УДК 519.6

Р. Б. ТЮТЮНИКОВ

СОХРАНЕНИЕ СХОДИМОСТИ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОГООБРАЗИЙ С КРАЕМ

1. Рассмотрим компактное C^1-гладкое подмногообразие $K \subset R^n$ с кусочно-C^1-гладким краем (или без края). Обозначим через $C^1(K, K)$ множество гладких отображений (операторов) $K \to K$, снабженное естественной метрикой d. Обозначим через $D_\delta(F)$ шар радиуса δ с центром $F \in C^1(K, K)$. Оператор $F \in C^1(K, K)$ называется гиперболическим, если все его неподвижные точки гиперболичны, т. е. спектр линейного приближения в этих точках не имеет собственных значений на единичной окружности. Множество неподвижных точек гиперболического оператора конечно.

Строгой функцией Ляпунова для оператора F называется такая вещественная непрерывная функция $W(x)$ $(x \in K)$, что $W(Fx) \geqslant W(x)$ **(1)**, если $W(Fx) = W(x)$ **(2)**, то $Fx = x$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *Если гиперболический оператор F обладает строгой функцией Ляпунова W, то существует такое $\delta > 0$, что для любого оператора G из $D_\delta(F)$ все траектории $\{G^m x\}_{m=0}^{\infty}$ $(x \in K)$ сходятся.*

Доказательству теоремы 1 предпошлем некоторые вспомогательные рассмотрения.

Выбросим из K ε-окрестности неподвижных точек оператора F. Полученный компакт обозначим через K_ε. Из условий (1), (2) следует, что $W(Fx) - W(x) > 0$ для всех $x \in K_\varepsilon$, а из непрерывности W на K_ε — существование такого $\alpha(\varepsilon) > 0$, что $W(Fx) - W(x) > \alpha(\varepsilon)$ $(x \in K_\varepsilon)$ **(3)**.

Лемма. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $W(Gx) - W(x) > \frac{1}{2}\alpha(\varepsilon)$ для всех $G \in D_\delta(F)$ и всех $x \in K_\varepsilon$.*

Доказательство. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|W(x) - W(y)| < \frac{\alpha(\varepsilon)}{2} \quad (\|x - y\| < \delta). \tag{4}$$

Возьмем $G \in D_\delta(F)$. Тогда $\|Gx - Fx\| < \delta$ $(x \in K)$, откуда в силу неравенств (3), (4)

$$W(Gx) - W(x) > \frac{\alpha(\varepsilon)}{2}.$$

С л е д с т в и е. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $G \in D_\delta(F)$ *любая точка из* K *под действием итераций оператора* G *за ограниченное число шагов попадает в* ε*-окрестность множества неподвижных точек оператора* F.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно взять δ в соответствии с леммой. Если $G \in D_\delta(F)$ и точки $x, Gx, \ldots, G^m x$ лежат в K_ε, то по лемме

$$W(G^m x) - W(x) > m\frac{\alpha(\varepsilon)}{2}.$$

Так как W на K ограничена, то ограничено и число m.

Доказательство теоремы 1. Если K-многообразие с краем, то построим компактное гладкое многообразие $\tilde{K}$ с краем так, чтобы $K \subset \subset \operatorname{int} \tilde{K}$, и гладко продолжим [1] все операторы класса $C^1(K, K)$ до гладких отображений $\tilde{K} \to \boldsymbol{R}^n$. Продолжение произвольного оператора G обозначим через $\tilde{G}$. Его можно осуществить так, чтобы $d \times \times (\tilde{F}, \tilde{G}) \leqslant cd(F, G)$ ($c = \mathrm{const}$). В дальнейшем для простоты пишем снова G вместо $\tilde{G}$. Отметим, что для всех продолженных операторов K инвариантно. Покажем, что можно выбрать такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1 > > \varepsilon_2 > 0$) и такое $\delta > 0$, что для любого оператора $G \in D_\delta(F)$ и любой точки $x \in K$ из расходимости последовательности $\{G^i x\}_{i=0}^{\infty}$ будет следовать, что

а) если $G^i x$ принадлежит ε_2-окрестности некоторой неподвижной точки оператора F, то найдутся такие j, k ($j > k \geqslant i$), что $G^i x, \ldots, G^k x$ лежат в той же ε_2-окрестности, $G^{k+1}x, \ldots, G^j x$ лежат в K_{ε_2}, а $G^{j+1}x \in K_{\varepsilon_1}$;

б) W на каждом шаге траектории (под действием G) в K_{ε_2} возрастает, а в K_{ε_1} возрастает на величину, вдвое большую той, на которую W может уменьшиться во время пребывания траектории в ε_2-окрестности множества неподвижных точек оператора F.

В этой ситуации возникает очевидное противоречие с ограниченностью функции W на K.

Множество $\{a_i\}_{i=1}^{l}$ неподвижных точек оператора F в K конечно и $\|Fx - x\|$ стремится к нулю при приближении x к неподвижной точке. Поэтому можно выбрать такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любых двух неподвижных точек a_i и a_j оператора F любая траектория под действием F, выходящая из ε_1-окрестности $u_{\varepsilon_1}(a_i)$ и попадающая в $u_{\varepsilon_1} \times \times (a_j)$, содержит, по крайней мере, две точки в K_{ε_1}. Можно считать ε_1 столь малым, что ε_1-окрестности разных неподвижных точек не пересекаются и при итерациях F все траектории, начинающиеся в $u_{2\varepsilon_1}(a_i)$ некоторой неподвижной точки a_i и не лежащие на ее притягивающем многообразии, выталкиваются из $u_{2\varepsilon_1}(a_i)$. Возьмем ε_2 ($0 < < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$) таким, чтобы

$$\max_{a_i}\,[\max_{u_{\varepsilon_2}(a_i)} W - \min_{u_{\varepsilon_2}(a_i)} W] < \frac{\alpha(\varepsilon_1)}{4}.$$

Обозначим через a' неподвижную точку оператора $G \in D_\delta(F)$, возникающую из неподвижной точки a оператора F при достаточно малом возмущении*. Пусть $\delta > 0$ таково, что для любого $G \in D_\delta(F)$ траектория (под действием G) любой точки $x \in K$, попадающая из $u_{\varepsilon_1}(a_i)$ в $u_{\varepsilon_1}(a_j)$, делает между ними не менее одного шага; любая траектория, начинающаяся в $u_{\varepsilon_1}(a_i)$ и не лежащая на притягивающем многообразии неподвижной точки a'_i, выталкивается из $u_{\varepsilon_1}(a_i)$; в K_{ε_1} на траектории под действием G функция W растет не менее чем на $\alpha(\varepsilon_1)/2$, а в K_{ε_2} — не менее чем на $\alpha(\varepsilon_2)/2$. Здесь дважды была применена лемма.

Для выбранных ε_1, ε_2 и δ условия а), б) проверяются непосредственно.

2. Исследуем поведение итераций произвольной точки $(n-1)$-мерного симплекса Δ^{n-1} в $\boldsymbol{R}^n$ под действием оператора $V = FT$, где F — оператор отбора, а $T = (\tau_{ij})_{i,\,j=1}^n$ — стохастическая по столбцам матрица мутаций ($\tau_{ij} < 1$ при $i \neq j$). Оператор F строится по некоторой матрице приспособленности $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,\,j=1}^n$ ($\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, $0 < \lambda_{ij} \leqslant 1$) и действует по формулам

$$p'_i = (Fp)_i = \frac{p_i W_i(p)}{W(p)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — точка из Δ^{n-1};

$$W_i(p) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} p_k, \quad W(p) = \sum_{i=1}^n p_i W_i(p) = \sum_{i,\,k=1}^n \lambda_{ik} p_i p_k.$$

В популяционной генетике оператор (5) описывает действие чистого отбора в аутосомном локусе (время считается дискретным). Гиперболические операторы отбора образуют открытое плотное множество среди всех операторов отбора [2]. Функция $W_i(p)$ называется средней приспособленностью i-го гена в состоянии популяции p, а $W(p)$ — средней приспособленностью популяции. Вопрос о сходимости итераций $F^n(p_0)$ ($n \to \infty$) для любой начальной точки $p_0 \in \Delta^{n-1}$ в настоящее время решен полностью [3, 4], его изложение имеется в монографии Ю. И. Любича [2]. Оператор $V = FT$ описывает взаимодействие мутаций и отбора. Так как F и T не коммутируют, то итерации V не сводятся к итерациям F и T в отдельности. Благодаря этому можно построить двумерный пример расходимости траекторий для оператора $V = FT$, где F — гиперболический оператор отбора, а T — положительная матрица мутаций. Расходимость возникает, если T значительно отличается от единичной матрицы E, в то время как по биологическому смыслу недиагональные элементы T имеют порядок 10^{-4} и менее.

Зафиксируем любую норму в пространстве матриц. Так как из $\|T - E\| < \delta$ следует $d_{\Delta^{n-1}}(F, F, T) < \omega(\delta)$, $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и средняя приспособленность популяции $W(p)$ является строгой функцией Ляпунова для оператора вида (5) (см. [2]), то из теоремы 1 вытекает следующий результат:

Теорема 2. *Если F — гиперболический оператор отбора, то существует такое $\delta > 0$, что при $\|T - E\| < \delta$ траектории всех точек симплекса под действием оператора $V = FT$ сходятся.*

---

* Существование точки a' обеспечено продолжением всех операторов на $\tilde{K}$.

Рассмотрим теперь одну специальную ситуацию.

Теорема 3. *Если оператор отбора F гиперболичен и обладает асимптотически устойчивой неподвижной точкой $\bar{a}$ во внутренности симплекса, то существует такое $\delta > 0$, что если $\| T - E \| < \delta$ и T — матрица без нулей, то FT имеет в Δ^{n-1} ровно одну неподвижную точку и все траектории сходятся к этой точке.*

Доказательство. Рассмотрим C^1 — продолжение оператора F в некоторую окрестность симплекса Δ^{n-1} в плоскости $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Так как все внутренние точки симплекса под действием F сходятся к асимптотически устойчивому полному равновесному полиморфизму (см. [2]), то отталкивающее многообразие неподвижной точки на границе симплекса $\partial\Delta^{n-1}$ не лежит целиком в $\partial\Delta^{n-1}$. Выберем $\delta > 0$ так, что при $\| T - E \| < \delta$ характер неподвижных точек оператора FT сохраняется, и если неподвижная точка для FT, возникшая из граничной неподвижной для F точки, лежит в симплексе, то ее отталкивающее многообразие пересекает границу. Из-за отсутствия нулей в матрице T у FT нет неподвижных точек на границе. Далее предполагаем, что $\| T - E \| < \delta$.

Пусть неподвижная точка оператора FT, возникшая из граничной неподвижной точки, лежит в симплексе. Возьмем точку x, лежащую на отталкивающем многообразии и вне симплекса. Через конечное число шагов траектория x под действием* $(FT)^{-1}$ попадет в некоторую точку $y \in \Delta^{n-1}$. Значит, y под действием FT через конечное число шагов выходит из симплекса. Но симплекс инвариантен относительно FT. Следовательно, на самом деле FT не имеет неподвижных точек в Δ^{n-1}, кроме той, которая возникла из $\bar{a}$.

Если теперь δ настолько мало, что выполнено заключение теоремы 2, то все траектории под действием FT будут сходиться к единственной неподвижной точке.

3. Изучим сходимость траектории произвольной точки декартова квадрата $(n-1)$-мерного симплекса $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$ под действием оператора S, который строится по двум матрицам приспособленности $\Lambda_f = (\lambda_{ij}^f)_{i,\,j=1}^n$ и $\Lambda_m = (\lambda_{ij}^m)_{i,\,j=1}^n$ ($\lambda_{ij}^f = \lambda_{ji}^f$, $\lambda_{ij}^m = \lambda_{ji}^m$, $0 < \lambda_{ij}^f \leq 1$, $0 < \lambda_{ij}^m \leq 1$) и действует по формулам

$$\left.\begin{aligned} p_i' &= \frac{p_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}^f q_j + q_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}^f p_j}{2 \sum_{i,\,j=1}^{n} \lambda_{ij}^f p_i q_j} \quad (1 \leq i \leq n); \\ q_i' &= \frac{p_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}^m q_j + q_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}^m p_j}{2 \sum_{i,\,j=1}^{n} \lambda_{ij}^m p_i q_j} \quad (1 \leq i \leq n), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

* Обратимость оператора F была установлена в [2].

где (p, q) — точка из $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$, $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — координаты точки в первом симплексе, а $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ — во втором. Оператор (6) описывает действие отбора в полиаллельном локусе в случае, когда коэффициенты выживания зависят от пола (см. [5]). При $\Lambda_f = \Lambda_m$ оператор S осуществляет вложение $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$ в диагональ $\Delta(p_i = q_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ за один шаг, а действие S в Δ соответствует действию оператора F вида (5), построенного по $\Lambda = \Lambda_f = \Lambda_m$.

Теорема 4. *Если матрица приспособленности Λ отвечает гиперболическому оператору F вида (5), то найдется такое $\delta > 0$, что для любого оператора S вида (6), построенного по матрицам Λ_f, Λ_m, $\|\Lambda - \Lambda_f\| < \delta$, $\|\Lambda - \Lambda_m\| < \delta$ траектории всех точек из $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$ сходятся.*

Теорема 4 вытекает из теоремы 1 по следующим причинам:

1) оператор S_0, построенный по $\overset{0}{\Lambda}_f = \Lambda$ и $\overset{0}{\Lambda}_m = \Lambda$, гиперболичен, так как спектр линейного приближения в неподвижной для S_0 точке является объединением спектра линейного приближения F в соответствующей неподвижной точке оператора F и собственного значения $\beta = 0$, взятого с кратностью $n - 1$ (см. [5]);

2) отождествим S_0 на Δ с F. У S_0 есть строгая функция Ляпунова $\tilde{W}$ в $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$, задаваемая формулой $\tilde{W}((p, q)) = W(F^{-1}S_0 \times (p, q)) - \operatorname{dist}((p, q), \Delta)$, где W — средняя приспособленность популяции с матрицей приспособленности Λ;

3) из $\|\Lambda - \Lambda_f\| < \delta$, $\|\Lambda - \Lambda_m\| < \delta$ следует $d(S_0, S) < \omega(\delta)$, где $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

4. Аналогично исследуется взаимодействие отбора и малых миграций, отбора и кроссинговера с малой вероятностью обмена локусами.

Список литературы: 1. *Мальгранж Б.* Идеалы дифференцируемых функций.— М.: Мир, 1968. — 132 с. 2. *Любич Ю. И.* Математические структуры в популяционной генетике. — К.: Наук. думка, 1983. — 296 с. 3. *Любич Ю. И. и др.* Сходимость к равновесию под действием отбора в однолокусной популяции / Ю. И. Любич, Г. Д. Майстровский, Ю. Г. Ольховский // Докл. АН СССР.— 1976. — **226**, № 1.— С. 58—60. 4. *Любич Ю. И. и др.* Сходимость к равновесию под действием отбора в однолокусной аутосомной популяции / Ю. И. Любич, Г. Д. Майстровский, Ю. Г. Ольховский // Пробл. передачи информ. — 1980. — **16**, № 1. — С. 93—104. 5. *Karlin S.* Matematical models, problems and controversies of evolutionary theory // Bull. Amer. Math. Soc. — 1984. — **10**, № 2. — p. 221—273.

Поступила в редколлегию 19.03.86