УДК 517.98

Ф. ЛЕФФЛЕР, В. ТИММЕРМАНН

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ НОРМАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ НА МАКСИМАЛЬНЫХ Op^*-АЛГЕБРАХ

1. Известно, что пространство нормальных функционалов на алгебре всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве является w^*-секвенциально полным. Более того, w^*-последовательность Коши векторных состояний сходится к векторному состоянию. В [1] рассматриваются аналогичные вопросы для максимальной Op^*-алгебры неограниченных операторов. Оказывается, что первое свойство в этом случае не имеет места, а второе легко переносится. Открытым оставался вопрос о том, сходится ли σ_0-последовательность Коши нормальных состояний к нормальному в случае, если максимальная Op^*-алгебра $L^+(D)$ в равномерной топологии неборнологична. В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос для широкого класса пространств D, описываемых условием (+) (3.1).

Изложим вначале необходимые сведения из теории Op^*-алгебр.

2. Пусть H — сепарабельное ильбертово пространство. Через $B(H)$, $S_\infty(H)$, $S_1(H)$, $F(H)$ обозначим соответственно множество всех ограниченных, компактных, ядерных и конечномерных операторов в H. Пусть D — плотное, линейное подмножество в H. Максимальной Op^*-алгеброй над D, обозначаемой $L^+(D)$, называется множество всех (ограниченных и неограниченных) операторов в H, которые вместе со своими сопряженными оставляют D инвариантным. Топология t на D определяется полунормами $\varphi \to \|A\varphi\|$, где $A \in L^+(D)$. Алгебра $L^+(D)$ называется замкнутой, если $D = \cap D(\bar{A})$ или, что равносильно, если

$D[t]$ полно. В $L^+(D)$ будем рассматривать так называемую равномерную топологию τ_D, задающуюся полунормами

$$\tau_D : A \to p_V(A) = \sup_{\varphi,\, \psi \in V} |(\varphi,\ A\psi)|,$$

где V пробегает семейство всех t-ограниченных подмножеств.

3. Пространство D называется областью Фреше, если существует последовательность операторов A_k из $L^+(D)$ такая, что

$$I \leqslant A_k,\ A_k^2 \leqslant A_{k+1},\ D = \bigcap_{k \geqslant 1} D(A_k) \text{ и } D[t] \text{ — полно.}$$

3.1. Мы будем рассматривать класс областей Фреше D, удовлетворяющих следующему условию $(+)$:

Существует последовательность взаимно ортогональных, одномерных проекторов P_k из $L^+(D)$ таких, что

$$(+)\ a) \sum_{k \in N} P_k = I,\ б) \sum_{k \in M} P_k = P_M \in L^+(D) \text{ для всех } M \subset \boldsymbol{N}.$$

Этот класс содержит все области Фреше с безусловным базисом ([2], с.210) и, в частности, все строго коммутирующие области Фреше. Уже в последнем случае алгебра $L^*(D)[\tau_D)$ не обязательно борнологична ([3], п. 4). Таким образом, основной результат настоящей работы является усилением предложения 3.12 из [1], где борнологичность алгебры $L^+(D)[\tau_D]$ играла существенную роль.

4. Мы часто будем параллельно рассматривать ограниченный оператор $A \in L^+(D)$ и его замыкание $\overline{A} \in B(H)$, обозначая их одной и той же буквой А.

Ниже нам понадобятся следующие множества:

$$F(D) = \{T \in L^+(D),\ \dim TD < \infty\},$$
$$S_1(D) = \{T \in L^+(D),\ \forall A,\ B \in L^+(D) : ATB \in S_1(H)\}.$$

Состоянием f на $L^+(D)$ называется любой нормированный ($f(I) = 1$), положительный ($f(A) \geqslant 0$ для всех $A \geqslant 0$), линейный функционал. Под $A \geqslant 0$ понимаем, что $(A\varphi,\ \varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in D$. Линейный функционал f на $L^+(D)$ называется нормальным, если существует оператор $C \in S_1(D)$ такой, что $f(A) = \operatorname{Tr} AC$ для всех $A \in L^+(D)$. Нормальные функционалы τ_D — непрерывны [4].

Пусть $L^+(D)'$ — множество всех линейных, τ_D — непрерывных функционалов на $L^+(D)$ и $\sigma_0 = \sigma(L^+(D)',\ L^+(D))$ обозначает w^*-топологию на $L^+(D)'$.

Всякий нормальный функционал на $L^+(D)$ можно рассматривать как нормальный функционал на $B(H)$ в силу очевидного включения $S_1(D) \subset S_1(H)$. Наоборот, если $C \in S_1(D)$ и $f_1(A) = \operatorname{Tr} AC$ для всех $A \in B(H)$, то f_1 можно рассматривать как нормальный функционал на $L^+(D)$. Поэтому если нормальные функционалы f на $L^+(D)$ и f_1 на $B(H)$ порождаются одним оператором $C \in S_1(D)$, будем их обозначать одним символом f.

Напомним, что если нормальный функционал f порождается оператором $C \in S_1(H)$, то $\|f\| = \|C\|_1 = \operatorname{Tr}(C^*C)^{1/2}$.

Нам понадобится один общий результат.

5. **Лемма.** *Пусть* (g_n) — *последовательность нормальных состояний на* $B(H)$ *и пусть существует такое нормальное состояние* g *на* $B(H)$, *что* $\forall A \in S_\infty(H): \lim\limits_{n\to\infty} g_n(A) = g(A)$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(A) = g(A)$ *для всех* $A \in B(H)$.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists P = P^2 = P^* \in F(H))\,(\forall n \geqslant 1)\,(g_n(I - P) < \varepsilon). \qquad (1)$$

Допустим противное, т. е. существование $\varepsilon_0 > 0$ такого, что для любого проектора $P \in F(H)$ найдется $n = n(P)$, для которого выполняется $g_n(I - P) \geqslant \varepsilon_0$. Выберем возрастающую последовательность (P_k) конечномерных проекторов, для которых $\sup\limits_{k\geqslant 1} P_k = I$. Это возможно в силу сепарабельности H. По предположению, существует такая подпоследовательность (n_k), что $g_{n_k}(I - P_k) \geqslant \varepsilon_0$. С другой стороны, g — нормален и тогда имеем $\lim\limits_{k\to\infty} g(I - P_k) = 0$. Подберем k_0 так, что $g(I - P_{k_0}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Для всех $k \geqslant k_0$ в силу положительности g_n имеем $\varepsilon_0 \leqslant g_{n_k}(I - P_k) \leqslant g_{n_k}(I - P_{k_0})$. По условию выполняется $\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k} \times$ $\times (I - P_{k_0}) = g(I - P_{k_0})$ (именно здесь использовано, что g — состояние). Но тогда получаем противоречие: $\varepsilon_0 \leqslant g(I - P_{k_0}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Это доказывает (1).

По теореме 3.51 из [5] с учетом (1) множество (g_n) слабокомпактно в том смысле, что существуют подпоследовательность (g_{n_k}) и нормальное состояние h на $B(H)$, для которых верно $\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(A) = h(A)$ для всех $A \in B(H)$. Заметим, что $h = g$, так как их значения на $S_\infty(H)$ совпадают.

Рассмотрим последовательность $(g_n(A))$ для произвольного, но фиксированного оператора $A \in B(H)$. Допустим, что $(g_n(A))$ не сходится. Тогда существует подпоследовательность (n_s) такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} g_{n_s}(A) = a \neq g(A)$. Для последовательности (g_{n_s}) выполняется условие леммы, что согласно первой части доказательства приводит к противоречию. Значит, на самом деле $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(A) = g(A)$ для всех $A \in B(H)$.

5.1. Следствие. *Пусть для последовательности положительных, нормальных функционалов* (g_n) *на* $B(H)$ *существует положительный, нормальный функционал* g *такой, что выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(A) = g(A) \quad (A \in S_\infty(H)) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(I) = g(I).$$

Тогда для любого $A \in B(H)$ $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(A) = g(A)$.

Доказательство. В случае $g(I)=0$, т. е. $g\equiv 0$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n\|=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(I)=0$, что и требуется. Если же $g(I)>0$, то без ограничения общности можно считать, что $g_n(I)>0\ (n\geqslant 1)$. Но тогда $\frac{g_n}{g_n(I)}$ и $\frac{g}{g(I)}$ удовлетворяют условиям леммы 5, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(A)=g(A)\ (A\in B(H))$.

Установим теперь основной результат этой работы.

6. **Теорема.** *Если D удовлетворяет условию $(+)$, то множество N_0 нормальных состояний на $L^+(D)$ является σ_0-секвенциально полным.*

Доказательство. Пусть $(f_n)\subset N_0$ — последовательность Коши в σ_0-топологии, $f(A)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(A)\ (A\in L^+(D))$. Нужно показать, что положительный функционал f нормален.

Обозначим через K замыкание по норме $B(H)$ алгебры всех ограниченных операторов из $L^+(D)$. Тогда на C^*-алгебре K существует такое состояние g, что для всех $A\in K$ верно

$$\lim_{n\to\infty}f_n(A)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Tr}\,AC_n=g(A),\ \text{где}\ C_n\in S_1(D),\ C_n\geqslant 0,\ \mathrm{Tr}\,C_n=1.$$

Продолжение g до состояния на $B(H)$ также будем обозначать через g. Существует разложение $g=g_1+g_2$, где $0\leqslant g_1$ — нормален, $0\leqslant g_2$ — сингулярен $(\forall A\in S_\infty(D): g_2(A)=0)$.

Рассмотрим теперь последовательность $h_n=f_n-g_1-g_2\ (n\geqslant 1)$ функционалов на $B(H)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}h_n(A)=0\ \ (A\in K)$. (2)

Основным моментом рассуждения является доказательство того факта, что $g=g_1$. Для этого воспользуемся условием $(+)$ и известной леммой Филлипса.

Определим последовательность функций множества d_n на подмножествах N по правилу:

$$d_n(M)=h_n\Big(\sum_{m\in M}P_m\Big)=h_n(P_M)\ \ (M\subset N).$$

Легко видеть, что d_n — конечно-аддитивные функции множества с равномерно ограниченным изменением. Кроме того, в силу условия $(+)$ и (2) выполняется $\lim\limits_{n\to\infty}d_n(M)=0$ для всех $M\subset N$. По лемме Филлипса имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in N}|d_n(\{k\})|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in N}|h_n(P_k)|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in N}|f_n(P_k)-g_1(P_k)|=0.$$

Но тогда

$$|f_n(I)-g_1(I)|=|(f_n-g_1)\Big(\sum_{k\geqslant 1}P_k\Big)|=$$
$$=\Big|\sum_{k\geqslant 1}[f_n(P_k)-g_1(P_k)]\Big|\leqslant\sum_{k\geqslant 1}|f_n(P_k)-g_1(P_k)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Отсюда, так как $f_n(I)=1$, получаем $g_1(I)=1$ и, значит, $g=g_1$.

Теперь можно применить лемму 5 для g и (f_n), учитывая, что $S_\infty(H)\subset K$. Она дает $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(A)=g(A)\ (A\in B(H))$.

По теореме 1 из [6] имеет место соотношение $\lim_{n\to\infty}\|f_n - g\| = \lim_{n\to\infty}\|C_n - C\|_1 = 0$, где $C \in S_1(H)$, $C \geqslant 0$, $\operatorname{Tr} C = 1$ и $g(A) = \operatorname{Tr} AC$ для всех $A \in B(H)$.

Проверим, что на самом деле $C \in S_1(D)$. Для этого воспользуемся тем фактом, что f представим в виде $f(A) = \operatorname{Tr} AR + h(A)$, $A \in L^+(D)$, где $R \in S_1(D)$, $R \geqslant 0$ и $h(A) = 0\ (\forall A \in F(D))$ (см. [4]). Заметим, что $\operatorname{Tr} AR = \operatorname{Tr} AC$ для всех $A \in F(D)$. В таком случае из плотности D в H вытекает, что $C = R \in S_1(D)$.

Зафиксируем $k \in \boldsymbol{N}$. Рассмотрим на $L^+(D)$ положительные, нормальные функционалы $f_{n,k}$, определяемые соотношениями $f_{n,k}(A) = f_n \times \times (A_k A A_k) = \operatorname{Tr} AC_{n,k}$ $(n \geqslant 1)$, где $C_{n,k} = A_k C_n A_k \geqslant 0$, $C_{n,k} \in S_1(D)$. Ясно, что $(f_{n,k})_n$ являются σ_0-последовательностью Коши. Из соотношений $f_{n,k}(\mathrm{I}) = f_n(A_k^2) = a_n \geqslant 1$ и того факта, что (a_n) последовательность Коши, получаем $\lim_{n\to\infty} f_n(A_k^2) = a \geqslant 1$. К последовательности $\left(\frac{f_{n,k}}{a_n}\right)_n$ применимы рассуждения первой части доказательства теоремы. Это значит, существует нормальное состояние g^0, для которого $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n,k}(A)}{a_n} = g^0(A)$, $A \in B(H)$. Еще раз применяя стандартные рассуждения о совпадении нормальных функционалов, имеем

$$g^0(A) = \frac{g_k(A)}{a} = \frac{\operatorname{Tr}(A_k C A_k) A}{a}$$

или

$$\lim_{n\to\infty} f_{n,k}(A) = g_k(A)\quad (\forall A \in B(H)).$$

Но тогда снова из теоремы 1 [6] вытекает

$$\lim_{n\to\infty}\|f_{n,k} - g_k\| = \lim_{n\to\infty}\|A_k C_n A_k - A_k C A_k\|_1 = 0.$$

Пользуясь произвольностью k и тем, что D — область Фреше, для всех A, $B \in L^+(D)$ получаем $\lim_{n\to\infty}\|A(C_n - C)B\|_1 = 0$.

Зафиксируем произвольный элемент $A \in L^+(D)$. Покажем, что $f(A) = g(A)$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем n таким образом, что выполняется $|f(A) - f_n(A)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|A(C_n - C)\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда:

$$|f(A) - g(A)| \leqslant |f(A) - f_n(A)| + |f_n(A) - g(A)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |\operatorname{Tr} A(C_n - C)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|A(C_n - C)\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $f \equiv g$ — нормальное состояние на $L^+(D)$ и тем самым теорема доказана.

6.1. Следствие. *Если D удовлетворяет условию $(+)$, то множество положительных, нормальных функционалов на $L^+(D)$ является σ_0-секвенциально полным.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 5.1.

Сформулируем теорему 6 в терминах, близких к [6].

6.2. Назовем последовательность нормальных функционалов (f_n) на $L^+(D)$, равномерно сходящейся к нормальному функционалу f, если для $f_{n,A,B}(X) = \operatorname{Tr} AC_nBX$ и $f_{A,B}(X) = \operatorname{Tr} ACBX$ $(X \in L^+(D))$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_{n,A,B} - f_{A,B} \| = \lim\limits_{n\to\infty} \| AC_nB - ACB \|_1 = 0$.

Теорема 6 равносильна следующей теореме.

6.3. **Теорема.** *Пусть D удовлетворяет условию $(+)$. Тогда любая σ_0-сходящаяся последовательность нормальных состояний на $L^+(D)$ сходится равномерно к некоторому нормальному состоянию.*

7. Наконец заметим, что факт принадлежности оператора C к $S_1(D)$ из доказательства теоремы 6 не зависит от условия $(+)$. А именно справедлива следующая лемма:

7.1. **Лемма.** *Пусть $(C_n) \subset S_1(D)$ и $L^+(D)$ замкнута. Если $\| AC_nB \|_1 \leqslant q_{A,B}$ для всех A, $B \in L^+(D)$ и (C_n) является слабой последовательностью Коши на D, то существует $C \in S_1(D)$, такой что (C_n) слабо сходится к C.*

Доказательство. Из условий непосредственно вытекает существование таких C и $T_{A,B}$ из $B(H)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} (C_n\varphi, \psi) = (C\varphi, \psi)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (AC_nB\varphi, \psi) = (T_{A,B}\varphi, \psi)$; $\varphi, \psi \in H$. Кроме того, для всех $\varphi \in D$, $\psi \in D(A^*)$ верно $\lim\limits_{n\to\infty} (C_nB\varphi, A^*\psi) = (CB\varphi, A^*\psi)$. Это значит $(T_{A,B}\varphi, \psi) = (CB\varphi, A^*\psi)$. Отсюда $CB\varphi \in D(A^{**}) = D(\bar{A})$. В силу произвольности $A \in L^+(D)$ и замкнутости $L^+(D)$ получаем $CB\varphi \in D$. Но тогда $T_{A,B} = ACB$ и $ACB \in S_1(H)$. Тем самым $C \in S_1(D)$, что и требуется.

Список литературы: 1. *Löffler F., Timmermann W.* On the structure of the state space of maximal O_p^*-algebras || Prepr.—Dubna, 1985, E5-85—727.—18 p. 2. *Lassner G., Timmermann W.* Classifications of domains of operator algebras // Rep. math. physics.— 1976. —**9.**—P. 205—217. 3. *Schmüdgen K.* On topologization of unbounded operator algebras // Rep. math. physics.— 1980. —**17.**— P. 359—371. 4. *Schmüdgen K.* On trace representation of linear functionals on unbounded operator algebras // Comm. Math. Phys.—1978.—**63.**—P. 113—130. 5. *Сарымсаков Т. А.* Введение в квантовую теорию вероятностей.—Ташкент: Фан, 1985.—184 с. 6. Dell'Antonio G. F. On the limits of sequences of normal states // Comm. Pure and Applied Math.—1967.—**20.**—P. 413—429.

Поступила в редколлегию 03.02.86