r_{g,n}$, $\rho_{d,n}$ монотонно убывают.*

Доказательство. Возьмем в качестве $\tilde{B}_n(\zeta)$ матрицу, отвечающую пошаговому решению задачи $\{\mathbf{C}_n\}$ [5], так что $\tilde{B}_n(\zeta) = \overrightarrow{\prod_{k=0}^{n}} \tilde{B}_0^{(k)}(\zeta) = \tilde{B}_{n-1}(\zeta)\tilde{B}_0^{(n)}(\zeta)$, где $\tilde{B}_{n-1}(\zeta) = \overrightarrow{\prod_{k=0}^{n-1}} B_0^{(k)}(\zeta)$ — некоторая матрица, отвечающая пошаговому решению задачи $\{\mathbf{C}_{n-1}\}$. В таком случае соответствующие матрицы Вейля связаны неравенством $\tilde{W}_{n-1} \geqslant \tilde{W}_n$. Учитывая, что $K_{n-1} \supseteqq K_n$, из $(\tilde{6})$, $(\tilde{7})$ получаем $\rho_{d,n-1} \geqslant \rho_{d,n}$. В силу (9) $\rho_{g,n-1} \geqslant \rho_{g,n}$, $r_{g,n-1} \geqslant r_{g,n}$.

Следствие. *Существуют пределы*

$$\rho_{g,\infty} = \lim_{n\to\infty} \rho_{g,n} = 0; \quad r_{g,\infty} = \lim_{n\to\infty} r_{g,n}; \ \rho_{d,\infty} = \lim_{n\to\infty} \rho_{d,n}.$$

Итак, предельный круг Вейля $K_\infty(\zeta, \theta)$ за счет обращения в нуль левого радиуса $\rho_{g,\infty}(\zeta, \theta) = 0$ стягивается в точку, что соответствует единственности решения бесконечной задачи Шура. В то же время нормированный левый $r_{g,\infty}(\zeta, \theta) = \rho_{d,\infty}(\bar{\zeta}, \theta^{(*)})$ и правый $\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta)$ радиусы предельного круга могут быть отличны от нуля. Их исследование в общей ситуации можно свести к рассмотренному в [1] невырожденному случаю. С этой целью получим представление для правого радиуса.

Функция $\theta(\zeta) = c_0 + \ldots$ как решение задачи $\{c_0\}$ допускает представление

$$\theta(\zeta) = \tilde{B}_0(\zeta)\{\theta^{(1)}(\zeta)\}. \tag{10}$$

При этом функция $\theta^{(1)}(\zeta)$ определяется по $\theta(\zeta)$ однозначно (т. е. не зависит от выбора $\tilde{B}_0(\zeta)$). Отметим, что знаменатель $q(\zeta) = \tilde{c}_0(\zeta)\theta^{(1)}(\zeta) + \tilde{d}_0(\zeta)$ дробно-линейного преобразования (10) является обратимой всюду в единичном круге аналитической матрицей-функцией.

Теорема 6. *Имеет место равенство*

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = (\tilde{q}(\zeta))^{*-1} \rho_{d,\infty}(\zeta, \theta^{(1)}) (\tilde{q}(\zeta))^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{C}_n\}$, $\{\mathbf{C}_{n-1}^{(1)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — задачи Шура, порожденные функциями $\theta(\zeta)$, $\theta^{(1)}(\zeta)$. Отметим, как это следует из пошагового решения проблемы Шура, что для любого решения $\theta_\sigma(\zeta)$ задачи $\{\mathbf{C}_n\}$ соответствующая в смысле (10) функция $\theta_\sigma^{(1)}(\zeta)$ является некоторым решением задачи $\{\mathbf{C}_{n-1}^{(1)}\}$ и наоборот.

Пусть $\tilde{B}_{n-1}^{(1)}(\zeta)$ — произвольная матрица, отвечающая задаче $\{\mathbf{C}_{n-1}^{(1)}\}$. Тогда $\tilde{B}_n(\zeta) = \tilde{B}_0(\zeta)\tilde{B}_{n-1}^{(1)}(\zeta)$ — некоторая матрица, отвечающая задаче

[5]. В таком случае соответствующие матрицы Вейля связаны отношением $\tilde{W}_n = \tilde{B}_0^{*-1} \tilde{W}_{n-1}^{(1)} \tilde{B}_0^{-1}$. Следовательно,

$$[\theta_\sigma^*,\ I]\, \tilde{W}_n \begin{bmatrix}\theta_\sigma \\ I\end{bmatrix} = (\tilde{q}_\sigma)^{*-1} [\theta_\sigma^{(1)*},\ I]\, \tilde{W}_{n-1}^{(1)} \begin{bmatrix}\theta_\sigma^{(1)} \\ I\end{bmatrix} (\tilde{q}_\sigma)^{-1},$$

где $\tilde{q}_\sigma(\zeta) = \tilde{c}_0(\zeta)\,\theta_\sigma^{(1)}(\zeta) + \tilde{d}_0(\zeta)$.

В полученном равенстве возьмем в качестве $\theta_\sigma(\zeta)$ такое решение задачи $\{\mathbf{C}_n\}$, что $\theta_\sigma(\zeta_0) = \sigma_n(\zeta_0,\ \theta)$, где $\zeta_0 \neq 0$ — некоторая фиксированная точка единичного круга. Тогда из $(\tilde{6})$, $(\tilde{7})$ вытекает, что $\rho_n(\zeta_0,\ \theta) \leqslant (\tilde{q}_\sigma(\zeta_0))^{*-1} \rho_{d,\,n-1}(\zeta_0,\ \theta^{(1)})\,(\tilde{q}_\sigma(\zeta_0))^{-1}$. Предельный переход при $\zeta_0 \to 0$ приводит к справедливости этого неравенства и при $\zeta = 0$ (воспользуемся при этом тем, что круг Вейля $K_{n-1}(\zeta_0,\ \theta^{(1)})$ при $\zeta_0 \to 0$ за счет обращения в нуль левого радиуса $\rho_{g,\,n-1}(\zeta_0,\ \theta^{(1)}) \to 0$ стягивается в точку $\theta_\sigma^{(1)}(\zeta_0) \to \theta^{(1)}(0)$). Переходя теперь к пределу при $n \to \infty$ и воспользовавшись аналогичными соображениями, получаем

$$\rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta) \leqslant (\tilde{q}(\zeta))^{*-1} \rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta^{(1)})\,(\tilde{q}(\zeta))^{-1}.$$

Если теперь в качестве $\theta_\sigma^{(1)}(\zeta)$ взять такое решение задачи $\{\mathbf{C}_{n-1}^{(1)}\}$, что $\theta_\sigma^{(1)}(\zeta_0) = \sigma_{n-1}(\zeta_0,\ \theta^{(1)})$, и провести аналогичные рассуждения, то придем к противоположному неравенству и, тем самым, к требуемому представлению.

Аналогично тому, как по функции $\theta^{(0)}(\zeta) = \theta(\zeta)$ была построена функция $\theta^{(1)}(\zeta)$, построим по $\theta^{(1)}(\zeta)$ функцию $\theta^{(2)}(\zeta)$ и т. д.

Следствие.

$$\rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta) = \Big(\overset{\rightarrow}{\prod_{k=0}^{n}} \tilde{q}^{(k)}(\zeta)\Big)^{*-1} \rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta^{(n+1)}) \Big(\overset{\rightarrow}{\prod_{k=0}^{n}} \tilde{q}^{(k)}(\zeta)\Big)^{-1}, \qquad (11)$$

где $\tilde{q}^{(k)}(\zeta)$ — *знаменатели дробно-линейных преобразований* $\theta^{(k)}(\zeta) = \tilde{B}_0^{(k)}(\zeta)\,\{\theta^{(k+1)}(\zeta)\}$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, *являющиеся обратимыми всюду в единичном круге аналитическими матрицами-функциями.*

Функция $\theta^{(n+1)}(\zeta)$ как параметр результирующего дробно-линейного преобразования $\theta(\zeta) = \Big(\overset{\rightarrow}{\prod_{k=0}^{n}} \tilde{B}_0^{(k)}(\zeta)\Big)\{\theta^{(n+1)}(\zeta)\}$ при разложении пространств $E_p = N_n \oplus N_n^{\perp}$, $E_q = M_n \oplus M_n^{\perp}$ имеет блочное представление (4):

$$\theta^{(n+1)}(\zeta) = \begin{bmatrix} u_n & 0 \\ 0 & \hat{\theta}^{(n+1)}(\zeta)\end{bmatrix}, \text{ так что } \rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta^{(n+1)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \hat{\theta}^{(n+1)})\end{bmatrix}.$$

Поскольку начиная с некоторого номера n_0 унитарная компонента не изменяется $u_n = u_{n_0}$, $n \geqslant n_0$, блок $\hat{\theta}^{(n_0+1)}(\zeta)$ является решением некоторой бесконечной невырожденной задачи Шура [5]. Таким образом, формула (11) позволяет свести анализ радиусов предельного круга для произвольной функции $\theta(\zeta)$ к исследованию радиусов некоторой функции $\hat{\theta}^{(n_0+1)}(\zeta)$, бесконечная задача Шура которой невырождена. В частности, из (11) и [1] следует независимость рангов радиусов предельного круга Вейля от выбора точки $\zeta\,(|\zeta|<1)$. Теоремы 6.3 и 6.9 из [1] о возможных значениях рангов радиусов в общем случае можно переформулировать следующим образом.

Обозначим через $s_\theta = \operatorname{rang} u_{n_0} = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{rang} u_n$. Очевидно, $0 \leqslant s_\theta \leqslant \min(p, q)$, причем случай $s_\theta = 0$ характеризует бесконечные невырожденные задачи. Отметим выражение s_θ через данные задачи

$$s_\theta = p - \lim_{n\to\infty} (\operatorname{rang}(I - \mathbf{C}_n\mathbf{C}_n^*) - \operatorname{rang}(I - \mathbf{C}_{n-1}\mathbf{C}_{n-1}^*)) =$$

$$= q - \lim_{n\to\infty} (\operatorname{rang}(I - C_n^*C_n) - \operatorname{rang}(I - C_{n-1}^*C_{n-1})).$$

Теорема 7. *Ранги радиусов предельного круга Вейля не превосходят величин*

$$\operatorname{rang} r_{g,\infty}(\zeta, \theta) \leqslant p - s_\theta;\quad \operatorname{rang} \rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) \leqslant q - s_\theta,$$

причем если ранг одного из предельных радиусов достигает своего максимального значения, то этим свойством обладает и другой.

Теорема 8. *Для любых целых чисел* p, $q\,(p>0,\ q>0)$, *целого числа* $\gamma\,(0 \leqslant \gamma \leqslant \min(p, q))$ *и целых чисел* α, $\beta\,(0 \leqslant \alpha \leqslant p-\gamma$, $0 \leqslant \beta \leqslant q-\gamma)$, *причем* α, β *свои максимальные значения принимают одновременно, существует функция* $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ *такая, что* $\operatorname{rang} r_{g,\infty}(\zeta, \theta) = \alpha$, $\operatorname{rang} \rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \beta$, $s_\theta = \gamma$.

Список литературы: 1. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура аналитических функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1982. Вып. 37. С. 14—26, 1982. Вып. 38. С. 32—40; 1984. Вып. 4 С. 55—64; 1984. Вып. 42. С. 46—57. 2. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны-Пика // Теория операторов в функцион. пр-вах и ее прил. К., 1981. С. 25—9. 3. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. 47, №3. С. 455—497. 4. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976. 40, №3. С. 593—644 5. *Зиненко С. Н.* Пошаговый процесс в вырожденной интерполяционной проблеме Шура и разложение j-растягивающего кратного множителя в произведение простейших. Х., 1987. 41 с. Деп. в УкрНИИНТИ 23.06.87, №1711 — Ук 87.

Поступила в редколлегию 16.10.89