ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВА $D^n[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$

Т. Е. Починок

Через $D^n[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ мы обозначаем пространство функций, n раз непрерывно дифференцируемых на всей оси и удовлетворяющих условиям

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{\varphi_k(x)} = 0,$$

где функции $\varphi_k(x) \geqslant 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, и могут принимать бесконечное значение. В этом пространстве определяем норму

$$\|f\|_\varphi = \sum_{k=0}^{n} \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\varphi_k(x)}.$$

Это нормированное пространство не всегда является полным. В данной статье мы находим условия на $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, необходимые и достаточные для полноты пространства $D^n[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$.

§ 1. Прежде всего заметим, что запас функций, входящих в пространство, и норма функции не изменяется, если его весовые функции $\varphi_k(x)$ заменить функциями

$$\Phi_k(x) = \lim_{\delta\to 0} \{\inf_{|t-x|<\delta} \varphi_k(t)\}.$$

Функции $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ полунепрерывны снизу в тех точках, где они конечны, ибо, если $\Phi_k(x_0) < \infty$, то $\Phi_k(x_0) < \varphi_k(x) + \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$ и для любого $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ верно неравенство

$$\Phi_k(x_0) \leqslant \lim_{\eta\to 0} \{\inf_{|x-x_1|<\eta} \varphi_k(x)\} + \varepsilon = \Phi_k(x_1) + \varepsilon.$$

В этом состоит их преимущество перед первоначальными весовыми функциями, которые могли быть даже неизмеримыми.

Нормы $\|f\|_\varphi$ и $\|f\|_\Phi$ связаны между собой неравенством $\|f\|_\varphi \leqslant \|f\|_\Phi$, поскольку из определения функций $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ следует, что $\Phi_k(x) \leqslant \varphi_k(x)$ $k = 0, 1, \ldots, n$.

Установим неравенство между нормами в другую сторону. Пусть $f(x) \in D^n[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$. Выберем точки x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ так, чтобы

$$\frac{|f^{(k)}(x_k)|}{\Phi_k(x_k)} > \sup_{\infty<x<\infty} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\Phi_k(x)} - \varepsilon, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

и δ такое, что из неравенства $|x-x_k|<\delta$ следуют неравенства

$$|f^{(k)}(x)|>|f^{(k)}(x_k)|-\varepsilon \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n \tag{2}$$

и

$$\Phi_k(x_k)\geqslant \inf_{|x-x_k|<\delta}\varphi_k(x)-\varepsilon \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

Подберем еще точки $x_k'\in(x_k-\delta,\ x_k+\delta)$, для которых

$$\inf_{|x-x_k|<\delta}\varphi_k(x)>\varphi_k(x_k')-\varepsilon \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{4}$$

Используя последовательно неравенства (2), (1), (3) и (4), получим

$$|f^{(k)}(x_k')|>|f^{(k)}(x_k)|-\varepsilon>\Big[\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{|f^{(k)}(x)|}{\Phi_k(x)}-\varepsilon\Big]\cdot\Phi_k(x_k)-\varepsilon>$$

$$>\Big[\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{|f^{(k)}(x)|}{\Phi_k(x)}-\varepsilon\Big]\cdot\Big[\inf_{|x-x_k|<\delta}\varphi_k(x)-\varepsilon\Big]-\varepsilon>\Big[\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{|f^{(k)}(x)|}{\Phi_k(x)}-\varepsilon\Big]\times$$

$$\times\left[\varphi_k(x_k')-2\varepsilon\right]-\varepsilon=\varphi_k(x_k')\cdot\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{|f^{(k)}(x)|}{\Phi_k(x)}-\varepsilon_1.$$

Отсюда

$$\frac{|f^{(k)}(x_k')|}{\varphi_k(x_k')}>\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{|f^{(k)}(x)|}{\Phi_k(x)}-\frac{\varepsilon_1}{\varphi_k(x_k')}$$

и

$$\|f\|_\varphi\geqslant\|f\|_\Phi.$$

Будем теперь считать, что веса Φ_0 $\Phi_1,\ \ldots,\ \Phi_n$ пространства $D^n[\Phi_0,\ \Phi_1,\ \ldots,\ \Phi_n]$ полунепрерывны в тех точках, где они конечны, а если $\Phi_k(x_0)=\infty$, то либо $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0}\Phi_k(x)=\infty$, либо существует интервал U вида $(x_0,\ x_0+\delta)$ или $(x_0-\delta,\ x_0)$ такой, что $\Phi_k(x)\equiv\infty$ при $x\in U$.

§ 2. Рассмотрим сначала пространство $D^0[\Phi]=C_\Phi$ непрерывных на оси функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{\Phi(x)}=0$$

с нормой

$$\|f\|=\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{|f(x)|}{\Phi(x)}.$$

Две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ считаются равными в C_Φ, если

$$\|f_1-f_2\|=\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{\Phi(x)}=0,$$

т. е. если эти функции совпадают на множестве F_Φ всех тех точек, где $\Phi(x)\neq\infty$. Следовательно, в полном пространстве C_Φ предельная функция фундаментальной последовательности должна быть непрерывной на $\overline{F}_\Phi$, и потому поведение веса на этом множестве не может быть произвольным *.

* С. Н. Бернштейн рассматривал пространство C_Φ при дополнительном условии $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{x^n}{\varphi(x)}=0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ и поставил вопрос (в 1924 г.) о плотности системы полиномов в этом пространстве [1]. Им же получено решение этой проблемы при некоторых специальных ограничениях на $\Phi(x)$. Общее решение проблемы было дано в работе Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна [2]. Другой метод решения был предложен С. Н. Мергеляном [3]. Обзор и полная библиография даны в статьях [4] и [5].

Теорема 1. *Пространство C_Φ полно тогда и только тогда, когда функция $\Phi(x)$ ограничена на пересечении F_Φ с любым сегментом.*

Доказательство. Предположим, что есть сегмент $[-A, A]$ такой, что $\Phi(x)$ неограничена на $F_\Phi^A = F_\Phi \cap [-A, A]$, и пусть $\{x_n\}_1^\infty$, $x_n \in F_\Phi^A$ — монотонная сходящаяся к x_0 последовательность такая, что $\Phi(x_n) > n$. В силу свойств веса $\Phi(x)$ для каждой точки x_n найдется окрестность U_n: $|x - x_n| < \delta_n$, в которой $\Phi(x) > \frac{n}{2}$. Выберем δ_n так, чтобы $U_{n-1} \cap U_n = \Lambda$ $(n = 2, 3, \ldots)$, и рассмотрим следующую последовательность функций принадлежащих C_Φ:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = x_{2k}, \ k = 1, 2, \ldots, n \\ 0, & x \overline{\in} \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{2k} \end{cases}$$

на интервалах $(x_{2k} - \delta_{2k}, x_{2k})$, $(x_{2k}, x_{2k} + \delta_{2k})$ $k = 1, 2, \ldots, n$, $f_n(x)$ — линейная функция. При $n > m$

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in \bigcup\limits_{k=n}^{m} U_k} \frac{|f_n(x)|}{\Phi_n(x)} < \frac{1}{\Phi(2m)} < \frac{1}{m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Так как в любой окрестности точки x_0 предельная функция этой фундаментальной последовательности принимает нулевые и единичные значения, то она не может иметь предела в точке x_0, и потому не принадлежит пространству C_Φ.

Обратно, при условиях теоремы для любой фундаментальной последовательности $\{f_n(x)\}_1^\infty$ на множестве $F_\Phi^A = F_\Phi \cap [-A, A]$ имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \cdot \sup_{x \in F_\Phi^A} \Phi(x) \quad (n, \ m > N_\varepsilon),$$

т. е. на $\overline{F}_\Phi^A$ последовательность сходится к непрерывной функции. Расширяя сегмент $[-A, A]$, найдем непрерывную на всем множестве $\overline{F}_\Phi$ функцию, которую продолжим линейно на интервалы, смежные с $\overline{F}_\Phi$. Полученная функция $f(x)$ принадлежит пространству C_Φ и является предельной для последовательности $\{f_n(x)\}_1^\infty$ в смысле нормы этого пространства. Действительно, переходя в неравенстве

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|f_n(x) - f_m(x)|}{\Phi(x)} < \varepsilon \quad n, \ m > N_\varepsilon$$

к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|f(x) - f_m(x)|}{\Phi(x)} < \varepsilon \quad m > N_\varepsilon.$$

Зафиксировав какое-нибудь $\hat{n} > N_\varepsilon$, подберем T_ε так, чтобы при $|x| > T_\varepsilon$ выполнялось $\frac{|f_{\hat{n}}(x)|}{\Phi(x)} < \varepsilon$. Тогда

$$\frac{|f(x)|}{\Phi(x)} < \varepsilon + \sup_{|x| > T_\varepsilon} \frac{|f_{\hat{n}}(x)|}{\Phi(x)} < 2\varepsilon \quad |x| > T_\varepsilon$$

и

$$f(x) \in C_\Phi.$$

Замечание. Как следствие, из теоремы вытекает, что в случае, когда $\Phi(x) \neq \infty$ только на дискретном множестве точек, пространство C_Φ полно.

§ 3. Перейдем к общему случаю пространства $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$. Пусть F_{Φ_k} — множество всех точек, где $\Phi_k(x) \neq \infty$ $k = 0, 1, \ldots, n$. Обозначим через F_k замыкание F_{Φ_k}. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пространство* $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$ *тогда и только тогда является полным, когда на любом конечном сегменте выполнены условия:*

1. $\Phi_n(x)$ *ограничена на* F_{Φ_n}.

2. *При* $p < n$ *имеет место включение* $F_p \subset F_n$, *кроме, быть может, конечного числа точек* F_p.

3. *При любом* $p < n$ *множество* F_n *может иметь только конечное число компонент, содержащих точки* F_p.

Доказательство. Пусть на сегменте $[-A, A]$ есть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in F_{\Phi_n} \cap [-A, A]$, $x_k \to x_0$ такая, что $\Phi_n(x_k) > k$. Выберем для каждой точки x_k окрестность U_k: $|x - x_k| < \delta_k$ так, чтобы $U_k \cap U_{k+1} = \Lambda$, и $\Phi_n(x) > \frac{k}{2}$ при $x \in U_k$.

Построим последовательность функций $\{\hat{f}_k^{(n)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\hat{f}_k^{(n)}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_{2p} \quad p = 1, 2, \ldots, k \\ 0, & x \bar{\in} \bigcup\limits_{p=1}^{k} U_{2p} \end{cases}$$

на интервалах $(x_{2p} - \delta_{2p}, x_{2p})$, $(x_{2p}, x_{2p} + \delta_{2p})$, $p = 1, 2, \ldots, k$, $\hat{f}_k^{(n)}(x)$ — линейная функция.

Предельная функция этой фундаментальной в C_{Φ_n} последовательности в точке x_0 терпит разрыв. Теперь построим фундаментальную в $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$ последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы на $[x_1, x_0]$ $f_k^{(n)}(x) = \hat{f}_k^{(n)}(x)$.

Положить просто

$$f_k(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_1}^{x} (x-t)^{n-1} \hat{f}_k^{(n)}(t)\, dt$$

мы не можем, так как такая функция растет при $|x| \to \infty$ и может не принадлежать пространству $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$.

Поступим следующим образом. Для точек a и b $b > a > x_0$ построим полином $P_k(x)$ степени $2n + 1$ такой, что

$$\begin{aligned} &P_k^{(l)}(b) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n, \\ &P_k^{(l)}(a) = \hat{f}_k^{(l)}(a) \quad l = 0, 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\hat{f}_k(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_1}^{x} (x-t)^{n-1} \hat{f}_k^{(n)}(t)\, dt.$$

Положим

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \ x \geqslant b, \\ \hat{f}_n(x), & x_1 < x \leqslant a, \\ P_k(x), & a < x < b, \end{cases}$$

$f_k(x)$ — финитная функция и потому принадлежит $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$. Проверим, что последовательность $\{f_k(x)\}$ фундаментальна в этом пространстве. В силу условий (5) коэффициенты полиномов $P_k(x)$ $k = 1, 2, \ldots$ при каждой фиксированной степени образуют сходящуюся последовательность, и следовательно, $\{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится на (a, b) равномерно вместе со своими производными всех порядков. Как раньше упоминалось, $\{\hat{f}_k^{(n)}(x)\}_1^{\infty}$ фундаментальна в C_{Φ_n}, и для последовательности $\{f_k(x)\}_1^{\infty}$ имеем

$$\|f_k - f_{k+r}\| = \sum_{l=0}^{n} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_0]} \frac{|\hat{f}_k^{(l)}(x) - \hat{f}_{k+r}^{(l)}(x)|}{\Phi_l(x)} +$$

$$+ \sup_{a<x<b} \frac{|P_k^{(l)}(x) - P_{k+r}^{(l)}(x)|}{\Phi_l(x)} < \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(x_0 - x_{k-1})^{n-l-1}}{(n-l-1)!} \times$$

$$\times \sup_{x \in [x_{k-1}, x_0]} |\hat{f}_k^{(n)}(x) - \hat{f}_{k+r}^{(n)}(x)| + 0(1) < \varepsilon$$

при $k > k_1$ и $r > 0$.

Итак, мы показали, что при невыполнении условия 1 пространство $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$ имеет фундаментальные последовательности, предельные функции которых не могут принадлежать $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$. Перейдем к доказательству необходимости условия 2. Предположим, что на некотором сегменте множества $F_{p+1}, F_{p+2}, \ldots, F_{n-1}$ удовлетворяют условию 2, а множество F_p этому условию не удовлетворяет. При этих допущениях мы построим фундаментальную в пространстве $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$ последовательность, предельная функция которой не имеет $(p+1)$-й производной. Из бесконечного числа точек множества F_p, находящихся вне объединения $f_p = F_{p+1} \cup F_{p+2} \cup \ldots \cup F_n$, выберем последовательность $\{x_k\}_1^{\infty}$, $x_k \uparrow x_0$. У каждой точки x_k есть окрестность U_k такая, что $U_k \cap f_p = \Lambda$ и $U_k \cap U_{k+1} = \Lambda$.

Построим последовательность следующих функций $\hat{f}_k^{(p)}(x)$:

$$\hat{f}_1^{(p)}(x) = \begin{cases} 0, & x \,\overline{\in}\, U_2 \\ x_2 - x_0, & x = x_2. \end{cases}$$

На U_2 функция $\hat{f}_1^{(p)}(x)$ доопределяется так, чтобы на всей оси она имела $(n-p)$ непрерывную производную и $|\hat{f}_1^{(p)}(x)| \leqslant |x_2 - x_0|$,

$$\hat{f}_k^{(p)}(x) = \begin{cases} \hat{f}_{k-1}^{(p)}(x), & x \in U_{2k} \\ x_{2k} - x_0, & x = x_{2k}. \end{cases}$$

На U_{2k} продолжаем $\hat{f}_k^{(p)}(x)$ с сохранением непрерывности $(n-p)$ производной на всей оси и с условием

$$|f_k^{(p)}(x)| < |x_{2k} - x_0| \text{ при } x \in U_{2k}.$$

Последовательность $\{\hat{f}_k^{(p)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно на всей оси, и ее предельная функция $f^{(p)}(x)$ не имеет производной в точке x_0, так как в любой окрестности этой точки разностное отношение $\dfrac{f^{(p)}(x) - f^{(p)}(x_0)}{x - x_0}$ принимает нулевые и единичные значения.

Нужную нам фундаментальную последовательность образуют финитные функции $f_k(x)$, построенные аналогично предыдущему так, чтобы $f_k^{(p)}(x) = \hat{f}_k^{(p)}(x)$ при $x \in [x_1, x_0]$.

Для доказательства необходимости условия 3 предположим, что на конечном сегменте $[-A, A]$ множество F_n имеет бесконечное число компонент, содержащих точки множества F_p, и выберем из $CF_n \cap [-A, A]$ последовательность интервалов $\{(d'_k, d''_k)\}_{k=1}^{\infty}$ с тем условием, что каждый сегмент $[d''_k, d'_{k+1}]$ содержит хотя бы одну точку $x_k \in F_p$. В силу условия 2 интервалы можно выбрать такими, что $(d'_k, d''_k) \cap F_l = \Lambda$ $l = 0, 1, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots$. Будем считать, что $x_k \nearrow x_0$, $k \to \infty$.

Построим последовательность $\{\hat{f}_k^{(p)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, фундаментальную в C_{Φ_p}.

$$\hat{f}_1^{(p)}(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} (d'_2, d''_3) \\ x_2 - x_0, & x \in [d''_2, d'_3] \end{cases}$$

на (d'_2, d''_2) и (d'_3, d''_3) функцию $f_1^{(p)}(x)$ продолжим с сохранением непрерывности $(n-p)$-производной. Далее положим

$$\hat{f}_k^{(p)}(x) = \begin{cases} \hat{f}_{k-1}^{(p)}(x), & x \overline{\in} (d'_{2k}, d''_{2k+1}) \\ x_{2k} - x_0, & x \in [d''_{2k}, d'_{2k+1}]. \end{cases}$$

На интервалах (d'_{2k}, d''_{2k}) и (d'_{2k+1}, d''_{2k+1}) доопределим $f_k^{(p)}(x)$ опять с тем же условием непрерывности $(n-p)$ производной. Никакую из функций $\{f_k^{(p)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ нельзя заменить эквивалентной так, чтобы в точках последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ эквивалентная функция принимала другие значения, ибо эквивалентные в C_{Φ_p} функции совпадают на множестве F_{Φ_p} и в силу непрерывности на его замыкании F_p. Последовательность $\{\hat{f}_k^{(p)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к функции, неимеющей в точке x_0 производной. Теперь аналогично предыдущему строим финитные функции $f_k(x)$ так, чтобы на $[x_1, x_0]$ $f_k^{(p)}(x) = \hat{f}_k^{(p)}(x)$, и предельная функция фундаментальной в $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$ последовательности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не может иметь в точке x_0 производной порядка $p+1$.

Докажем достаточность условий 1, 2, 3. Покажем, что любая фундаментальная в $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$ последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ при выполнении условий теоремы имеет в этом пространстве предельную функцию.

Из условия 1 следует, что во всех предельных точках множества F_{Φ_n} функция $\Phi_n(x)$ конечна, и потому $F_{\Phi_n} = F_n$. На всех входящих во множество F_n сегментах $[a, b]$ имеем

$$f_k(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f_k^{(n)}(t)\,dt + P_k(x),$$

где $P_k(x)$ — полином степени n, коэффициенты которого вполне определены, если на $[a, b]$ достаточное число точек множеств F_l, $l = 0, 1, \ldots, n-1$. Если же для определения коэффициентов не хватает условий, то полагаем их такими, чтобы при каждой фиксированной степени полинома они образовывали по индексу k сходящуюся последовательность, что имеет место в случае, когда они определены. На $[a, b]$ в силу условия 1 последовательность сходится равномерно, и так как коэффициенты полиномов $\{P_k(x)\}$ сходятся, то существуют $\lim\limits_{k\to\infty} f_k^{(l)}(x)$, $l = 0, 1, \ldots, n$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f_k^{(l)}(x) = f^{(l)}(x)$, где $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. Таким образом, на каждом сегменте из F_n мы нашли непрерывную функцию, являющуюся предельной для последовательности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в смысле равномерной сходимости вместе с первыми n-производными. Теперь нужно распространить $f(x)$ на всю ось так, чтобы расширенная функция $\hat{f}(x)$ имела n непрерывных производных и удовлетворяла условию $\hat{f}^{(l)}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k^{(l)}(x)$, $x \in F_l$, $l = 0, 1, \ldots, n$. На каждом интервале (d', d''), лежащем между соседними сегментами из F_n, может быть благодаря условиям 2 и 3 лишь конечное число точек из множеств $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$. Пусть d_1 — первая из них. Поскольку в силу свойств функции $\Phi_n(x)$ на $[d', d_1]$ множество F_n является всюду неплотным, можно выбрать интервал $(c', c'') \subset (d', d_1)$ такой, что $(c', c'') \cap F_n = \Lambda$.

Продолжим непрерывным образом на сегменты $[d', c']$ и $[c'', d_1]$ функцию $\lim\limits_{k\to\infty} f_k^{(n)}(x)$, заданную только в точках множества F_n. Полученную функцию обозначим через $\hat{f}_n(x)$ и положим

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{d'}^{x} (x-t)^{n-1}\hat{f}^{(n)}(t)\,dt + P(x) \quad x \in [d, c'],$$

где $P(x)$ — полином степени n, коэффициенты которого определяются из условий $\hat{f}^{(l)}(d_1) = f^{(l)}(d_1)$ $l = 0, 1, \ldots, n$. Аналогично на $[c'', d_1]$

$$\hat{f}(x) = -\int\limits_{x}^{d_1} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\hat{f}^{(n)}(t)\,dt + P(x).$$

Коэффициенты полинома в этом случае полностью определены, если d_1 принадлежит всем множествам F_l, $l = 0, 1, \ldots, n$. В противном случае доопределяем их произвольным образом. На (c', c'') $\hat{f}(x)$ полагаем равной полиному $Q(x)$ степени $2n+1$, такому, что $Q^{(l)}(c') = \hat{f}^{(l)}(c')$, $Q^{(l)}(c'') = \hat{f}^{(l)}(c'')$, $l = 0, 1, \ldots, n$.

На сегменте $[d_1, d_2]$, где d_2 — следующая точка множества $F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$, проводим такое же построение, и так конечное число раз на каждом интервале (d', d''). Проверим, что полученная функция $\hat{f}(x)$ является предельной для последовательности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в смысле нормы пространства $D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$ и принадлежит этому пространству.

В неравенстве $\|f_k - f_m\| < \varepsilon$; $k, m > N_\varepsilon$ перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получим

$$\|f_k - f\| = \sum_{l=0}^{n} \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{|f_k^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)|}{\Phi_l(x)} < \varepsilon \quad k > N_\varepsilon,$$

т. е. $\hat{f}(x)$ является предельной функцией последовательности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.
Зафиксируем $\hat{k} > N_\varepsilon$ и подберем T_ε так, чтобы при $|x| > T_\varepsilon$ $\frac{|f_{\hat{k}}^{(l)}(x)|}{\Phi_l(x)} < \varepsilon$, $l = 0, 1, \ldots, n$. Имеем при $|x| > T_\varepsilon$

$$\frac{|\hat{f}^{(l)}(x)|}{\Phi_l(x)} < \varepsilon + \sum_{r=0}^{n} \sup_{|x| > T_\varepsilon} \frac{|f_{\hat{k}}^{(r)}(x)|}{\Phi_{\hat{k}}(x)} < (n+2)\varepsilon \quad l = 0, 1, \ldots, n$$

и, следовательно, $\hat{f}(x) \in D^n[\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernstein. Le problème de l'approximation de fonctions contenues sur tout l'axe réel et l'une de ses applications. Bull Sos. Math. de France, 52 (1924), 339—410.
2. Н. И. Ахиезер, С. Н. Бернштейн. Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов. ДАН СССР, т. 92, № 6, (1953), 1109—1111.
3. С. Н. Мергелян. О весовых приближениях многочленами. ДАН СССР, т. 97, № 4 (1954), 597—600.
4. Н. И. Ахиезер. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси. «Усп. матем. наук». т. XI, вып. 4(70). 3—43, 1956.
5. С. Н. Мергелян. Весовые приближения многочленами. «Усп. матем. наук», т. XI, вып. 5(71), 107—152, 1956.

Поступила 17 марта 1966 г.